

## Liga Matematyczna IM UJ

30 kwietnia – 9 maja 2013

1. Niech  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ . Pokazać, że  $g_\alpha(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \binom{n}{i} p(x + i\alpha)$  jest funkcją stałą i znaleźć jej wartość.
2. Na prostej położonych jest  $n$  punktów w ten sposób, że żadna odległość między nimi nie powtarza się więcej niż 2 razy. Pokazać, że co najmniej  $\lfloor n/2 \rfloor$  odległości pomiędzy tymi punktami pojawia się dokładnie raz.
3. Pokazać, że dla dowolnej krzywej zamkniętej  $\gamma$  na płaszczyźnie oraz punktu  $M$  wewnątrz niej istnieją takie punkty  $A, B \in \gamma$ , że  $M$  jest środkiem odcinka  $AB$ .
4. Prostokąt o bokach całkowitej długości pocięto na skończoną liczbę kwadratów. Pokazać, że boki kwadratów mają długości wymierne.