

Liga Matematyczna IM UJ

30 października 2014

1. Pokazać, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n liczba

$$\sum_{i=0}^n \frac{1+2i}{m+i} = \frac{1}{m} + \frac{3}{m+1} + \frac{5}{m+2} + \dots + \frac{1+2n}{m+n}$$

nie jest całkowita.

2. Pokazać, że

$$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{i^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} \right\rfloor.$$

Uwaga: $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x .

3. Pokazać, że jeśli $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ są wektorami o długości 1, to przynajmniej jeden z wektorów $u+v+w$, $u+v-w$, $u-v+w$, $-u+v+w$ ma długość nieprzekraczającą 1.
4. Niech $a_0 = 1$ oraz $a_{n+1} = \sin a_n$. Zdefiniujmy $b_n = \sqrt{n} \cdot a_n$.
- (a) Pokazać, że ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny.
- (b) Znaleźć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Uwaga: Poprawne rozwiązanie punktu (b) daje pełne punkty również za część (a) bez konieczności dowodzenia zbieżności.