

Liga Matematyczna IM UJ

18 grudnia 2014

1. Mały Piotruś dostał arkusz kolorowego papieru o wymiarach $m \times n$. Chce go pociąć na prostokątne paski o szerokości 1 i długości k , z których zrobi łańcuch na choinkę. Znaleźć wszystkie wartości $k \in \mathbb{N}^+$ w zależności od $m, n \in \mathbb{N}^+$, dla których istnieje możliwość pocięcia papieru tak, aby nie pozostały ścinki?
2. Dowieść, że jeśli rzeczywiste macierze $A, B \in M_{n \times n}$ spełniają równość $2B = A + 2AB$ to 1 nie jest wartością własną A .
3. Znaleźć $\inf_{x, y > 0} x^y + y^x$.
4. Niech $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że $f(0) = 0$ oraz mającą ciągłą pochodną spełniającą $0 < f'(x) \leq 1$ w każdym punkcie $x \in [0, 1]$. Udowodnić, że

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3 dx$$

i wskazać przykład funkcji, dla której zachodzi równość.