Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki

**Małgorzata Czapla**

# TRIANGULACJE DEFINIOWALNE Z WARUNKAMI REGULARNOŚCI

ROZPRAWA DOKTORSKA

Promotor
Prof. dr hab. Wiesław Pawłucki

KRAKÓW 2009

# Spis treści

# Wstęp

Od ponad 40 lat, to znaczy od kiedy ukazały się prace Whitneya [**Wh1**] i Łojasiewicza [**Ł1**] wiadomo, że analityczne i semianalityczne podzbiory przestrzeni euklidesowych posiadają stratyfikacje z warunkami Whitneya. Jest to rezultat, który później został uogólniony na zbiory subanalityczne ([**Hi1**][**ŁSW**]), a w końcu na zbiory definiowalne w dowolnej strukturze o-minimalnej ([**TL1**], [**TL2**]). Od czasu, gdy ukazała się praca Łojasiewicza [**Ł2**] wiadomo również, że zbiory semianalityczne, a także subanalityczne ([**Ha**], [**Hi2**], [**Ł3**]) i definiowalne w strukturach o-minimalnych ([**vD1**]) są triangulowalne.

Prawdziwym wyzwaniem okazał się problem, postawiony przez Łojasiewicza i Thoma, połączenia tych dwóch rezultatów, tzn. skonstruowania takiej triangulacji, która jest jednocześnie stratyfikacją z warunkami Whitneya. Zasadniczą trudnością było to, że konstrukcja stratyfikacji z warunkami Whitneya przebiega przez indukcję zstępującą ze względu na wymiar zbioru, podczas gdy konstrukcja triangulacji - przez indukcję rosnącą ze względu na wymiar przestrzeni otaczającej. Przez wiele lat nie wiadomo było, jak poradzić sobie z tą rozbieżnością.

Pierwsza pozytywna odpowiedź została niedawno podana przez Masahito Shiotę [**Sh1**]. W swoim ośmiostronicowym artykule dotyczącym przypadku semialgebraicznego proponuje on rozwiązanie oparte na metodzie kontrolowanych systemów otoczeń tubularnych, rozwiniętej przez niego w książce [**Sh2**]. Jednak jego dowód, niezwykle skomplikowany, jest trudny do zrozumienia w szczegółach.

Celem niniejszej rozprawy jest podanie innej, bardziej bezpośredniej metody triangulacji z warunkami regularności, która jest ogólna z dwojakiego punktu widzenia. Po pierwsze dotyczy zbiorów definiowalnych w dowolnej strukturze o-minimalnej nad ciałem liczb rzeczywistych, a po drugie daje triangulację z dowolnym warunkiem regularności z pewnej wyróżnionej klasy, zawierającej w szczególności warunek Whitneya (B) i warunek Verdiera.

Głównymi narzędziami są: teoria odwzorowań słabo lipschitzowskich rozwinięta w rodziałach 2, 3 oraz twierdzenie Guillaume'a Valette'a (patrz rodział 4) o sprowadzeniu dowolnego zbioru definiowalnego do postaci posiadającej kierunek regularny za pomocą homeomorfizmu bi-lipschitzowskiego. W skrócie rozumowanie przebiega następująco: główny rezultat (twierdzenie 6.2.2) wyprowadzone zostaje z twierdzenia o triangulacji lokalnie lipschitzowskiej, słabo bi-lipschitzowskiej (twierdzenie 5.2.2), która w pewnym sensie (patrz twierdzenie 3.2.1) zachowuje warunki regularności. Z kolei taką triangulację otrzymuje się stosując twierdzenie Guillaume'a Valette'a, które redukuje problem do przypadku, gdzie może już być zastosowana klasyczna procedura triangulacji.

Niniejszym chciałabym gorąco podziękować mojemu Promotorowi prof. dr hab. Wiesławowi Pawłuckiemu za ogromną życzliwość, doskonałą opiekę naukową i czas poświęcony na liczne, fascynujące dyskusje. To dla mnie wielki zaszczyt móc studiować pod Jego kierunkiem i uczyć się tego uważnego, wnikliwego spojrzenia od tak znakomitego Mistrza. Chciałabym również tą pracą złożyć podziękowania śp. Profesorowi dr hab. Stanisławowi Łojasiewiczowi, który jako pierwszy zachęcał mnie do studiowania geometrii zbiorów semianalitycznych i subanalitycznych i którego dokonania, niezwykle bogata osobowość i głęboki umysł była dla mnie inspiracją do podjęcia pracy naukowej.

Małgorzata Czapla

ROZDZIAŁ 1

# Preliminaria

## 1.1. Funkcje separacji podprzestrzeni liniowych

W całej pracy stosować będziemy następującą notację:

Przyjmujemy, że $n, m \in \mathbb{N}$, symbolem $<,>$ oznaczamy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, $|\cdot|$ oznacza normę euklidesową w $\mathbb{R}^n$, zaś zbiór $\mathbb{S}^{n-1}$ symbolizuje sferę jednostkową w $\mathbb{R}^n$.

Przez $\mathbb{G}_{k,n}$ będziemy oznaczać rozmaitość Grassmanna $k$ wymiarowych podprzestrzeni liniowych $\mathbb{R}^n$. W szczególności $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{G}_{1,n}$.

Będziemy używać symbolu $C^q$ na określenie klasy gładkości odwzorowania, przy czym - jeśli nie zaznaczono inaczej - będziemy przyjmować, że $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 1$ lub $q \in \{\infty, \omega\}$.

Jeśli $V$ jest liniową podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$, wówczas przyjmujemy, że

$$\pi_V : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

jest rzutowaniem prostopadłym na $V$.

Jeśli $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ oraz $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, wówczas wygodnie czasem będzie utożsamiać $f|_\Lambda$ z jej wykresem

$$graph f|_\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in \Lambda, y = f(x)\}.$$

Jeśli dodatkowo $m = 1$ i $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ jest drugim odwzorowaniem, to przyjmujemy, że

$$(f, g)|_\Lambda = \{(x, y) : x \in \Lambda, f(x) < y < g(x)\}.$$

**Definicja 1.1.1.** Niech $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ będzie ustalonym wektorem oraz $W$ będzie nietrywialną liniową podprzestrzenią w $\mathbb{R}^n$. Określamy

$$d(v, W) = \inf\{\sin(v, w) : \ w \in W \cap \mathbb{S}^{n-1}\},$$

gdzie $\sin(v, w)$ oznacza sinus kąta między wektorami $v$ i $w$ w płaszczyźnie rozpiętej przez jednowymiarowe podprzestrzenie liniowe $\mathbb{R}v$, $\mathbb{R}w$. Ponadto kładziemy $d(v, W) = 1$, gdy $W = \{0\}$.

**Definicja 1.1.2.** Dla dowolnych podprzestrzeni $P \in \mathbb{G}_{k,n}$ oraz $Q \in \mathbb{G}_{l,n}$ określamy

$$d(P; Q) = \sup\{d(v; Q) : v \in P \cap \mathbb{S}^{n-1}\},$$

gdy $k > 0$ i kładziemy $d(P, Q) = 0$, gdy $k = 0$.

Poniżej przedstawiamy elementarne własności funkcji $d$:

**Obserwacja 1.1.3.** *Jeśli $P$, $Q$, $R$ są liniowymi podprzestrzeniami $\mathbb{R}^n$, wówczas zachodzą związki*
*a)* $0 \leqslant d(P, Q) \leqslant 1$.
*b)* $d(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow P \subset Q$,
*c)* $d(P, Q) = 1 \Longleftrightarrow P \cap Q^\perp \neq \{0\}$ *( lub równoważnie* $d(P, Q) < 1 \Longleftrightarrow P \cap Q^\perp = \{0\}$ *).*
*d)* $d(P, R) \leqslant d(P, Q) + d(Q, R)$.
*e)* $d(P, Q) = d(Q, P)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\dim P = \dim Q$.
*f)* $\left(\mathbb{G}_{k,n}, d|_{\mathbb{G}_{k,n} \times \mathbb{G}_{k,n}}\right)$ *jest zwartą przestrzenią metryczną.*
*g)* $d(\mathbb{R}v, Q) = dist(v, Q) = |v - \pi_Q(v)| = \left|\pi_{Q^\perp}(v)\right| = \sin\left(v, \frac{\pi_Q(v)}{|\pi_Q(v)|}\right) = d\left(\mathbb{R}v, \mathbb{R}\frac{\pi_Q(v)}{|\pi_Q(v)|}\right)$, *gdzie* $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ *jest wektorem nieortogonalnym do* $Q$ *oraz* $dist(v, Q) = \inf\{|v - w| : w \in Q\}$.
*h) Rozważmy następującą metrykę na* $\mathbb{P}_{n-1}$*:*

$$\widetilde{d}(\mathbb{R}v, \mathbb{R}w) = \min\{|v - w|, |v + w|\} \quad dla \quad v, w \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

*Wówczas*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, \widetilde{d}(\mathbb{R}v, \mathbb{R}w) \leqslant d(\mathbb{R}v, \mathbb{R}w) \leqslant \widetilde{d}(\mathbb{R}v, \mathbb{R}w).$$

*i) Jeśli $P'$ jest liniową podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$ taką, że $P \subset P'$, wtedy*

$$d(P,Q) \leqslant d(P',Q).$$

*j) Jeśli $Q'$ jest liniową podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$ taką, że $Q' \subset Q$, wówczas*

$$d(P,Q) \leqslant d(P,Q').$$

*k) $d(P,Q) = d(P \times \mathbb{R}, Q \times \mathbb{R})$.*

Dowód. Dla dowodu własności f) zob. [**Wh2**], Chapter 5, str. 178. Pozostałe własności są trywialne. □

**Definicja 1.1.4.** Rozszerzamy funkcję $d$ na $\mathbb{G}_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathbb{G}_{k,n}$ (suma rozłączna) w następujący sposób:

$$D(P,Q) = \max\{d(P,Q), d(Q,P)\}.$$

Wówczas $(\mathbb{G}_n, D)$ jest także przestrzenią metryczną, $\mathbb{G}_{k,n}$ są otwarto-domkniętymi składowymi spójnymi przestrzeni $\mathbb{G}_n$ i dla $k \neq l$ mamy $D(\mathbb{G}_{k,n}, \mathbb{G}_{l,n}) = 1$.

**Uwaga 1.1.5.** Dzięki obserwacji 1.1.3 *d)* i symetryczności funkcji $D$ zauważmy, że dla dowolnych $(P_1,Q_1),(P_2,Q_2) \in \mathbb{G}_n \times \mathbb{G}_n$ zachodzi nierówność

$$|d(P_1,Q_1) - d(P_2,Q_2)| \leqslant D(P_1,P_2) + D(Q_1,Q_2).$$

Stąd otrzymujemy natychmiast ciągłość funkcji $d$ na $\mathbb{G}_n \times \mathbb{G}_n$.

Kolejnym narzędziem do badania wzajemnego położenia podprzestrzeni liniowych w $\mathbb{R}^n$ jest poniższa funkcja $\delta$ :

**Definicja 1.1.6.** Dla dowolnych podprzestrzeni liniowych $V$, $W \subset \mathbb{R}^n$ określamy

$$\delta(V,W) = \inf\{d(v,W) : v \in V \cap \mathbb{S}^{n-1}\},$$

gdy $V \neq \{0\}$ oraz $\delta(V,W) = 1$, gdy $V = \{0\}$.

**Obserwacja 1.1.7.** *Jeśli $V$, $W$, $S$ są nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^n$, wówczas*
*i) $\delta(V,W) = 0 \iff V \cap W \neq \{0\}$;*
*ii) $\delta(V,W) > 0 \iff V \cap W = \{0\}$;*
*iii) $\delta(V,W) = 1 \iff V \perp W$.*
*iv) $\delta(V,W) \leqslant d(V,W) \leqslant D(V,W)$.*
*v) $\delta(V,W) \leqslant \delta(V,S) + \delta(S,W)$.*
*vi) dla dowolnych $(P_1,Q_1),(P_2,Q_2) \in \mathbb{G}_n \times \mathbb{G}_n$ zachodzi nierówność*

$$|\delta(P_1,Q_1) - \delta(P_2,Q_2)| \leqslant D(P_1,P_2) + D(Q_1,Q_2).$$

*vii) $\delta$ jest funkcją ciągłą na $\mathbb{G}_n \times \mathbb{G}_n$.*

Dowód. Własności *i)* − *iv)* wynikają bezpośrednio z definicji 1.1.6. Własności *v)*, *vi)* dowodzi się elementarnie, natomiast ciągłość $\delta$ wynika wprost z nierówności *vi)*. □

**Obserwacja 1.1.8.** *Niech $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ będzie podrozmaitością klasy $C^q$, zaś $f : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem klasy $C^q$. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in graph\ f|_\Lambda$ zachodzi nierówność*

$$\delta(T_x graph\ f|_\Lambda, \{0\} \times \mathbb{R}^m) \geqslant \alpha,$$

*z pewną stałą $\alpha > 0$. Wówczas*

*i) dla dowolnego punktu $x_0 \in \overline{graph\ f|_\Lambda}$ oraz dla dowolnego ciągu punktów $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset graph f|_\Lambda$ zbieżnego do punktu $x_0$, jeśli ciąg $\{T_{x_\nu} graph\ f|_\Lambda\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, wówczas*

$$\delta\left(\lim_{\nu \to +\infty} T_{x_\nu} graph\ f|_\Lambda, \{0\} \times \mathbb{R}^m\right) \geqslant \alpha > 0.$$

*ii) dla dowolnej podrozmaitości $M \subset \Lambda$ klasy $C^q$ podrozmaitość $M \times \mathbb{R}^m$ jest transwersalna do $graph f|_\Lambda$ w podrozmaitości $\Lambda \times \mathbb{R}^m$.*

Dowód. Pierwsza część tezy wynika z ciągłości funkcji $\delta$. Niech więc teraz $M \subset \Lambda$ będzie dowolną $C^q$ podrozmaitością. Na mocy obserwacji 1.1.7 *ii)* otrzymujemy, że dla dowolnego $x \in graph\ f|_\Lambda$ zachodzi

$$(T_x graph\ f|_\Lambda) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^m) = \{0\}.$$

Zatem dla dowolnego $x \in (M \times \mathbb{R}^m) \cap graph f|_\Lambda$ mamy

$$\dim\ T_x(M \times \mathbb{R}^m) \cap T_x graph f|_\Lambda \leqslant \dim M,$$

stąd ponieważ $T_x graph f|_M \subset T_x(M \times \mathbb{R}^m) \cap T_x graph f|_\Lambda$ oraz $\dim T_x graph f|_M = \dim M$, zatem

$$\dim T_x(M \times \mathbb{R}^m) \cap T_x graph f|_\Lambda = \dim M = \dim T_x(M \times \mathbb{R}^m) + T_x graph f|_\Lambda - \dim (\Lambda \times \mathbb{R}^m),$$

co kończy dowód. □

**Obserwacja 1.1.9.** *Niech $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ będzie podrozmaitością klasy $C^q$, zaś $f : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem Lipschitza klasy $C^q$. Wówczas istnieje $\alpha > 0$ o tej własności, że dla $x \in graph\ f|_\Lambda$*

$$\delta(T_x graph\ f|_\Lambda, \{0\} \times \mathbb{R}^m) \geqslant \alpha > 0.$$

Dowód. Dzięki lipschitzowości odwzorowania $f$ istnieje $L > 0$ taka, że dla dowolnego $y \in \Lambda$ zachodzi $||d_y f|| \leqslant L$. Ustalmy punkt $x = (y, f(y))$ z pewnym $y \in \Lambda$ i wybierzmy dowolny wektor $v \in T_x graph f|_\Lambda$, $|v| = 1$. Wówczas znajdziemy wektor $\widetilde{v} \in T_y \Lambda$ taki, że $v = (\widetilde{v}, d_y f(\widetilde{v}))$ . Wtedy

$$1 = |v| = \sqrt{|\widetilde{v}|^2 + |d_y f(\widetilde{v})|^2} \leqslant \sqrt{1 + L^2} \cdot |\widetilde{v}|.$$

Zatem

$$|\widetilde{v}| \geqslant \frac{1}{\sqrt{1 + L^2}} > 0.$$

Z drugiej strony jeśli $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest naturalnym rzutowaniem, to

$$\delta(\mathbb{R}v, \{0\} \times \mathbb{R}^m) = |v - \pi_2(v)| = |\widetilde{v}|,$$

więc stała $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+L^2}}$ spełnia warunki tezy. □

**Uwaga 1.1.10.** Znaczenie geometryczne funkcji $d$ i $\delta$ jest istotnie różne. Funkcję $d$ można zinterpretować jako odwzorowanie wyrażające „maksymalny kąt odchylenia" pierwszej podprzestrzeni liniowej od drugiej i w ogólnym przypadku nie jest ona odwzorowaniem symetrycznym. Natomiast funkcja $\delta$ jest symetryczna i charakteryzuje rodzaj przecięcia podprzestrzeni liniowych (trywialne/nietrywialne).

**Definicja 1.1.11.** Niech $A$ będzie podzbiorem w $\mathbb{R}^n$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}^n$ będzie wektorem jednostkowym. Powiemy, że $\lambda$ (odpowiednio prosta $\mathbb{R}\lambda$) jest *kierunkiem regularnym dla $A$* jeśli istnieje stała $\alpha > 0$ taka, że dla dowolnego $C^1$ regularnego punktu $a$ zbioru $A$ oraz dowolnego wektora $v$ stycznego do $A$ w $a$ zachodzi $|v - \lambda| \geqslant \alpha$. Wówczas mówimy, że rzutowanie ortogonalne w kierunku wektora $\lambda$ jest *projekcją regularną dla $A$.*

**Uwaga 1.1.12.** W szczególności na mocy obserwacji 1.1.9 otrzymujemy, że jeśli $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ jest $C^q$ podrozmaitością, $f : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem Lipschitza klasy $C^q$, to $e_n = (0, ..., 0, 1)$ jest kierunkiem regularnym dla $graph f \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

## 1.2. Stratyfikacje i struktury o-minimalne

**Definicja 1.2.1.** Zbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *zgodnym* ze zbiorem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jeśli $G \cap \Omega = \emptyset$ lub $G \subset \Omega$. Rodzinę zbiorów $\{X_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *zgodną* z rodziną zbiorów $\{Y_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n$, jeśli dla dowolnych $j \in J$, $i \in I$ zbiór $X_j$ jest zgodny ze zbiorem $Y_i$.

**Definicja 1.2.2.** Niech $A$ będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$. *Stratyfikacją klasy $C^q$* zbioru $A$ nazywamy lokalnie skończoną rodzinę $\mathfrak{X}_A$ spójnych podrozmaitości w $\mathbb{R}^n$ klasy $C^q$ (zwanych dalej *płatami*) o następujących własnościach:

1) $A = \bigcup \mathfrak{X}_A$ ;
2) jeśli $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathfrak{X}_A$, $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, wówczas $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$;
3) dla $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$ zbiór $\left(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma\right) \cap A$ jest skończoną sumą pewnych płatów z $\mathfrak{X}_A$ wymiaru $< \dim \Gamma$.

Powiemy, że stratyfikacja $\mathfrak{X}_A$ jest *zgodna ze skończoną rodziną podzbiorów $B_1, ..., B_p \subset A$*, jeżeli każdy płat $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$ jest zgodny z każdym zbiorem $B_i$, $i = 1, .., p$ [1] .

[1] Jest to równoważne temu, iż każdy zbiór $B_i$ jest skończoną sumą pewnych płatów z $\mathfrak{X}_A$.

W niniejszej rozprawie rozważać będziemy wyłącznie skończone stratyfikacje.

**Definicja 1.2.3.** Niech $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem ciągłym, zaś $\mathfrak{X}_A$ będzie stratyfikacją klasy $C^q$ zbioru $A$ o tej własności, że $f|_\Gamma$ jest odwzorowaniem klasy $C^q$ dla dowolnego płata $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$. Wówczas *indukowaną stratyfikacją klasy $C^q$ wykresu $f$ nad stratyfikacją $\mathfrak{X}_A$* jest rodzina

$$\mathfrak{X}_{graph f}(\mathfrak{X}_A) = \{graph f|_\Gamma : \quad \Gamma \in \mathfrak{X}_A\}.$$

Naturalnym umiejscowieniem dla naszych rozważań jest teoria struktur o-minimalnych (lub ogólniej kategorie geometryczno-analityczne), przedstawiona w [**vD1**] (lub [**DM1**]). W niniejszej dysertacji posługiwać się będziemy ustaloną strukturą o-minimalną $\mathcal{D}$ na uporządkowanym ciele liczb rzeczywistych, w której zachodzi twierdzenie o rozkładzie komórkowym klasy $C^q$, gdzie $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 1$ lub $q \in \{\infty, \omega\}$ (por. [**DM1**], rodz. 2, str. 506 oraz tw. 4.2). Zbiory i odwzorowania definiowalne w strukturze $\mathcal{D}$ będziemy nazywali krótko *definiowalnymi.* Literatura na ten temat jest niezwykle bogata, dlatego wymienimy tutaj zaledwie kilka fundamentalnych prac, w których można znaleźć więcej informacji o ogólnych strukturach o-minimalnych: [**DM1**], [**DM2**], [**vD1**], [**vD2**], [**M1**], [**M2**].

## 1.3. Kompleksy symplicjalne i stożki

**Definicja 1.3.1.** Niech $V$ będzie afiniczną podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$, zaś $\Gamma$ będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i załóżmy, że $\Gamma \subset V$. Ustalmy punkt $c \in \mathbb{R}^n \setminus V$. *Stożkiem o wierzchołku $c$ i podstawie* $\Gamma$ nazywamy następujący zbiór:

$$c * \Gamma = \{(1-t) \cdot c + t \cdot x : \quad x \in \Gamma,\ t \in (0,1)\}.$$

Jeśli $\Gamma$ jest $C^q$ podrozmaitością definiowalną, wówczas $c*\Gamma$ jest również $C^q$ podrozmaitością definiowalną.

**Definicja 1.3.2.** Niech $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. *Sympleksem $k$ - wymiarowym* w $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór

$$[y_0, ..., y_k] = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \beta_i \cdot y_i : \quad \beta_i > 0,\ \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1 \right\},$$

gdzie ustalone punkty $y_0, ..., y_k$ są afinicznie niezależne w $\mathbb{R}^n$ i nazywamy je *wierzchołkami sympleksu.*

**Uwaga 1.3.3.** Sympleks $\triangle = [y_0, ..., y_k]$ jest otwartym podzbiorem przestrzeni afinicznej $L$ rozpiętej przez punkty $y_0, ..., y_k$. Wówczas $\overline{\triangle} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \beta_i \cdot y_i : \quad \beta_i \geqslant 0, i = 0, ..., k,\ \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1 \right\}$ jest domknięciem sympleksu $\triangle$, $\partial\triangle = \overline{\triangle} \setminus \triangle$ jest brzegiem sympleksu $\triangle$.

**Definicja 1.3.4.** Niech $l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $l \leqslant k$. *Ścianą $l$ - wymiarową* sympleksu $\triangle = [y_0, ..., y_k]$ w $\mathbb{R}^n$ nazywamy dowolny sympleks $\triangle'$ postaci:

$$\triangle' = [y_{\nu_0}, ..., y_{\nu_l}],$$

gdzie $0 \leqslant \nu_0 < ... < \nu_l \leqslant k$.

**Definicja 1.3.5.** Jeśli $\triangle = [y_0, ..., y_k]$ jest $k$ - wymiarowym sympleksem w $\mathbb{R}^n$, wówczas *barycentrum sympleksu* $\triangle$ nazywamy punkt

$$0_\triangle = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k+1} \cdot y_i.$$

**Definicja 1.3.6.** *Kompleksem symplicjalnym* w $\mathbb{R}^n$ nazywamy dowolną skończoną rodzinę $K$ sympleksów w $\mathbb{R}^n$, spełniającą następujące warunki:

1) dla dowolnego $S_1, S_2 \in K$, $S_1 \neq S_2$ zachodzi $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
2) jeśli $S \in K$, zaś $S'$ jest ścianą sympleksu $S$, wtedy $S' \in K$.

*Wielościanem (ciałem) kompleksu symplicjalnego $K$* jest zbiór postaci

$$|K| = \bigcup K.$$

Wtedy $|K|$ jest definiowalnym i zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ wymiaru $\dim K = \max\{\dim \triangle : \ \triangle \in K\}$.

**Definicja 1.3.7.** Jeśli $l \leqslant k$, to *szkieletem $l$ - wymiarowym* kompleksu $K$ nazywamy następujący podkompleks symplicjalny $K^{(l)}$ kompleksu $K$:

$$K^{(l)} = \{\triangle \in K : \ \dim \triangle \leqslant l\}.$$

**Definicja 1.3.8.** Niech $K$ będzie ustalonym kompleksem symplicjalnym w $\mathbb{R}^n$. Indukcją ze względu na $\dim K$ definiujemy *podpodział barycentryczny* $K^*$ kompleksu $K$:

$I$. Jeśli $\dim K = 0$, kładziemy wówczas $K^* = K$.

$II$. Niech teraz $\dim K = d > 0$. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy podpodział barycentryczny $\left(K^{(d-1)}\right)^*$, będący stratyfikacją wielościanu $\left|K^{(d-1)}\right|$ zgodną z $K^{(d-1)}$. Wówczas

$$K^* = \left(K^{(d-1)}\right)^* \cup \left\{0_\triangle * S : S \subset \partial\triangle, S \in \left(K^{(d-1)}\right)^*, \triangle \in K, \dim \triangle = d\right\} \cup \{0_\triangle : \triangle \in K, \dim \triangle = d\}.$$

Na zakończenie tego rozdziału pokażemy, że skończona i spójna suma domkniętych sympleksów jest zbiorem quasi-wypukłym.

**Definicja 1.3.9.** Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *quasi-wypukły*, jeżeli istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnych punktów $x, y \in A$ istnieje łuk ciągły $\lambda : [0,1] \longrightarrow A$, kawałkami klasy $C^1$ o tej własności, że $\lambda(0) = x$, $\lambda(1) = y$ oraz $|\lambda| \leqslant C \cdot |x - y|$, gdzie $|\lambda|$ oznacza długość łuku $\lambda$.

**Lemat 1.3.10.** *Niech $\triangle_1, ..., \triangle_r$ będą skończoną rodziną sympleksów w $\mathbb{R}^n$. Jeżeli zbiór $\bigcup_{i=1}^{r} \overline{\triangle}_i$ jest spójny, to jest też quasi-wypukły.*

Dowód. Wystarczy udowodnić powyższą tezę dla dwóch sympleksów. Niech więc $\triangle_1$, $\triangle_2$ będą sympleksami w $\mathbb{R}^n$ takimi, że $\overline{\triangle}_1 \cap \overline{\triangle}_2 \neq \emptyset$. Niech $x \in \overline{\triangle}_1$, $y \in \overline{\triangle}_2$ będą dowolnie ustalonymi punktami. Wybierzmy punkt $z \in \overline{\triangle}_1 \cap \overline{\triangle}_2$ tak, aby $|x - z| = dist(x, \overline{\triangle}_1 \cap \overline{\triangle}_2)$. Określamy łuk $\lambda$ jako sumę odcinków łączących punkty $x$ i $z$ oraz $z$ i $y$. Wtedy

$$|\lambda| = |x - z| + |z - y| \leqslant 2 \cdot |x - z| + |x - y| = |x - y| + 2 \cdot dist(x, \overline{\triangle}_1 \cap \overline{\triangle}_2).$$

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnego $w \in \overline{\triangle}_1$

$$(\star) \qquad C \cdot dist(w, \overline{\triangle}_1 \cap \overline{\triangle}_2) \leqslant dist(w, \overline{\triangle}_1) + dist(w, \overline{\triangle}_2),$$

stąd bowiem natychmiast otrzymamy, że dla ustalonych wcześniej punktów $x$, $y$ zachodzi

$$|\lambda| \leqslant |x - y| + 2 \cdot dist(x, \overline{\triangle}_1 \cap \overline{\triangle}_2) \leqslant |x - y| + \frac{2}{C} \cdot dist(x, \overline{\triangle}_2) \leqslant \left(1 + \frac{2}{C}\right) \cdot |x - y|.$$

Zauważmy, że wobec równoważności norm w $\mathbb{R}^n$, wystarczy udowodnić powyższą nierówność $(\star)$ dla normy $|x|_{max} = \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}$. Rozważmy więc nastepujace odwzorowania $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(w) = dist_{max}(w, \overline{\triangle}_1 \cap \overline{\triangle}_2) \qquad \text{oraz} \qquad g(w) = dist_{max}(w, \overline{\triangle}_1) + dist_{max}(w, \overline{\triangle}_2),$$

gdzie $dist_{max}(w, A) = \inf\{|w - v|_{max} : v \in A\}$ dla $A \subset \mathbb{R}^n$, $A = \overline{A}$. Wtedy odwzorowania $f$ i $g$ są definiowalne w strukturze zbiorów semiliniowych. Rozważmy na płaszczyźnie następujacy zbiór

$$A = \left\{(f(w), g(w)) \in \mathbb{R}^2 : w \in \overline{\triangle}_1\right\}.$$

Wobec definiowalności i ciagłości funkcji $f$ i $g$, $A$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$, definiowalnym w strukturze zbiorów semiliniowych i dla dowolnego $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$, jeśli $\overline{x} > 0$, to $\overline{y} > 0$. Istnieje więc stała $C > 0$ taka, że

$$A \subset \{(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2 : \overline{y} \geqslant C \cdot \overline{x}\}.$$

Stąd dla dowolnego $w \in \overline{\triangle}_1$ zachodzi nierówność

$$C \cdot dist_{max}(w, \overline{\triangle}_1 \cap \overline{\triangle}_2) \leqslant dist_{max}(w, \overline{\triangle}_1) + dist_{max}(w, \overline{\triangle}_2).$$

□

**Wniosek 1.3.11.** *Jeśli $K$ jest kompleksem symplicjalnym w $\mathbb{R}^n$, to składowe spójne wielościanu $|K|$ są zbiorami quasi-wypukłymi.*

ROZDZIAŁ 2

# Odwzorowania słabo lipschitzowskie

## 2.1. Pojęcie słabej lipschitzowości odwzorowania

W niniejszym rozdziale wprowadzamy pojęcie słabej lipschitzowości odwzorowania na stratyfikacji jego dziedziny. Odwzorowanie słabo lipschitzowskie zachowuje się na styku dwóch płatów podobnie do odwzorowania Lipschitza - jeśli rozważamy sieczne łączące punkty wykresu odwzorowania nad wyżej wymiarowym płatem z punktami wykresu odwzorowania nad niżej wymiarowym płatem, to sieczne te są lokalnie silnie odseparowane od „pionowej" osi przyjętego układu współrzędnych. Poniżej podajemy pełną definicję tego pojęcia.

**Definicja 2.1.1.** Niech $A$ będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$, zaś $\mathfrak{X}_A$ będzie stratyfikacją klasy $C^q$ zbioru $A$. Rozważmy odwzorowanie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Powiemy, że $f$ jest odzworowaniem *słabo lipschitzowskim klasy $C^q$ na stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$*, jeżeli dla dowolnego płata $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$ restrykcja $f|_\Gamma$ jest odwzorowaniem klasy $C^q$ i para $(f, \mathfrak{X}_A)$ spełnia jeden z następujących równoważnych warunków:

a) dla dowolnych płatów $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{X}_A$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ i dla dowolnego punktu $a \in \Gamma$, jeśli $\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$, $\{b_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ są dowolnymi ciągami, wówczas

$$a_\nu, b_\nu \longrightarrow a \quad (\nu \to +\infty) \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{\nu\to+\infty} \frac{|f(a_\nu) - f(b_\nu)|}{|a_\nu - b_\nu|} < +\infty.$$

b) dla dowolnego płata $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$ oraz dla dowolnego $a \in \Gamma$ istnieje otwarte otoczenie $U_a$ punktu $a$ takie, że następujące odwzorowanie

$$\psi : (\Gamma \cap U_a) \times ((A \setminus \Gamma) \cap U_a) \ni (x, y) \longmapsto \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \in \mathbb{R}$$

jest ograniczone.

c) dla dowolnych płatów $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{X}_A$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ oraz dla dowolnego $a \in \Gamma$ istnieje otwarte otoczenie $U_a$ punktu $a$ takie, że następujące odwzorowanie

$$\psi : (\Gamma \cap U_a) \times (\Lambda \cap U_a) \ni (x, y) \longmapsto \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \in \mathbb{R}$$

jest ograniczone.

d) dla dowolnych płatów $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{X}_{graph f}(\mathfrak{X}_A)$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ oraz dla dowolnego $x \in \Gamma$, jeśli $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$, $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ są ciągami zbieżnymi do punktu $x$ oraz jeśli ciąg siecznych $\{\mathbb{R}(x_\nu - y_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w $\mathbb{P}_{m+n-1}$, wówczas

$$d\left(\lim_{\nu\to+\infty} \mathbb{R}(x_\nu - y_\nu),\ \{0\} \times \mathbb{R}^m\right) > 0.$$

e) dla dowolnych płatów $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{X}_{graph f}(\mathfrak{X}_A)$, $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ oraz punktu $x \in \Gamma$, jeśli $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ są ciągami odpowiednio w $\Gamma$ i $\Lambda$, zbieżnymi do punktu $x$ oraz jeśli ciąg siecznych $L_\nu = \mathbb{R}(x_\nu - y_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ jest zbieżny na $\mathbb{P}_{m+n-1}$ do podprzestrzeni

$$L = \lim_{\nu\to+\infty} \mathbb{R}(x_\nu - y_\nu),$$

wówczas $L \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^m) = \{0\}$.

**Obserwacja 2.1.2.** *Warunki a)-e) w definicji 2.1.1 są równoważne.*

DOWÓD. *a)* $\Rightarrow$ *c)*. Przypuśćmy, że *c)* nie zachodzi. Wówczas znajdziemy płaty $\Gamma, \Lambda \in \mathfrak{X}_A$ takie, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, pewien punkt $a \in \Gamma$ i zstępujący ciąg $\{U_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ otwartych otoczeń punktu $a$ oraz ciągi $\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$,

$\{b_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ takie, że $a_\nu \in \Gamma \cap U_\nu$, $b_\nu \in \Lambda \cap U_\nu$ oraz

$$\frac{|f(a_\nu) - f(b_\nu)|}{|a_\nu - b_\nu|} > \nu.$$

Wobec zbieżności $a_\nu$, $b_\nu \longrightarrow a(\nu \longrightarrow +\infty)$ otrzymujemy sprzeczność z założeniem $a)$.

Implikacje $c) \Rightarrow a)$, $b) \Rightarrow c)$ są trywialne.

Aby udowodnić implikację $c) \Rightarrow b)$, wystarczy zauważyć, że dla dowolnego płata $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$ oraz punktu $a \in \Gamma$ zbiór $st_a(\Gamma) = \{\Lambda \in \mathfrak{X}_A : \ \Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda, a \in \overline{\Lambda} \setminus \Lambda\}$ jest skończony.

$a) \Leftrightarrow d) \Leftrightarrow e)$. Zauważmy, że mamy następującą wzajemną odpowiedniość między $\mathfrak{X}_A$ i $\mathfrak{X}_{graph f}(\mathfrak{X}_A)$: dla $\Lambda$, $\Gamma \in \mathfrak{X}_{graph f}(\mathfrak{X}_A)$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ i dla $x \in \Gamma$ oraz ciągów $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$, $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$, mamy $\Gamma = graph f|_{\Gamma'}$, $\Lambda = graph f|_{\Lambda'}$, $x = (a, f(a))$, $x_\nu = (a_\nu, f(a_\nu))$ oraz $y_\nu = (b_\nu, f(b_\nu))$ z pewnymi $\Gamma', \Lambda' \in \mathfrak{X}_A$ takimi, że $\Gamma' \subset \overline{\Lambda'} \setminus \Lambda'$ oraz $a \in \Gamma'$ i ciągami $\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \in \Gamma'$, $\{b_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \in \Lambda'$. Zatem wystarczy zauważyć, że

$$d\left(\mathbb{R}(x_\nu - y_\nu), \{0\} \times \mathbb{R}^m\right) = \frac{|a_\nu - b_\nu|}{|(a_\nu, f(a_\nu)) - (b_\nu, f(b_\nu))|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{|f(a_\nu) - f(b_\nu)|}{|a_\nu - b_\nu|}\right)^2}}.$$

□

**Uwaga 2.1.3.** Odwzorowania słabo lipschitzowskie zostały po raz pierwszy wprowadzone przez J.-L. Verdiera jako *fonctions rugueuses* (zob. [**Ver**] 4.1). W niniejszej rozprawie jednak ze względu na odmienne zastosowania tych odwzorowań oraz ich korelacje z odwzorowaniami Lipschitza, będziemy posługiwać się nazwą „odwzorowania słabo lipschitzowskie".

## 2.2. Podstawowe własności i przykłady

Podamy teraz kilka faktów świadczących o tym, że słaba lipschitzowskość jest rzeczywiście pewnym uogólnieniem warunku Lipschitza.

**Obserwacja 2.2.1.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem lokalnie lipschitzowskim i załóżmy, że zbiór $A$ posiada stratyfikację $\mathfrak{X}_A$ klasy $C^q$ o tej własności, że dla dowolnych płatów $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$ restrykcja $f|_\Gamma$ jest odwzorowaniem klasy $C^q$. Wówczas $f$ jest słabo lipschitzowskie klasy $C^q$ na stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$.*

Dowód. Trywialny. □

W szczególności w strukturach o-minimalnych, w których zachodzi twierdzienie o rozkładzie komórkowym klasy $C^q$ mamy następujący

**Wniosek 2.2.2.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem definiowalnym. Wtedy dla dowolnego definiowalnego odwzorowania $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lokalnie lipschitzowskiego, istnieje definiowalna stratyfikacja $\mathfrak{X}_A$ klasy $C^q$ zbioru $A$ taka, że $f$ jest odwzorowaniem słabo lipschitzowskim klasy $C^q$ na $\mathfrak{X}_A$.*

Dalsze przykłady pokazują jednak, że słaba lipschitzowość jest zdecydowanie słabszą własnością od lokalnej lipschitzowości, także w przypadku definiowalnym.

**Przykład 2.2.3.** Niech $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = \Lambda \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ oraz $\mathfrak{X}_A = \{\Lambda, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, gdzie

$$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), \tfrac{1}{2}x^2 < y < x^2\}, \quad \Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), y = \tfrac{1}{2}x^2\}, \quad \Gamma_2 = \{(0, 0)\}.$$

Rozważmy odwzorowanie

$$f : A \ni (x, y) \longrightarrow (x, \sqrt{y}) \in \mathbb{R}^2.$$

Wówczas $f$ nie jest odwzorowaniem Lipschitza w żadnym otoczeniu punktu $(0, 0)$, gdyż norma pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f|_\Lambda}{\partial y}(x, y) = \left(0, \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$ jest nieograniczona. Pomimo to $f$ jest odwzorowaniem słabo lipschitzowskim kl. $C^q$ na $\mathfrak{X}_A$, bowiem $f$ jest lokalnie lipschitzowskie na zbiorze $A \setminus \{(0, 0)\}$ i dla dowolnego punktu $(x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}$

$$\frac{|f(x, y) - f(0, 0)|}{|(x, y) - (0, 0)|} = \sqrt{\frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}} \leqslant \sqrt{\frac{2x^2}{x^2}} \leqslant \sqrt{2}.$$

**Przykład 2.2.4.** Niech $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, $A = \Lambda \cup \Gamma$. Rozważmy odwzorowanie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ określone nastepującą formułą

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{y^7} - y^2\right)^2, & 0 < x^2 < y^9, \\ 0, & x^2 \geqslant y^9 \geqslant 0. \end{cases}$$

Wówczas $f$ jest słabo lipschitzowskie kl. $C^1$ na $\{\Lambda, \Gamma\}$. Istotnie, $f$ jest odwzorowaniem kl. $C^1$ na $A \setminus \{(0,0)\}$, zatem jest w szczególności lokalnym odwzorowaniem Lipschitza na zbiorze $A \setminus \{(0,0)\}$. Ponadto jeśli $(x,y) \in \Lambda$, $(x',0) \in \Gamma$ oraz $f(x,y) \neq 0$, wówczas

$$\frac{|f(x,y) - f(x',0)|}{|(x,y) - (x',0)|} = \frac{\left(\frac{x^2}{y^7} - y^2\right)^2}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \leqslant \frac{y^4}{y} = y^3.$$

Z drugiej strony $f$ nie może być odwzorowaniem Lipschitza w żadnym otoczeniu punktu $(0,0)$, bowiem

$$\left\| \frac{\partial f|_\Lambda}{\partial x} \left( \frac{y^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{3}}, y \right) \right\| = \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{y}} \longrightarrow +\infty,$$

gdy $y \longrightarrow 0$.

Omówimy teraz kilka elementarnych własności odwzorowań słabo lipschitzowskich, które odegrają ważną rolę w dowodzie twierdzenia 3.2.1 oraz twierdzenia 6.2.2.

**Obserwacja 2.2.5.** *Jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$, zaś $\mathfrak{X}_A$ jest stratyfikacją klasy $C^q$ zbioru $A$ i $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest słabo lipschitzowskie na $\mathfrak{X}_A$ klasy $C^q$, to $f$ jest ciągłe na zbiorze $A$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieją płaty $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{X}_A$, $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, punkt $a \in \Gamma$ oraz ciąg $\{b_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$, zbieżny do punktu $a$ i taki, że $f(b_\nu) \longrightarrow c$ $(\nu \longrightarrow +\infty)$, gdzie $c \neq f(a)$. Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że ciąg siecznych $L_\nu = \mathbb{R}((a, f(a)) - (b_\nu, f(b_\nu)))$, $\nu \in \mathbb{N}$ jest zbieżny do pewnej podprzestrzeni $L \in \mathbb{P}_{m+n-1}$. Wtedy $L \subset \{0\} \times \mathbb{R}(c - f(a)) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^m$, co daje sprzeczność z założeniem słabej lipschitzowości odwzorowania $f$ (zob. definicja 2.1.1 *e*)). □

**Obserwacja 2.2.6.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem słabo lipschitzowskim klasy $C^q$ na pewnej $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$ zbioru $A$. Niech $B$ będzie dowolnym podzbiorem $A$. Wówczas dla dowolnej $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_B$ zbioru $B$, zgodnej ze stratyfikacją $\mathfrak{X}_A$, odwozorwanie $f|_B$ jest słabo lipschitzowskie klasy $C^q$ na $\mathfrak{X}_B$.*

Dowód. Dzięki zgodności stratyfikacji $\mathfrak{X}_B$ ze stratyfikacją $\mathfrak{X}_A$ otrzymujemy, że $f|_\Gamma$ jest klasy $C^q$ dla $\Gamma \in \mathfrak{X}_B$. Warunek a) z definicji 2.1.1 przenosi się w sposób trywialny na stratyfikację $\mathfrak{X}_B$.

□

**Obserwacja 2.2.7.** *Niech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ będzie odwzorowaniem słabo lipschitzowskim klasy $C^q$ na $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$ zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ i niech $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^r$ będzie odwzorowaniem słabo lipschitzowskim klasy $C^q$ na pewnej $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_B$ zbioru $B \subset \mathbb{R}^p$. Załóżmy, że obraz poprzez odwzorowanie $f$ dowolnego płata z $\mathfrak{X}_A$ jest zawarty w pewnym płacie stratyfikacji $\mathfrak{X}_B$ (w szczególności $f(A) \subset B$). Wówczas złożenie $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}^r$ jest słabo lipschitzowskie klasy $C^q$ na $\mathfrak{X}_A$.*

Dowód. Dla dowolnego płata $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$ złożenie $g \circ f|_\Gamma$ jest odwzorowaniem klasy $C^q$. Niech $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{X}_A$ będą takimi płatami, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$. Ustalmy $a \in \Gamma$ i wybierzmy ciągi $\{a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$, $\{b_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ zbieżne do punktu $a$. Z ciągłości odwzorowania $f$ (por. obserwacja 2.2.5) wynikają zbieżności $f(a_\nu), f(b_\nu) \longrightarrow f(a)$ dla $\nu \longrightarrow +\infty$. Ponadto

$$\limsup_{\nu \to +\infty} \frac{|g \circ f(a_\nu) - g \circ f(b_\nu)|}{|a_\nu - b_\nu|} = \limsup_{\nu \to +\infty} \frac{|g \circ f(a_\nu) - g \circ f(b_\nu)|}{|f(a_\nu) - f(b_\nu)|} \cdot \frac{|f(a_\nu) - f(b_\nu)|}{|a_\nu - b_\nu|} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{\nu \to +\infty} \frac{|g \circ f(a_\nu) - g \circ f(b_\nu)|}{|f(a_\nu) - f(b_\nu)|} \cdot \limsup_{\nu \to +\infty} \frac{|f(a_\nu) - f(b_\nu)|}{|a_\nu - b_\nu|} < +\infty.$$

□

**Uwaga 2.2.8.** Zauważmy, że ostatnia obserwacja określa nową kategorię zbiorów z $C^q$ stratyfikacjami jako obiektami i odwzorowaniami słabo lipschitzowskimi klasy $C^q$ jako morfizmami w tej kategorii.

**Obserwacja 2.2.9.** *Niech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ będą odwzorowaniami słabo lipschitzowskimi klasy $C^q$ na $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$ zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas zestawienie*

$$(f, g) : A \ni x \longmapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$$

*jest odwzorowaniem słabo lipschitzowskim klasy $C^q$ na stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnych punktów $x, y \in A$, $x \neq y$ zachodzi nierówność

$$\frac{|(f(x), g(x)) - (f(y), g(y))|}{|x-y|} \leqslant \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|}.$$

□

**Obserwacja 2.2.10.** *Niech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^p$ będą odwzorowaniami słabo lipschitzowskimi klasy $C^q$ odpowiednio na $C^q$ stratyfikacjach $\mathfrak{X}_A$, $\mathfrak{X}_B$ zbiorów $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^s$. Wówczas odwzorowanie*

$$(f, g) : A \times B \ni (z', z'') \longmapsto (f(z'), g(z'')) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$$

*jest słabo lipschitzowskie kl. $C^q$ na $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_{A\times B} = \{\Lambda' \times \Lambda'' : \Lambda' \in \mathfrak{X}_A, \Lambda'' \in \mathfrak{X}_B\}$ zbioru $A \times B$.*

Dowód. Zauważmy, że teza wynika łatwo z następujących obserwacji. Niech $\Lambda \in \mathfrak{X}_{A\times B}$, $\Gamma \in \mathfrak{X}_{A\times B}$ będą takie, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$. Wtedy $\Lambda = \Lambda' \times \Lambda''$, $\Gamma = \Gamma' \times \Gamma''$ z pewnymi $\Lambda', \Gamma' \in \mathfrak{X}_A$, $\Lambda'', \Gamma'' \in \mathfrak{X}_B$, gdzie $\Gamma' \subset \overline{\Lambda'}$, $\Gamma'' \subset \overline{\Lambda''} \setminus \Lambda''$ albo $\Gamma' \subset \overline{\Lambda'} \setminus \Lambda'$, $\Gamma'' \subset \overline{\Lambda''}$. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnych punktów $(x', x'') \in \Gamma$, $(y', y'') \in \Lambda$:

- jeśli $x' = y'$, to $\Gamma' = \Lambda'$ oraz $\Gamma'' \subset \overline{\Lambda''} \setminus \Lambda''$ (sytuacja $x'' = y''$ jest analogiczna). Wtedy $x'' \neq y''$ i zachodzi nierówność

$$\frac{|(f(x'), g(y')) - (f(x''), g(y''))|}{|(x', x'') - (y', y'')|} = \frac{|g(x'') - g(y'')|}{|x'' - y''|}.$$

- jeśli $x' \neq y'$, $x'' \neq y''$, to zachodzi nierówność

$$\frac{|(f(x'), g(y')) - (f(x''), g(y''))|}{|(x', x'') - (y', y'')|} \leqslant \sqrt{\frac{|f(x') - f(y')|^2}{|x' - y'|^2} + \frac{|g(x'') - g(y'')|^2}{|x'' - y''|^2}}.$$

□

**Definicja 2.2.11.** Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$, zaś $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest zanurzeniem homeomorficznym, wówczas dla dowolnej $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$ zbioru $A$ takiej, że $f|_\Gamma$ jest zanurzeniem klasy $C^q$ dla dowolnego $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$, otrzymujemy naturalną $C^q$ stratyfikację obrazu $f(A)$

$$f\mathfrak{X}_A = \{f(\Gamma) : \quad \Gamma \in \mathfrak{X}_A\}.$$

W naturalny sposób pojawia się więc pojęcie odwzorowania słabo bi-lipschitzowskiego na ustalonej stratyfikacji. Mianowicie,

**Definicja 2.2.12.** Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolym zbiorem oraz $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dowolnym zanurzeniem homeomorficznym. Niech $\mathfrak{X}_A$ będzie $C^q$ stratyfikacją zbioru $A$ taką, że $f|_\Gamma$ jest zanurzeniem kl. $C^q$ dla dowolnego $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$. Powiemy, że odwzorowanie $f$ jest *słabo bi-lipschitzowskie klasy $C^q$ na $\mathfrak{X}_A$*, jeżeli $f$ jest słabo lipschitzowskie klasy $C^q$ na stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$ oraz $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ jest słabo lipschitzowskie klasy $C^q$ na stratyfikacji $f\mathfrak{X}_A$.

Na zakończenie tego rozdziału zauważmy, że przy badaniu słabej lipschitzowości odwzorowania odwrotnego możemy posługiwać się następującym równoważnym warunkiem $a'$).

**Obserwacja 2.2.13.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym podzbiorem i niech $\mathfrak{X}_A$ będzie stratyfikacją zbioru $A$ klasy $C^q$. Rozważmy zanurzenie homeomorficzne $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że dla dowolnego płata $\Gamma \in \mathfrak{X}_A$ restrykcja $f|_\Gamma$ jest zanurzeniem klasy $C^q$. Wówczas odwzorowanie $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ jest słabo lipschitzowskie klasy $C^q$ na stratyfikacji $f\mathfrak{X}_A$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek*

*a') dla dowolnych płatów $\Gamma, \Lambda \in \mathfrak{X}_A$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ oraz dla dowolnie ustalonego punktu $a \in \Gamma$, jeżeli $\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, $\{b_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ są ciągami punktów odpowiednio w $\Gamma$ i $\Lambda$, wtedy*

$$a_\nu, b_\nu \longrightarrow a \quad (\nu \to +\infty) \quad \Longrightarrow \quad \liminf_{\nu\to+\infty} \frac{|f(a_\nu) - f(b_\nu)|}{|a_\nu - b_\nu|} > 0.$$

Dowód. Wynika wprost z definicji 2.1.1 a). □

ROZDZIAŁ 3

# Klasa $\mathcal{WL}$ warunków regularności

Niniejszy rozdział jest poświęcony omówieniu pewnej wyróżnionej klasy warunków, które są w pewien sposób niezmienicze względem homeomorfizmów definiowalnych, lokalnie lipschitzowskich i słabo bilipschitzowskich (stąd też pochodzi nazwa klasy $\mathcal{WL}$, z ang. *weakly Lipschitz*). W rozdziałach 7 i 8 pokażemy, że do tej klasy należą w szczególności warunek Whitneya (B) oraz warunek Verdiera.

## 3.1. Warunki typu $\mathcal{WL}$

Niech $\mathcal{Q}$ będzie warunkiem pary $(\Lambda, \Gamma)$ w punkcie $x \in \Gamma$, gdzie $\Lambda, \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ są podrozmaitościami klasy $C^q$ i $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$. Takie warunki będziemy nazywać *warunkami regularności* lub krótko *warunkami.*

**Definicja 3.1.1.** Mówimy, że warunek $\mathcal{Q}$ jest *lokalny*, jeżeli dla dowolnego otwartego otoczenia $U$ punktu $x \in \Gamma$ para $(\Lambda, \Gamma)$ spełnia warunek $\mathcal{Q}$ w $x$ wtedy i tylko wtedy, gdy para $(\Lambda \cap U, \Gamma \cap U)$ spełnia warunek $\mathcal{Q}$ w punkcie $x$.

Od tej chwili rozważać będziemy wyłącznie warunki lokalne. Wprowadzamy następującą notację:

$\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma, x)$ = para $(\Lambda, \Gamma)$ spełnia warunek $\mathcal{Q}$ w punkcie $x \in \Gamma$.
$\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma)$ = dla dowolnego punktu $x \in \Gamma$ zachodzi $\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma, x)$.
$\sim \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma, x)$ = zaprzeczenie $\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma, x)$.

**Definicja 3.1.2.** Mówimy, że warunek $\mathcal{Q}$ jest *definiowalny*, jeżeli dla dowolnej pary definiowalnych $C^q$ podrozmaitości $\Gamma, \Lambda \subset \mathbb{R}^n$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, zbiór

$$\{x \in \Gamma : \quad \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma, x)\}$$

jest definiowalny.

**Definicja 3.1.3.** Powiemy, że warunek $\mathcal{Q}$ jest *generyczny*, jeżeli dla dowolnej pary definiowalnych podrozmaitości $\Lambda$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ klasy $C^q$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, zbiór

$$\{x \in \Gamma : \quad \sim \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma, x)\}$$

jest nigdziegęsty w $\Gamma$.

W naturalny sposób otrzymujemy pojęcie stratyfikacji z warunkiem $\mathcal{Q}$.

**Definicja 3.1.4.** Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem i $\mathfrak{X}_A$ będzie $C^q$ stratyfikacją zbioru $A$. Niech $\mathcal{Q}$ będzie ustalonym warunkiem regularności. Mówimy, że $\mathfrak{X}_A$ jest *stratyfikacją z warunkiem* $\mathcal{Q}$ (lub $\mathcal{Q}$ - *stratyfikacją*), jeżeli dla dowolnych płatów $\Lambda, \Gamma \subset \mathfrak{X}_A$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, zachodzi $\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma)$.

**Uwaga 3.1.5.** Zauważmy, że jeśli $\mathcal{Q}$ jest definiowalnym i generycznym warunkiem regularności, wówczas dla dowolnych dwóch definiowalnych $C^q$ podrozmaitości $\Lambda$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ oraz $\dim \Gamma = 0$, zachodzi $\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma)$.

**Twierdzenie 3.1.6.** *(Łojasiewicz-Stasica-Wachta) Niech $\mathcal{Q}$ będzie definiowalnym i generycznym warunkiem regularności i niech $r \in \mathbb{N}$. Wówczas dla dowolnej skończonej rodziny $\{A_i\}_{i \in I}$ podzbiorów definiowalnych w $\mathbb{R}^n$ istnieje definiowalna $C^q$ stratyfikacja $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}^n}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z warunkiem $\mathcal{Q}$, która jest zgodna z rodziną $\{A_i\}_{i \in I}$.*

DOWÓD. Schemat dowodu przy pomocy indukcji zstępującej, wykorzystujący generyczność i definiowalność warunku, został podany w pracy [**ŁSW**] Proposition 2 dla przypadku subanalitycznego i przenosi się bez zmian na przypadek definiowalny.

$\square$

**Wniosek 3.1.7.** *Niech $\mathcal{Q}$ będzie definiowalnym i generycznym warunkiem regularności. Jeżeli $\mathfrak{X}_A$ jest definiowalną $C^q$ stratyfikacją definiowalnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$, wówczas istnieje definiowalna $C^q$ stratyfikacja $\mathfrak{X}_A^{\mathcal{Q}}$ zbioru $A$ z warunkiem $\mathcal{Q}$ zgodna ze stratyfikacją $\mathfrak{X}_A$ i taka, że*

$$\left\{\Gamma' \in \mathfrak{X}_A^{\mathcal{Q}} : \quad \dim\Gamma' = \dim A\right\} = \{\Gamma \in \mathfrak{X}_A : \quad \dim\Gamma = \dim A\}.$$

Dowód. Zauważmy, że korzystając z twierdzenia 3.1.6, w procesie „poprawiania” danej stratyfikacji definiowalnej $\mathfrak{X}_A$ do stratyfikacji $\mathfrak{X}_A^{\mathcal{Q}}$ z warunkiem $\mathcal{Q}$ przy pomocy indukcji zstępującej, wystarczy dokonać rozdrobnień (substratyfikacji) tylko tych płatów stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$, których wymiar jest mniejszy niż wymiar zbioru $A$. □

**Definicja 3.1.8.** Powiemy, że warunek $\mathcal{Q}$ jest *niezmienniczy względem dyfeomorfizmów klasy $C^q$* (lub *$C^q$ niezmienniczy*), jeżeli dla dowolnych otwartych podzbiorów $U, W \subset \mathbb{R}^n$ oraz $C^q$ dyfeomorfizmu $\phi : U \longrightarrow W$ i dla dowolnych $C^q$ podrozmaitości $\Lambda, \Gamma \subset U$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ oraz dla dowolnego punktu $x \in \Gamma$

$$\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma, x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\phi(\Lambda), \phi(\Gamma), \phi(x)).$$

Obszar rozważań zawężamy odtąd do warunków definiowalnych, generycznych i niezmienniczych względem definiowalnych $C^q$ dyfeomorfizmów. Warunki regularności należące do klasy $\mathcal{WL}$ posiadają jeszcze dwie dodatkowe cechy.

**Definicja 3.1.9.** Powiemy, że warunek $\mathcal{Q}$ ma *własność rzutowania względem odwzorowań słabo lipschitzowskich klasy $C^q$*, jeżeli dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ oraz odwzorowania $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ słabo lipschitzowskiego klasy $C^q$ na $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$ zbioru $A$, zachodzi następująca implikacja

$$\mathfrak{X}_{graph\ f}(\mathfrak{X}_A) \text{ jest } \mathcal{Q}\text{ - stratyfikacją} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{X}_A \text{ jest } \mathcal{Q}\text{ - stratyfikacją.}$$

Czasami wygodniej będzie korzystać z następującej równoważnej definicji własności rzutowania:

Niech $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będą naturalnymi projekcjami. Powiemy, że warunek $\mathcal{Q}$ ma własność rzutowania względem odwzorowań słabo lipschitzowskich klasy $C^q$, jeżeli dla dowolnego zbioru $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ oraz $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_E$ zbioru $E$ takich, że $\pi_1|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest zanurzeniem homeomorficznym oraz $\pi_1|_\Gamma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest zanurzeniem kl. $C^q$ dla dowolnego $\Gamma \in \mathfrak{X}_E$ i odwzorowanie $\pi_2|_E \circ (\pi_1|_E)^{-1}$ jest słabo lipschitzowskie kl. $C^q$ na stratyfikacji $\pi_1\mathfrak{X}_E$, zachodzi następująca implikacja :

$$\mathfrak{X}_E \text{ jest } \mathcal{Q}\text{ - stratyfikacją} \quad \Longrightarrow \quad \pi_1\mathfrak{X}_E \text{ jest } \mathcal{Q}\text{ - stratyfikacją.}$$

**Uwaga 3.1.10.** Na mocy obserwacji 2.2.7 oraz 2.2.9 własność słabej lipschitzowości klasy $C^q$ odwzorowania $\pi_2|_E \circ (\pi_1|_E)^{-1}$ na stratyfikacji $\pi_1\mathfrak{X}_E$ jest równoważna własności słabej bi-lipschitzowości klasy $C^q$ odwzorowania $\pi_1|_E$ na stratyfikacji $\mathfrak{X}_E$.

Następująca obserwacja jest prostą konsekwencją powyższych definicji.

**Obserwacja 3.1.11.** *Niech $\mathcal{Q}$ będzie warunkiem regularności mającym własność rzutowania względem odwzorowań słabo lipschitzowskich klasy $C^q$. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem słabo lipschitzowskim klasy $C^q$ na $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_A$ zbioru $A$. Wówczas dla dowolnych $C^q$ podrozmaitości $\Gamma, \Lambda \subset graph f$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, $\dim\Gamma < \dim\Lambda$[1] oraz rodzina $\{\Lambda, \Gamma\}$ jest zgodna ze stratyfikacją $\mathfrak{X}_{graph f}(\mathfrak{X}_A)$, zachodzi implikacja*

$$\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\pi_1(\Lambda), \pi_1(\Gamma)),$$

*gdzie $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest naturalnym rzutowaniem.*

Drugą istotną cechą warunków typu $\mathcal{WL}$ jest własność podniesienia względem odwzorowań lokalnie lipschitzowskich.

**Definicja 3.1.12.** Powiemy, że warunek $\mathcal{Q}$ ma *własność podniesienia względem odwzorowań lokalnie lipschitzowskich klasy $C^q$*, jeżeli dla dowolnych dwóch $C^q$ podrozmaitości $\Lambda, \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ oraz dla dowolnego odwzorowania $f : \Lambda \cup \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lokalnie lipschitzowskiego i takiego, że restrykcje

[1]Zakładamy $\dim\Gamma < \dim\Lambda$, aby rodzina $\{\Lambda, \Gamma\}$ była stratyfikacją zbioru $\Lambda\cup\Gamma$. W przypadku definiowalnym nierówność ta wynika z inkluzji $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$.

$f|_\Lambda$, $f|_\Gamma$ są odwzorowaniami klasy $C^q$ i dla dowolnej pary $C^q$ podrozmaitości $M, N \subset \Lambda \cup \Gamma$ takich, że $N \subset \overline{M} \setminus M$ i rodzina $\{M, N\}$ jest zgodna z $\{\Lambda, \Gamma\}$, zachodzi implikacja

$$\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(M, N), \quad \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(graphf|_\Lambda, graphf|_\Gamma) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(graphf|_M, graphf|_N).$$

Równoważnie, jeśli $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ są naturalnymi rzutowaniami, wówczas warunek $\mathcal{Q}$ ma własność podniesienia względem odwzorowań lokalnie lipschitzowskich klasy $C^q$, jeżeli dla dowolnych dwóch $C^q$ podrozmaitości $\Lambda, \Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ oraz odwzorowanie $\pi_1|_{\Lambda \cup \Gamma}$ jest zanurzeniem homeomorficznym, restrykcje $\pi_1|_\Lambda$, $\pi_1|_\Gamma$ są zanurzeniami klasy $C^q$ i odwzrowanie $\pi_2|_{\Lambda\cup\Gamma} \circ (\pi_1|_{\Lambda\cup\Gamma})^{-1} : \pi_1(\Lambda) \cup \pi_1(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest lokalnie lipschitzowskie, zachodzi następująca implikacja

dla dowolnych $C^q$ podrozmaitości $M, N \subset \mathbb{R}^n$ takich, że $N \subset \overline{M} \setminus M$ zachodzi

$i)$ $\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(M, N),\ \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\Lambda, \Gamma),\ M \subset \pi_1(\Lambda),\ N \subset \pi_1(\Gamma), \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}\left((M \times \mathbb{R}^m) \cap \Lambda, (N \times \mathbb{R}^m) \cap \Gamma\right)$
$ii)$ $\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(M, N),\ M, N \subset \pi_1(\Lambda) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}((M \times \mathbb{R}^m) \cap \Lambda, (N \times \mathbb{R}^m) \cap \Lambda)$
$iii)$ $\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(M, N),\ M, N \subset \pi_1(\Gamma) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}((M \times \mathbb{R}^m) \cap \Gamma, (N \times \mathbb{R}^m) \cap \Gamma).$

**Uwaga 3.1.13.** Jeżeli warunek $\mathcal{Q}$ jest niezmienniczy względem dyfeomorfizmów klasy $C^q$, wówczas implikacje $ii)$ oraz $iii)$ zachodzą trywialnie.

Mając powyższe własności, możemy już zdefiniować szukaną klasę warunków typu $\mathcal{WL}$.

**Definicja 3.1.14.** Powiemy, że warunek regularności $\mathcal{Q}$ jest *warunkiem typu $\mathcal{WL}$ klasy $C^q$* (lub *$\mathcal{WL}$ warunkiem klasy $C^q$*), jeżeli jest on
- definiowalny ;
- generyczny ;
- niezmienniczy względem $C^q$ dyfeomorfizmów ;
- ma własność rzutowania względem odwzorowań słabo lipschitzowskich klasy $C^q$ ;
- ma własność podniesienia względem odwzorowań lokalnie lipschitzowskich klasy $C^q$.

## 3.2. Twierdzenie o niezmienniczości w klasie $\mathcal{WL}$

Celem tego rozdziału jest pokazanie, że warunek regularności typu $\mathcal{WL}$ może być przenoszony poprzez definiowalny homeomorfizm lokalnie lipschitzowski, słabo bi-lipschitzowski, o ile zostanie dokonane odpowiednie rozdrobnienie stratyfikacji dziedziny. Istotną rolę (z punktu widzenia dowodu twierdzenia 5.2.2) odgrywa fakt, iż to rozdrobnienie nie obejmuje płatów najwyższego wymiaru wyjściowej stratyfikacji dziedziny.

**Twierdzenie 3.2.1.** *(Niezmienniczość klasy $\mathcal{WL}$ względem definiowalnych homeomorfizmów lokalnie lipschitzowskich, słabo bi-lipschitzowskich) Niech $\mathcal{Q}$ będzie $\mathcal{WL}$ warunkiem klasy $C^q$. Rozważmy definiowalny zbiór $B \subset \mathbb{R}^n$ oraz definiowalne zanurzenie homeomorficzne $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$, słabo bi-lipschitzowskie klasy $C^q$ na pewnej definiowalnej $C^q$ stratyfikacji $\mathfrak{X}_B$ zbioru $B$. Załóżmy ponadto, że dla każdej pary płatów $\Lambda$, $\Gamma \in \mathfrak{X}_B$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, restrykcja $f|_{\Lambda\cup\Gamma}$ jest lokalnie lipschitzowska.*

*Wówczas istnieje definiowalna $C^q$ stratyfikacja $\mathfrak{X}'_B$ zbioru $B$, zgodna ze stratyfikacją $\mathfrak{X}_B$ i taka, że*

$$\{\Gamma \in \mathfrak{X}_B : \quad \dim \Gamma = \dim B\} = \{\Gamma' \in \mathfrak{X}'_B : \quad \dim \Gamma' = \dim B\}$$

*oraz warunek $\mathcal{Q}$ jest niezmienniczy względem pary $(f, \mathfrak{X}'_B)$ w następującym sensie:*

*jeśli $M, N \subset B$ są definiowalnymi podrozmaitościami $\mathbb{R}^n$ klasy $C^q$ takimi, że $N \subset \overline{M} \setminus M$ i rodzina $\{M, N\}$ jest zgodna z $\mathfrak{X}'_B$, wówczas*

$$\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(M, N) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(f(M), f(N)).$$

Dowód. Niech $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będą naturalnymi rzutowaniami. Rozważmy wykres $graphf \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ oraz jego definiowalną stratyfikację klasy $C^q$

$$\mathfrak{X}_{graphf}(\mathfrak{X}_B) = \{graphf|_\Gamma : \ \Gamma \in \mathfrak{X}_B\}.$$

Na mocy twierdzenia 3.1.7 znajdujemy definiowalną $C^q$ stratyfikację $\mathfrak{X}^{\mathcal{Q}}_{graphf}(\mathfrak{X}_B)$ z warunkiem $\mathcal{Q}$ zbioru $graphf$, która jest zgodna ze stratyfikacją $\mathfrak{X}_{graphf}(\mathfrak{X}_B)$ oraz

$$\left\{\Gamma' \in \mathfrak{X}^{\mathcal{Q}}_{graphf}(\mathfrak{X}_B) : \quad \dim \Gamma' = \dim B\right\} = \{\Gamma \in \mathfrak{X}_{graphf}(\mathfrak{X}_B) : \quad \dim \Gamma = \dim B\}.$$

Pokażemy, że rodzina

$$\mathfrak{X}'_B = \left\{ \pi_1(\Lambda) : \ \Lambda \in \mathfrak{X}^{\mathcal{Q}}_{graph f}(\mathfrak{X}_B) \right\}$$

spełnia warunki tezy. Zauważmy najpierw, że $\mathfrak{X}'_B$ jest istotnie definiowalną $C^q$ stratyfikacją zbioru $B$, zgodną z $\mathfrak{X}_B$ i taką, że

$$\{\Gamma \in \mathfrak{X}_B : \ \dim \Gamma = \dim B\} = \{\Lambda \in \mathfrak{X}'_B : \ \dim \Lambda = \dim B\}.$$

Fakt ten wynika bezpośrednio ze zgodności stratyfikacji $\mathfrak{X}^{\mathcal{Q}}_{graph f}(\mathfrak{X}_B)$ z $\mathfrak{X}_{graph f}(\mathfrak{X}_B)$ oraz z tego, iż rzutowanie $\pi_1|_{graph f}$ jest definiowalnym homeomorfizmem na zbiór $B$ i definiowalnym zanurzeniem klasy $C^q$ w restrykcji do każdego płata stratyfikacji $\mathfrak{X}_{graph f}(\mathfrak{X}_B)$.

Zauważmy teraz, że dla dowolnych dwóch płatów $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{X}'_B$ takich, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, odwzorowanie $f|_{\Lambda \cup \Gamma}$ jest nadal odwzorowaniem lokalnie lipschitzowskim, co zachodzi dzięki zgodności $\mathfrak{X}'_B$ z $\mathfrak{X}_B$.

Również dzięki zgodności stratyfikacji $\mathfrak{X}'_B$ ze stratyfikacją $\mathfrak{X}_B$ otrzymujemy zgodność stratyfikacji $f\mathfrak{X}'_B$ z $f\mathfrak{X}_B$. Zatem na mocy obserwacji 2.2.6 odwzorowanie $f$ jest słabo bi-lipschitzowskie klasy $C^q$ na stratyfikacji $\mathfrak{X}'_B$.

Rozważmy teraz parę definiowalnych podrozmaitości $M, \ N \subset B$ klasy $C^q$ takich, że $N \subset \overline{M} \setminus M$ i rodzina $\{M, N\}$ jest zgodna ze stratyfikacją $\mathfrak{X}'_B$. Załóżmy ponadto, że zachodzi $\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(M, N)$. Wówczas należy rozważyć dwa przypadki:

I. Istnieje płat $\Lambda \in \mathfrak{X}'_B$ taki, że $M, N \subset \Lambda$. W tej sytuacji, ponieważ $f|_\Lambda$ jest definiowalnym dyfeomorfizmem klasy $C^q$ na $f(\Lambda)$, zatem dzięki niezmienniczości warunku $\mathcal{Q}$ względem definiowalnych $C^q$ dyfeomorfizmów musi zachodzić $\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(f(M), f(N))$.

II. Istnieje para płatów $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{X}'_B$ taka, że $N \subset \Gamma$, $M \subset \Lambda$. Wówczas musi być $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ i restrykcja $f|_{\Lambda \cup \Gamma}$ jest nadal odwzorowaniem lokalnie lipschitzowskim. Na mocy konstrukcji $\mathfrak{X}^{\mathcal{Q}}_{graph\ f}(\mathfrak{X}_B)$ mamy $\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(graph f|_\Lambda, graph f|_\Gamma)$. Wobec własności podniesienia warunku $\mathcal{Q}$ względem odwzorowań lokalnie lipschitzowskich musi więc zachodzić

$$\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(graph f|_M, graph f|_N).$$

Z drugiej strony wykazaliśmy wcześniej, że odwzorowanie $f^{-1} : f(B) \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ jest definiowalnym zanurzeniem homeomorficznym, słabo lipschitzowskim klasy $C^q$ na stratyfikacji $\{f(\Lambda), f(\Gamma)\}$. Zauważmy ponadto, że

$$graph f^{-1}|_{f(M)} = \phi\left(graph f|_M\right), \qquad graph f^{-1}|_{f(N)} = \phi\left(graph f|_N\right),$$

gdzie

$$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (x, y) \longmapsto (y, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

jest liniową zmianą układu współrzędnych. Zatem wykresy odwzorowań $f|_M$ oraz $f^{-1}|_{f(M)}$, a także odwzorowań $f|_N$ oraz $f^{-1}|_{f(N)}$, są tożsame jako podzbiory $\mathbb{R}^{n+m}$. Dzięki własności rzutowania warunku $\mathcal{Q}$ względem odwzorowań słabo lipschitzowskich (zastosowanej teraz do odwzorowania $f^{-1}$) otrzymujemy

$$\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(\pi_2(graph f|_M), \pi_2(graph f|_N)).$$

Ale $\pi_2(graph f|_M) = f(M)$, $\pi_2(graph f|_N)) = f(N)$, zatem otrzymaliśmy dokładnie tezę.

□

**Wniosek 3.2.2.** *(z dowodu twierdzenia 3.2.1) Otrzymana w tezie stratyfikacja $\mathfrak{X}'_B$ zbioru $B$ oraz stratyfikacja $f\mathfrak{X}'_B$ są także $\mathcal{Q}$ - stratyfikacjami.*

ROZDZIAŁ 4

# Twierdzenie Guillaume Valette o homeomorfizmie bi-lipschitzowskim

## 4.1. Regularne rodziny hiperpowierzchni i homeomorfizmy bi-lipschitzowskie

Przypomnimy wybrane pojęcia z pracy [**Val**] i twierdzenie o bi-lipschitzowskim, definiowalnym homeomorfizmie, przekształcającym nigdziegęsty zbiór definiowalny na zbiór o kierunku regularnym. Celem tego rodziału jest rozwinięcie formuły indukcyjnej owego homeomorfizmu i wykonanie takiej definiowalnej $C^q$ stratyfikacji przestrzeni $\mathbb{R}^n$, na płatach której ów homeomorfizm będzie zanurzeniem klasy $C^q$. Stosujemy w tym rodziale w większości oryginalną notację z pracy [**Val**].

**Definicja 4.1.1.** Jeśli $\lambda \in \mathbb{S}^n$, to $\pi_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow N_\lambda$ jest rzutowaniem ortogonalnym na podprzestrzeń $N_\lambda$ prostopadłą do wektora $\lambda$, natomiast liczba $q_\lambda$ jest współrzędną wektora $q \in \mathbb{R}^{n+1}$, równoległą do $\lambda$. Wówczas $\pi_\lambda = \pi_{N_\lambda}$ i dla dowolnego $q \in \mathbb{R}^{n+1}$ mamy przedstawienie $q = \pi_\lambda(q) + q_\lambda \cdot \lambda$.

**Definicja 4.1.2.** Niech $\lambda \in \mathbb{S}^n$ zaś $A'$, $A$ będą ustalonymi podzbiorami $\mathbb{R}^{n+1}$ oraz $A' \subset N_\lambda$. Rozważmy funkcję $\xi : A' \to \mathbb{R}$. Powiemy, że zbiór $A$ jest *wykresem funkcji $\xi$ względem wektora* $\lambda$, jeżeli

$$A = \{q \in \mathbb{R}^{n+1} |\ \ \pi_\lambda(q) \in A' \ \text{ oraz } \ q_\lambda = \xi(\pi_\lambda(q))\}.$$

**Definicja 4.1.3.** Niech $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Załóżmy, że $H$ jest wykresem pewnej funkcji $\xi : N_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ względem ustalonego wektora jednostowego $\lambda \in \mathbb{S}^n$. Wówczas *podwykresem zbioru $H$ względem wektora* $\lambda$ nazywamy zbiór

$$E(H, \lambda) = \{q \in \mathbb{R}^{n+1} :\ q_\lambda \leqslant \xi(\pi_\lambda(q))\}.$$

**Definicja 4.1.4.** *Regularną rodziną hiperpowierzchni w* $\mathbb{R}^{n+1}$ nazywać będziemy skończoną rodzinę $H = \{(H_k; \lambda_k)\}_{k=1,\dots,b}$, gdzie $b \in \mathbb{N}$, złożoną z definiowalnych podzbiorów $H_k \subset \mathbb{R}^{n+1}$ oraz wektorów $\lambda_k \in \mathbb{S}^n$, $k = 1, ..., b$ o własnosciach takich, że dla wszystkich $k = 1, ..., b-1$ zachodzą związki:

($i$) Zbiory $H_k$, $H_{k+1}$ są odpowiednio wykresami względem wektora $\lambda_k$ dwóch funkcji lipschitzowskich $\xi_k$, $\xi'_k$ i ponadto w układzie współrzędnych $N_{\lambda_k} \oplus \mathbb{R}\lambda_k$ zachodzi nierówność $\xi_k \leqslant \xi'_k$.

($ii$) $E(H_{k+1}; \lambda_k) = E(H_{k+1}; \lambda_{k+1})$.

**Definicja 4.1.5.** Niech $A$ będzie definiowalnym podzbiorem $\mathbb{R}^{n+1}$ o pustym wnętrzu. Mówimy, że regularna rodzina hiperpowierzchni $H = \{(H_k, \lambda_k)\}_{k=1,\dots,b}$ jest *zgodna ze zbiorem* $A$, jeżeli $A \subset \bigcup_{k=1}^{b} H_k$.

W roku 2005 Guilliaume Valette udowodnił następujące dwa twierdzenia

**Twierdzenie 4.1.6.** *Dla dowolnego definiowalnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o pustym wnętrzu istnieje regularna rodzina hiperpowierzchni w $\mathbb{R}^{n+1}$, zgodna ze zbiorem $A$.*

Dowód. Zob. [**Val**], Proposition 3.10. □

**Twierdzenie 4.1.7.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem definiowalnym o pustym wnętrzu. Wówczas istnieje definiowalny, bi-lipschitzowski homeomorfizm $\widetilde{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o tej własności, że zbiór $\widetilde{h}(A)$ posiada kierunek regularny $e_n = (0, ..., 0, 1)$.*

Dowód. Przypomnimy zarys dowodu Propozycji 3.13, [**Val**], gdyż w dalszym ciągu będziemy się odwoływać do niektórych jego fragmentów. Stosujemy najpierw twierdzenie 4.1.6, znajdując regularną rodzinę hiperpowierzchni $H = \{(H_k, \lambda_k)\}_{k=1,\dots,b}$ zgodną ze zbiorem $A$. Na bazie tej rodziny określamy w sposób indukcyjny szukany homeomorfizm $\widetilde{h} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ w ten sposób, aby dla dowolnego $k = 1, ..., b$

$$(\mathfrak{F}0) \quad \begin{array}{l} i)\ \widetilde{h}(H_k) = F_k, \text{ gdzie } F_k \text{ jest wykresem funkcji lipschitzowskiej } \eta_k : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ względem } e_n, \\ ii)\ \widetilde{h}(E(H_k, \lambda_k)) = E(F_k, e_n). \end{array}$$

Poniżej przedstawiamy formułę indukcyjną homeomorfizmu $\widetilde{h}$ :

Dla $k = 1$ niech $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie izometrią liniową taką, że $\phi(N_{\lambda_1}) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ oraz $\phi(\lambda_1) = e_n$. Wtedy

$$(\mathfrak{F}1) \qquad \widetilde{h}|_{E(H_1,\lambda_1)} := \phi|_{E(H_1,\lambda_1)}.$$

Dla $k = 1, ..., b-1$ rozważmy $q \in E(H_{k+1}, \lambda_{k+1}) \setminus E(H_k, \lambda_k)$. Wówczas

$$q = u + \xi_k(u) \cdot \lambda_k + \tau \cdot (\xi'_k(u) - \xi_k(u)) \cdot \lambda_k$$

z jedynym punktem $u \in N_{\lambda_k}$ oraz $\tau \in (0, 1]$. Wtedy

$$(\mathfrak{F}2) \qquad \widetilde{h}(q) := \widetilde{h}(u + \xi_k(u) \cdot \lambda_k) + \tau \cdot (\xi'_k(u) - \xi_k(u)) \cdot e_n.$$

Dodatkowo dla $q \in \mathbb{R}^n \setminus E(H_b, \lambda_b)$ mamy reprezentację $q = u + \xi_b(u) \cdot \lambda_b + \tau \cdot \lambda_b$ z jedynym punktem $u \in N_{\lambda_b}$ oraz $\tau \in (0, +\infty)$. Definiujemy

$$(\mathfrak{F}2') \qquad \widetilde{h}(q) := \widetilde{h}(u + \xi_b(u) \cdot \lambda_b) + \tau \cdot e_n.$$

W dowodzie Proposition 3.13 [**Val**] podano także formułę indukcyjną na odwzorowania $\eta_k$. Mianowicie, gdy $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ oraz $k = 1, ..., b-1$, wtedy

$$(\mathfrak{F}3) \qquad \eta_{k+1}(z) := \eta_k(z) + (\xi'_k - \xi_k) \circ \pi_{\lambda_k} \circ \widetilde{h}^{-1}(z + \eta_k(z) \cdot e_n).$$

□

**Uwaga 4.1.8.** W oryginalnym dowodzie Proposition 3.13 [**Val**] znalazła się niewielka literówka. Otóż w pracy [**Val**] napisane jest, że dla $q \in \mathbb{R}^{n-1}$, $k = 1, ..., b-1$:

$$\eta_{k+1}(q) = \eta_k \circ \pi_{e_n}(q) + (\xi'_k - \xi_k) \circ \pi_{\lambda_k} \circ \widetilde{h}^{-1}(q; \eta_k \circ \pi_{e_n}(q)).$$

Ponieważ w tym przypadku $\pi_{e_n}(q) = q$, zatem w istocie

$$\eta_{k+1}(q) = \eta_k(q) + (\xi'_k - \xi_k) \circ \pi_{\lambda_k} \circ \widetilde{h}^{-1}(q; \eta_k(q)),$$

który to zapis jest równoważmy formule $(\mathfrak{F}3)$.

**Lemat 4.1.9.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem definiowalnym o pustym wnętrzu i odwzorowanie $\widetilde{h} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie definiowalnym, bi-lipschitzowskim homeomorfizmem otrzymanym dla zbioru $A$ poprzez formuły $(\mathfrak{F}0) - (\mathfrak{F}3)$ w twierdzeniu 4.1.7. Istnieje wówczas skończona rodzina definiowalnych, bi-lipschitzowskich homeomorfizmów $\psi_{0k} : N_{\lambda_k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $k = 1, ..., b$ takich, że*

*a)* $\forall_{k=1,...,b}\ \forall u \in N_{\lambda_k} \quad \widetilde{h}(u + \xi_k(u) \cdot \lambda_k) = \psi_{0k}(u) + \eta_k(\psi_{0k}(z)) \cdot e_n$

*b)* $\forall u \in N_{\lambda_1}\ \forall \tau \in (-\infty; 0] \quad \widetilde{h}(u + \xi_1(u) \cdot \lambda_1 + \tau \cdot \lambda_1) = \psi_{01}(u) + \eta_1(\psi_{01}(u)) \cdot e_n + \tau \cdot e_n.$

*c)* $\forall_{k=1,...,b-1}\ \forall u \in N_{\lambda_k}, \tau \in (0, 1] \quad \widetilde{h}(u + \xi_k(u) \cdot \lambda_k + \tau \cdot (\xi'_k(u) - \xi_k(u)) \cdot \lambda_k) =$
$= \psi_{0k}(u) + \eta_k(\psi_{0k}(u)) \cdot e_n + \tau\, (\eta_{k+1}(\psi_{0k}(u)) - \eta_k(\psi_{0k}(u))) \cdot e_n$

*d)* $\forall u \in N_{\lambda_b}\ \forall \tau \in (0, +\infty) \quad \widetilde{h}(u + \xi_b(u) \cdot \lambda_b + \tau \cdot \lambda_b) = \psi_{0b}(u) + \eta_b(\psi_{0b}(u)) \cdot e_n + \tau \cdot e_n.$

Dowód. *a)* Niech $k = 1, ..., b$. Z formuły $(\mathfrak{F}0)$ *i)* otrzymujemy, że dla dowolnego $u \in N_{\lambda_k}$

$$\widetilde{h}(u + \xi_k(u) \cdot \lambda_k) = z + \eta_k(z) \cdot e_n$$

z pewnym $z \in \mathbb{R}^{n-1}$. Ponieważ $\pi_{\mathbb{R}^{n-1}}|_{F_k} = (id_{\mathbb{R}^{n-1}}, \eta_k)^{-1}$, zatem mamy

$$z = (id_{\mathbb{R}^{n-1}}, \eta_k)^{-1} \circ \widetilde{h}|_{H_k} \circ (id_{N_{\lambda_k}}, \xi_k)(u)$$

i definiujemy odwozorwanie $\psi_{0k} : N_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ w następujący sposób:

$$(\mathfrak{F}4) \qquad \psi_{0k} = (id_{\mathbb{R}^{n-1}}, \eta_k)^{-1} \circ \widetilde{h}|_{H_k} \circ (id_{N_{\lambda_k}}, \xi_k).$$

Wtedy $\psi_{0k}$ jest definiowalnym i bi-lipschitzowskim homeomorfizmem (jako złożenie definiowalnych, bi-lipschitzowskich homeomorfizmów) takim, że dla $k = 1, ..., b$, $u \in N_{\lambda_k}$ zachodzi

$$(\mathfrak{F}5) \qquad \widetilde{h}(u + \xi_k(u) \cdot \lambda_k) = \psi_{0k}(u) + \eta_k(\psi_{0k}(z)) \cdot e_n.$$

$b)$ Zauważmy, że z formuły ($\mathfrak{F}1$) wynika, iż dla dowolnego $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ mamy

$$\eta_1(z) = \xi_1 \circ \phi^{-1}(z).$$

Wówczas dzięki ($\mathfrak{F}1$) oraz ($\mathfrak{F}4$) otrzymujemy $\psi_{01} = \phi|_{N_{\lambda_1}}$ i dla dowolnych $u \in N_{\lambda_1}$, $\tau \in (-\infty; 0]$

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(u + \xi_1(u) \cdot \lambda_1 + \tau \cdot \lambda_1) &= \phi(u + \xi_1(u) \cdot \lambda_1 + \tau \cdot \lambda_1)\\ &= \phi(u) + \xi_1(u) \cdot e_n + \tau \cdot e_n = \psi_{01}(u) + \xi_1 \circ \psi_{01}^{-1} \circ \psi_{01}(u) \cdot e_n + \tau \cdot e_n\\ &= \psi_{01}(u) + \eta_1(\psi_{01}(u)) \cdot e_n + \tau \cdot e_n.\end{aligned}$$

$c)$ Na mocy ($\mathfrak{F}3$) i ($\mathfrak{F}4$) dostajemy, iż dla dowolnego $k = 1, ..., b-1$, $z \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$(\mathfrak{F}3') \qquad \eta_{k+1}(z) = \eta_k(z) + (\xi'_k \circ \psi_{0k}^{-1}(z) - \xi_k \circ \psi_{0k}^{-1}(z)).$$

Wówczas dla $k = 1, ..., b-1$ oraz $u \in N_{\lambda_k}$, $\tau \in (0, 1]$ mamy

$$\begin{aligned}&\widetilde{h}(u + \xi_k(u) \cdot \lambda_k + \tau \cdot (\xi'_k(u) - \xi_k(u)) \cdot \lambda_k) =\\ &= \widetilde{h}(u + \xi_k(u) \cdot \lambda_k) + \tau \cdot (\xi'_k(u) - \xi_k(u)) \cdot e_n\\ &\overset{(\mathfrak{F}5)}{=} \psi_{0k}(u) + \eta_k(\psi_{0k}(u)) \cdot e_n + \tau \cdot (\xi'_k(u) - \xi_k(u)) \cdot e_n\\ &\overset{(\mathfrak{F}3')}{=} \psi_{0k}(u) + \eta_k(\psi_{0k}(u)) \cdot e_n + \tau \cdot (\eta_{k+1}(\psi_{0k}(u)) - \eta_k(\psi_{0k}(u))) \cdot e_n.\end{aligned}$$

$d)$ Niech $u \in N_{\lambda_b}$, $\tau \in (0, +\infty)$. Wtedy

$$\widetilde{h}(u + \xi_b(u) \cdot \lambda_b + \tau \cdot \lambda_b) = \widetilde{h}(u + \xi_b(u) \cdot \lambda_b) + \tau \cdot e_n \overset{(\mathfrak{F}5)}{=} \psi_{0b}(u) + \eta_b(\psi_{0b}(u)) \cdot e_n + \tau \cdot e_n.$$

□

Jako natychmiastowy wniosek otrzymujemy postać $\widetilde{h}^{-1}$.

**Wniosek 4.1.10.** *Przy założeniach takich, jak w lemacie 4.1.9 otrzymujemy, że*

$a)$ $\forall_{k=1,...,b}\ \forall z \in \mathbb{R}^{n-1} \qquad \widetilde{h}^{-1}(z + \eta_k(z) \cdot e_n) = \psi_{0k}^{-1}(z) + \xi_k \circ \psi_{0k}^{-1}(z) \cdot \lambda_k$

$b)$ $\forall_{k=1,...,b-1}\ \forall z \in \mathbb{R}^{n-1}, \tau \in (0, 1] \quad \widetilde{h}^{-1}(z + \eta_k(z) \cdot e_n + \tau \cdot (\eta_{k+1}(z) - \eta_k(z)) \cdot e_n) =$

$$= \psi_{0k}^{-1}(z) + \xi_k \circ \psi_{0k}^{-1}(z) \cdot \lambda_k + \tau \cdot (\eta_{k+1}(z) - \eta_k(z)) \cdot \lambda_k\ ;$$

$c)$ $\forall z \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tau \in (0, +\infty) \quad \widetilde{h}^{-1}(z + \eta_b(z) \cdot e_n + \tau \cdot e_n) = \psi_{0b}^{-1}(z) + \xi_b \circ \psi_{0b}^{-1}(z) \cdot \lambda_b + \tau \cdot \lambda_b.$

$d)$ $\forall z \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tau \in (-\infty, 0] \quad \widetilde{h}^{-1}(z + \eta_1(z) \cdot e_n + \tau \cdot e_n) = \psi_{01}^{-1}(z) + \xi_1 \circ \psi_{01}^{-1}(z) \cdot \lambda_1 + \tau \cdot \lambda_1.$

Dysponując powyższymi obserwacjami możemy już udowodnić wzmocnioną wersję twierdzenia 4.1.7.

**Twierdzenie 4.1.11.** *Niech $C \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem definiowalnym o pustym wnętrzu, $D_1, ..., D_s$ będą definiowalnymi podzbiorami $C$. Wówczas istnieje $\widetilde{h} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definiowalny, bi-lipschitzowski homeomorfizm taki, że wektor $e_n$ jest kierunkiem regularnym dla $\widetilde{h}(C)$ i ponadto istnieje $\mathcal{C}'$ definiowalna $C^q$ stratyfikacja przestrzeni $\mathbb{R}^{n-1}$ i rodzina odwzorowań $\eta_k : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, ..., b$ definiowalnych, lipschitzowskich takich, że $\widetilde{h}(C) \subset \bigcup_{k=1}^{b} \eta_k$ oraz*

*a) dla dowolnego $\Gamma \in \mathcal{C}'$ restrykcja $\eta_k|_\Gamma$ jest odwzorowaniem klasy $C^q$ dla $k = 1, ..., b$,*

*b) rodzina $\mathcal{C} = \{(\eta_k, \eta_{k+1})|_\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}', k = 1, ..., b-1\} \cup \{(-\infty, \eta_1)|_\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}'\} \cup \{(\eta_b, +\infty)|_\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}'\}$ $\cup \{\eta_k|_\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}', k = 1, ..., b\}$ jest definiowalną $C^q$ stratyfikacją przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zgodną ze zbiorem $\widetilde{h}(C)$ oraz zbiorami $\widetilde{h}(D_j)$ dla $j = 1, ..., s$,*

*c) dla dowolnego $\Lambda \in \mathcal{C}$ restrykcja $\widetilde{h}^{-1}|_\Lambda$ jest definiowalnym zanurzeniem klasy $C^q$.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 4.1.6 oraz 4.1.7 znajdujemy regularną rodzinę hiperpowierzchni definiowalnych $H = \{(H_k, \lambda_k)\}_{k=1,...,b}$ oraz związane z nią odwzorowania definiowalne i lipschitzowskie $\eta_k : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, ..., b$ i definiowalny, bi-lipschitzowski homeomorfizm $\widetilde{h} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ taki, że $C \subset \bigcup_{k=1}^{b} H_k$ i zbiór $\widetilde{h}(C)$ ma kierunek regularny $e_n$. Z wniosku 4.1.10 znamy jawną postać odwzorowania $\widetilde{h}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Jako stratyfikację $\mathcal{C}'$ wystarczy wziąć definiowalną $C^q$ stratyfikację podprzestrzeni $\mathbb{R}^{n-1}$, zgodną ze zbiorami: $\{\eta_k = \eta_{k+1}\}$, $\{\eta_k < \eta_{k+1}\}$, $\pi_{\mathbb{R}^{n-1}}(\widetilde{h}(C) \cap \eta_k)$, $\pi_{\mathbb{R}^{n-1}}(\widetilde{h}(D_j) \cap \eta_k)$ i taką, że dla dowolnego $\Gamma \in \mathcal{C}'$ odwzorowania $\eta_k|_\Gamma$, $\xi_k \circ \psi_{0k}^{-1}|_\Gamma$ są klasy $C^q$ i $\psi_{0k}^{-1}|_\Gamma$ jest zanurzeniem klasy $C^q$. □

ROZDZIAŁ 5

# Twierdzenie o definiowalnej triangulacji lokalnie lipschitzowskiej, słabo bi-lipschitzowskiej

## 5.1. Lematy przygotowawcze

**Lemat 5.1.1.** *(O „sklejaniu” odwzorowań lipschitzowskich) Niech $A_i \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, ..., r$ będą zbiorami domkniętymi, niech $B = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$ będzie zbiorem quasi-wypukłym. Niech $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem takim, że dla dowolnego $i = 1, ..., r$ restrykcja $f|_{A_i}$ jest odwzorowaniem Lipschitza. Wówczas $f$ jest także odwzorowaniem Lipschitza.*

Dowód. Niech $x, y \in B$ będą dowolnie wybranymi punktami, zaś $C_i$ będzie stałą Lipschitza odwzorowania $f|_{A_i}$, $i = 1, ..., r$. Dzięki quasi-wypukłości $B$ istnieje stała $C > 0$ zależna tylko od zbioru $B$ oraz łuk ciągły $\lambda : [0, 1] \longrightarrow B$, kawałkami klasy $C^1$ taki, że $\lambda(0) = x$, $\lambda(1) = y$ oraz $|\lambda| \leqslant C \cdot |x - y|$. Bez szkody ogólności możemy założyć, że $x \in A_1$. Przyjmijmy $t_0 = 0$. Niech teraz

$$t_1 = \sup\{t \in [0, 1] |\ \ \exists t' \in [0, 1] :\ t' \leqslant t, \lambda([t', t]) \subset A_1\}.$$

Jeżeli $t_1 = 1$, wtedy $y = \lambda(t_1) \in A_1$, zatem na mocy założenia $|f(x) - f(y)| \leqslant C_1 \cdot |x - y|$. Załóżmy więc, że $t_1 < 1$. Wtedy $\lambda(t_1) \in A_1 \cap A_j$ z pewnym $j \in \{2, ..., r\}$ takim, że $A_j \setminus A_1 \neq \emptyset$. Bez szkody ogólności możemy przyjąć, że $j = 2$. Definiujemy wówczas

$$t_2 = \sup\{t \in [t_1, 1] |\ \ \exists t' \in [t_1, 1] :\ t' \leqslant t, \lambda([t', t]) \subset A_1\}.$$

Jeśli $t_2 = 1$, wtedy

$$|f(x) - f(y)| = |f(\lambda(t_0)) - f(\lambda(t_2))| \leqslant |f(\lambda(t_0)) - f(\lambda(t_1))| + |f(\lambda(t_1)) - f(\lambda(t_2))| \leqslant$$

$$C_1 \cdot |\lambda(t_0) - \lambda(t_1)| + C_2 \cdot |\lambda(t_1) - \lambda(t_2)| \leqslant \max\{C_1, C_2\} \cdot |\lambda| \leqslant C \cdot \max\{C_1, C_2\} \cdot |x - y|.$$

Jeśli $t_2 < 1$, wtedy $\lambda(t_2) \in A_2 \cap A_j$ z pewnym $j \in \{3, ..., r\}$ takim, że $A_j \setminus (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$. Bez szkody ogólności możemy przyjąć, że $j = 3$. Określamy wtedy

$$t_3 = \sup\{t \in [t_2, 1] |\ \ \exists t' \in [t_2, 1] :\ t' \leqslant t, \lambda([t', t]) \subset A_3\}.$$

Po skończonej liczbie kroków otrzymamy ciąg punktów $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant ... \leqslant t_r = 1$ taki, że dla dowolnego $i = 0, 1, ..., r - 1$ jest $f(\lambda(t_i)), f(\lambda(t_{i+1})) \in A_{i+1}$. Wtedy

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sum_{i=0}^{r-1} f(\lambda(t_i)) - f(\lambda(t_{i+1}))\right| \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} |f(\lambda(t_i)) - f(\lambda(t_{i+1}))| \leqslant \max_{i=1,...,r}\{C_i\} \cdot \sum_{i=0}^{r-1} |\lambda(t_i) - \lambda(t_{i+1})|$$

$$\leqslant \max_{i=1,...,r}\{C_i\} \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \left|\lambda|_{[t_i, t_{i+1}]}\right| = \max_{i=1,...,r}\{C_i\} \cdot |\lambda| \leqslant \max\{C_1, ..., C_r\} \cdot C \cdot |x - y|.$$

□

**Obserwacja 5.1.2.** *Niech $A_1, ..., A_r$ będą zwartymi i rozłącznymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$, $B = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$. Niech $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem takim, że dla dowolnego $i = 1, ..., r$ restrykcja $f|_{A_i}$ jest odwzorowaniem Lipschitza. Wtedy $f$ jest odwzorowaniem Lipschitza.*

Dowód. Wystarczy udowodnić tezę dla $r = 2$. Niech $C_i$ oznacza stałą Lipschitza dla $f|_{A_i}$, $i = 1, 2$. Niech $x$, $y \in A_1 \cup A_2$. Jeśli $x, y \in A_i$ $(i = 1, 2)$, wtedy $|f(x) - f(y)| \leqslant \max_{i=1,2}\{C_i\} \cdot |x - y|$. Załóżmy więc, że $x \in A_1$, $y \in A_2$. Wtedy istnieją $x' \in A_1$, $y' \in A_2$ takie, że $|x - y| = |x - x'| + |x' - y'| + |y' - y|$. Niech

$M_{12} = \max\limits_{(a,b)\in A_1\times A_2} |f(a)-f(b)|$, zaś $\delta_{12} = \min\limits_{(a,b)\in A_1\times A_2} |a-b|$. Wtedy $\delta_{12} > 0$ i z archimedesowości ciała liczb rzeczywistych istnieje stała $C_{12} > 0$ taka, że $M_{12} \leqslant C_{12}\cdot\delta_{12}$. Wówczas

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(x')| + |f(x')-f(y')| + |f(y')-f(y)| \leqslant \max\{C_1, C_2\}\cdot(|x-x'|+|y-y'|) + M_{12}$$
$$\leqslant \max\{C_1, C_2\}\cdot(|x-x'|+|y-y'|) + C_{12}\cdot\delta_{12} \leqslant \max\{C_1, C_2, C_{12}\}\cdot(|x-x'|+|y-y'|+|x'-y'|).$$

$\square$

**Lemat 5.1.3.** *Niech $\widetilde{y}_0, ..., \widetilde{y}_k$ będą punktami afinicznie niezależnymi w $\mathbb{R}^{n-1}$. Rozważmy sympleks $T = [\widetilde{y}_0, ..., \widetilde{y}_k]$ i kompleks symplicjalny*

$$K_T = \{[\widetilde{y}_{\nu_0}, ..., \widetilde{y}_{\nu_l}] : 0 \leqslant \nu_0 < ... < \nu_l \leqslant k,\ l \in \{0, ..., k\}\},$$

*o wielościanie $|K_T| = \overline{T}$. Niech $f : |\overline{T}| \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : |\overline{T}| \longrightarrow \mathbb{R}$ będą definiowalnymi odwzorowaniami Lipschitza takimi, że dla dowolnego $\triangle \in K_T$*

*i) $f = g$ na $\overline{\triangle}$ lub $f(v) < g(v)$ na pewnym wierzchołku $v$ sympleksu $\triangle$,*

*ii) $f|_\triangle$, $g|_\triangle$ są klasy $C^q$.*

*Niech $\psi_f : |\overline{T}| \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi_g : |\overline{T}| \longrightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami semiliniowymi określonymi następującymi formułami: dla $y = \sum\limits_{i=0}^{k}\beta_i\widetilde{y}_i \in \overline{T}$, gdzie $\sum\limits_{i=0}^{k}\beta_i = 0$, $\beta_i \geqslant 0$, mamy*

$$\psi_f\left(\sum_{i=0}^{k}\beta_i\widetilde{y}_i\right) = \sum_{i=0}^{k}\beta_i\cdot f(\widetilde{y}_i), \qquad \psi_g\left(\sum_{i=0}^{k}\beta_i\widetilde{y}_i\right) = \sum_{i=0}^{k}\beta_i\cdot g(\widetilde{y}_i).$$

*Rozważmy następujący kompleks wielościanowy:*

$$K_p = \{\psi_f|_\triangle : \triangle \in K_T\} \cup \{\psi_g|_\triangle : \triangle \in K_T\} \cup \{(\psi_f, \psi_g)\,|_\triangle : \triangle \in K_T, \psi_f|_\triangle < \psi_g|_\triangle\}$$

*i połóżmy $|K_p| = \bigcup K_p$. Wówczas odwzorowanie $H : |K_p| \longrightarrow \mathbb{R}^n$ określone formułą:*

$$(\mathfrak{F}) \qquad H(y,z) = \begin{cases} (y, f(y)), & (y,z) \in \psi_f|_\triangle, \triangle \in K_T, \\ \left(y, \frac{z-\psi_f(y)}{\psi_g(y)-\psi_f(y)}\cdot g(y) + \frac{\psi_g(y)-z}{\psi_g(y)-\psi_f(y)}\cdot f(y)\right), & (y,z) \in (\psi_f, \psi_g)|_\triangle, \triangle \in K_T, \\ (y, g(y)), & (y,z) \in \psi_g|_\triangle, \triangle \in K_T \end{cases}$$

*jest definiowalnym zanurzeniem homeomorficznym takim, że*

$$H(|K_p|) = \left\{(y,z) \in \overline{T}\times\mathbb{R} : f(y) \leqslant z \leqslant g(y)\right\}$$

*oraz*

$$\{H(S) :\ \ S \in K_p\} = \{f|_\triangle :\ \triangle \in K_T\} \cup \{g|_\triangle :\ \triangle \in K_T\} \cup \{(f,g)|_\triangle :\ \triangle \in K_T, f|_\triangle < g|_\triangle\}$$

*i ponadto*

*a) $H$ jest odwzorowaniem Lipschitza;*

*b) $H^{-1}$ jest lokalnie lipschitzowskie na zbiorze $\{(y,z) \in \overline{T}\times\mathbb{R} : f(y) \leqslant z \leqslant g(y), f(y) < g(y)\}$;*

*c) $H$ jest słabo bi-lipschitzowskie klasy $C^q$ na $K_p$.*

Dowód. Zauważmy, że $H$ jest dobrze określone dzięki założeniu $i$), które implikuje następującą własność $(\star)$:

$$(\star) \quad \text{dla } \triangle \in K_T \quad f < g \text{ na } \triangle \iff \psi_f < \psi_g \text{ na } \triangle \quad \text{oraz} \quad f \equiv g \text{ na } \overline{\triangle} \iff \psi_f \equiv \psi_g \text{ na } \overline{\triangle}.$$

Z formuły $(\mathfrak{F})$ i dzięki $(\star)$ łatwo dostajemy, że $H$ jest homeomorficznym zanurzeniem definiowalnym takim, że $H|_S$ jest zanurzeniem klasy $C^q$ dla dowolnego $S \in K_p$ oraz

$$H(|K_p|) = \left\{(y,z) \in \overline{T}\times\mathbb{R} : f(y) \leqslant z \leqslant g(y)\right\}$$

i ponadto

$$\{H(S) :\ \ S \in K_p\} = \{f|_\triangle :\ \triangle \in K_T\} \cup \{g|_\triangle :\ \triangle \in K_T\} \cup \{(f,g)|_\triangle :\ \triangle \in K_T, f|_\triangle < g|_\triangle\}.$$

Aby wykazać własność $a$) zauważmy najpierw, że stosując następujący definiowalny homeomorfizm bi-lipschitzowski

$$\chi : \overline{T}\times\mathbb{R} \ni (y,z) \longmapsto (y, z-f(y)) \in \overline{T}\times\mathbb{R}$$

możemy bez szkody ogólności założyć, że $f \equiv \psi_f \equiv 0$. Ze względu na założenie $i$) należy więc rozważyć dwa przypadki.

Przypadek $g \equiv \psi_g \equiv 0$ na $T$ jest trywialny. Załóżmy więc, że $g > 0$ na $T$. Wówczas dzięki $(\star)$ także $\psi_g > 0$ na $T$ i połóżmy $S = (0, \psi_g)|_T$ oraz przyjmijmy oznaczenie $H(y,z) = (y, H_2(y,z))$. Ponieważ $S$ jest zbiorem wypukłym, $H|_{\overline{S}}$ jest ciągłe i $H|_S$ jest klasy $C^q$, aby więc wykazać lipschitzowość odwzorowania $H$ wystarczy udowodnić [1], że pochodne cząstkowe pierwszego rzędu odwzorowania $H$ są ograniczone na zbiorze $S$. Ponieważ dla dowolnego $(y,z) \in S$ zachodzi $\left|\frac{z}{\psi_g(y)}\right| < 1$ i pochodne cząstkowe pierwszego rzędu odwzorowań $\psi_g$ i $g$ są ograniczone na $T$ (gdyż $\psi_g$ i $g$ są lipschitzowskie) oraz dla $i = 1, ..., n-1$

$$\frac{\partial H_2}{\partial y_i}(y,z) = \frac{z}{\psi_g(y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_i}(y) - \frac{z}{\psi_g(y)} \cdot \frac{g(y)}{\psi_g(y)} \cdot \frac{\partial \psi_g}{\partial y_i}(y), \qquad \frac{\partial H_2}{\partial z}(y,z) = \frac{g(y)}{\psi_g(y)},$$

zatem pozostaje wykazać, że iloraz odwzorowań $\frac{g}{\psi_g}$ jest ograniczony na zbiorze $T$.

Jest to oczywiste w sytuacji, gdy $\psi_g(\widetilde{y}_j) = g(\widetilde{y}_j) > 0$ dla wszystkich $j = 0, ..., k$. Wówczas bowiem odwzorowanie afiniczne $\psi_g > 0$ na zbiorze zwartym $\overline{T}$, zatem $\psi_g > M$ na $\overline{T}$ z pewnym $M > 0$, zaś ciągłości odwzorowania $g$ dostajemy $g < M'$ na $\overline{T}$ z pewnym $M' > 0$.

Bez szkody ogólności możemy więc założyć, że $\{\widetilde{y}_0, ..., \widetilde{y}_l\} = \{\widetilde{y}_j : g(\widetilde{y}_j) = 0\}$, gdzie $0 \leqslant l < k$. Dla dowolnego $y = \sum_{\nu=0}^{k} \beta_\nu \widetilde{y}_\nu \in T$, gdzie $\beta_\nu > 0$ oraz $\sum_{\nu=0}^{k} \beta_\nu = 1$, wybierzmy punkt

$$x = \frac{\beta_0}{\sum_{\nu=0}^{l} \beta_\nu} \cdot \widetilde{y}_0 + ... + \frac{\beta_l}{\sum_{\nu=0}^{l} \beta_\nu} \cdot \widetilde{y}_l.$$

Wówczas $x \in [\widetilde{y}_0, .., \widetilde{y}_l] \subset \{\psi_g = 0\}$, zatem na mocy własności $(\star)$ dostajemy $g(x) = 0$. Ponadto

$$x - y = \beta_{l+1}(x - \widetilde{y}_{l+1}) + ... + \beta_k(x - \widetilde{y}_k).$$

Jeśli teraz $L_g$ jest stałą Lipschitza odwzorowania $g$, to stosując nierówność: $\frac{a_1 + ... + a_p}{b_1 + ... + b_p} \leqslant \frac{a_1}{b_1} + ... \frac{a_p}{b_p}$ dla $a_i$, $b_i > 0$, $i = 1, ..., p$, $p \in \mathbb{N}$, otrzymujemy

$$\left|\frac{g(y)}{\psi_g(y)}\right| = \left|\frac{g(y) - g(x)}{\psi_g(y)}\right| \leqslant \frac{L_g \cdot |x - y|}{\psi_g(y)} \leqslant L_g \cdot \frac{\sum_{\nu=l+1}^{k} \beta_\nu \cdot |x - \widetilde{y}_\nu|}{\sum_{\nu=l+1}^{k} \beta_\nu \cdot g(\widetilde{y}_\nu)} \leqslant \frac{L_g \cdot diam T \cdot (k - l)}{\min\{g(\widetilde{y}_\nu) : \nu > l\}},$$

Aby wykazać *b)* rozważmy punkt $(c,d) \in \overline{T} \times \mathbb{R}$ taki, że $f(c) \leqslant d < g(c)$ (rozumowanie dla przypadku $f(c) < d \leqslant g(c)$ jest analogiczne). Ponownie stosując bi-lipschitzowski automorfizm $\chi$ możemy bez szkody ogólności założyć, że $f \equiv \psi_f \equiv 0$. Połóżmy

$$\Pi = \{(y,z) \in T \times \mathbb{R} : 0 < z < g(y)\}.$$

Wówczas $(c,d) \in \overline{\Pi}$, $0 \leqslant d < g(c)$ i oczywiste jest, że istnieje dostatecznie małe otoczenie $U$ punktu $(c,d)$ w $\mathbb{R}^n$ takie, że przecięcie $U \cap \Pi$ jest zbiorem wypukłym oraz $\overline{\pi_{\mathbb{R}^{n-1}}(U \cap \Pi)} \subset \{g > 0\}$. Wystarczy teraz zauważyć, że wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu odwzorowania

$$H^{-1}(y,z) = \left(y, \frac{\psi_g(y)}{g(y)} \cdot z\right)$$

są ograniczone na $U \cap \Pi$. To kończy dowód własności *b)*.

Aby udowodnić własność *c)* rozważmy parę $\Gamma, \Lambda \in K_p$ taką, że $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$. Pokażemy, że $H$ jest słabo bi-lipschitzowskie klasy $C^q$ na $\{\Gamma, \Lambda\}$. Jest to oczywiste, gdy $\Lambda = \psi_f|_\triangle$ lub $\Lambda = \psi_g|_\triangle$ z pewnym $\triangle \in K_T$, bowiem wtedy $H|_{\overline{\Lambda}}$ jest odwzorowaniem bi-lipschitzowskim. Zatem bez szkody ogólności możemy założyć, że $\Lambda = (\psi_f, \psi_g)|_\triangle$, gdzie $\triangle \in K_T$. Wobec wykazanych uprzednio własności *a)* i *b)* oraz obserwacji 2.2.1, wystarczy rozważyć przypadek $\Gamma = \psi_f|_{\triangle'} = \psi_g|_{\triangle'}$ dla pewnego $\triangle' \in K_T$ takiego, że $\triangle' \subset \overline{\triangle} \setminus \triangle$. Wybierzmy $c \in \Gamma$ oraz ciągi $\{a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$, $\{b_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ zbieżne do punktu $c$. Połóżmy $a_\nu = (a'_\nu, a_{\nu n})$, $b_\nu = (b'_\nu, b_{\nu n})$, gdzie $a'_\nu$, $a' \in \triangle'$, $b'_\nu \in \triangle$, $a_{\nu n}, b_{\nu n} \in \mathbb{R}$. Wtedy ponieważ $\psi_f(a'_\nu) = \psi_g(a'_\nu) = a_{\nu n}$ oraz $|\psi_f(b'_\nu) - b_{\nu n}| \leqslant |\psi_f(b'_\nu) - \psi_g(b'_\nu)|$, zatem z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{|a_{\nu n} - b_{\nu n}|}{|a'_\nu - b'_\nu|} &\leqslant \frac{|\psi_f(a'_\nu) - \psi_f(b'_\nu)| + |\psi_f(b'_\nu) - \psi_f(a'_\nu)| + |\psi_g(a'_\nu) - \psi_g(b'_\nu)|}{|a'_\nu - b'_\nu|} \\ &\leqslant \frac{(2 \cdot J_f + J_g) \cdot |a'_\nu - b'_\nu|}{|a'_\nu - b'_\nu|} \leqslant 2 \cdot J_f + J_g,\end{aligned}$$

[1] Dzięki zastosowaniu twierdzenia o wartości średniej, zob. np. [**Di**] Theorem 8.5.2.

gdzie $J_g, J_f > 0$ są stałymi Lipschitza odpowiednio dla $\psi_g$, $\psi_f$. Wówczas

$$\liminf_{\nu\to+\infty}\frac{|H(a_\nu)-H(b_\nu)|}{|a_\nu-b_\nu|}\geqslant\liminf_{\nu\to+\infty}\frac{|a'_\nu-b'_\nu|}{|a_\nu-b_\nu|}>0,$$

i na mocy obserwacji 2.2.13 otrzymujemy tezę.

□

### 5.2. Konstrukcja triangulacji definiowalnej lokalnie lipschitzowskiej, słabo bi-lipschitzowskiej

Przypomnijmy ogólną definicję triangulacji definiowalnej podzbioru definiowalnego w $\mathbb{R}^n$.

**Definicja 5.2.1.** Niech $A$ będzie zwartym i definiowalnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. *Definiowalną triangulacją klasy* $C^q$ zbioru $A$ (inaczej: *definiowalną* $C^q$ *triangulacją*) nazywamy parę $(K, f)$ złożoną z kompleksu symplicjalnego $K$ oraz definiowalnego homeomorfizmu $f : |K| \longrightarrow A$ o tej własności, że dla dowolnego $\triangle \in K$ zbiór $f(\triangle)$ jest definiowalną $C^q$ podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ oraz $f|_\triangle : \triangle \longrightarrow f(\triangle)$ jest definiowalnym $C^q$ dyfeomorfizmem.

Jeżeli $A$ nie jest zbiorem zwartym, wtedy *definiowalną triangulacją klasy* $C^q$ zbioru $A$ nazywamy parę $(K', f)$, gdzie $K'$ jest podzbiorem pewnego kompleksu symplicjalnego $K$, $|K'| = \bigcup K'$ i odwzorowanie $f : |K'| \longrightarrow A$ jest definiowalnym homeomorfizmem takim, że $f(\triangle)$ jest definiowalną $C^q$ podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ oraz $f|_\triangle : \triangle \longrightarrow f(\triangle)$ jest dyfeomorfizmem klasy $C^q$.

Niech $A_1, ..., A_r$ będą definiowalnymi podzbiorami $A$. Powiemy, że triangulacja $(K, f)$ zbioru $A$ jest *zgodna z rodziną* $A_1, ..., A_r$, jeżeli stratyfikacja $\{f(\triangle) : \ \triangle \in K\}$ jest zgodna z każdym ze zbiorów $A_1, ..., A_r$.

**Twierdzenie 5.2.2.** *(Definiowalna triangulacja lokalnie lipschitzowska, słabo bi-lipschitzowska) Niech $A$ będzie definiowalnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, $A_1, ..., A_r$ będą definiowalnymi podzbiorami $A$. Istnieje wtedy definiowalna $C^q$ triangulacja $(K, H)$ zbioru $A$, zgodna ze zbiorami $A_1, ..., A_r$ i taka, że*

*i) $H$ jest odwzorowaniem lokalnie lipschitzowskim;*

*ii) $H$ jest słabo bi-lipschitzowskie kl. $C^q$ na naturalnej symplicjalnej stratyfikacji $K$ zbioru $|K|$.*

Dowód. Stosując następujący $C^\omega$ dyfeomorfizm definiowalny

$$\zeta : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}} \in \{u \in \mathbb{R}^n : |u| < 1\},$$

możemy bez szkody ogólności przyjąć, że $A$ jest zbiorem zwartym. Na mocy wniosku 1.3.11, lematu 5.1.1 i obserwacji 5.1.2 wystarczy znaleźć definiowalną $C^q$ triangulację $(K, H)$ zbioru $A$, zgodną ze zbiorami $A_1, ..., A_r$ i taką, że dla dowolnego sympleksu $\triangle \in K$

*i)* $H|_{\overline{\triangle}}$ jest odwzorowaniem Lipschitza;

*ii)* $H|_{\overline{\triangle}}$ jest odwzorowaniem słabo bi-lipschitzowskim klasy $C^q$ na symplicjalnej stratyfikacji $\mathfrak{X}_{\overline{\triangle}} = \{\triangle' \in K : \triangle \subset \overline{\triangle}\}$ zbioru $\overline{\triangle}$.

Dowód prowadzimy indukcją rosnącą ze względu na wymiar przestrzeni otaczającej. Przypadki $n = 0$, $n = 1$ są trywialne. Rozważmy teraz przypadek $n \geqslant 2$ i załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$. Oznaczmy zbiory $D_0 = A \setminus intA$, $D_i = A_i \setminus intA_i$, $D_{i+r} = \overline{A}_i \setminus intA_i$, $i = 1, 2, ..., r$. Połóżmy $C = \bigcup_{i=0}^{2r} D_i$. Wtedy $C$ jest definiowalnym nigdziegęstym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i dowolna stratyfikacja przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zgodna ze wszystkimi $D_0, ..., D_{2r}$ jest także zgodna[2] ze zbiorami $A, A_1, ..., A_r$.

**Krok 1.** Na mocy twierdzenia 4.1.11 i obserwacji 2.2.7 możemy bez szkody ogólności założyć, że istnieje definiowalna $C^q$ stratyfikacja $\mathcal{C}'$ przestrzeni $\mathbb{R}^{n-1}$ i rodzina definiowalnych i lipschitzowskich odwzorowań $\eta_k : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k = 1, ..., b)$ takich, że $\eta_1 \leqslant ... \leqslant \eta_b$, $C \subset \bigcup_{k=1}^{b} \eta_k$ i dla dowolnego $\Gamma \in \mathcal{C}'$, $\eta_k|_\Gamma$ jest klasy $C^q$ i albo $\eta_k|_\Gamma \equiv \eta_{k+1}|_\Gamma$ lub $\eta_k|_\Gamma < \eta_{k+1}|_\Gamma$ i ponadto rodzina

$$\begin{aligned}\mathcal{C} := &\{(\eta_k, \eta_{k+1})|_\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}', \eta_k|_\Gamma < \eta_{k+1}|_\Gamma, k = 1, ..., b-1\} \cup \{(\eta_b, +\infty)|_\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}'\} \\ &\cup \{(-\infty, \eta_1)|_\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}'\} \cup \{\eta_k|_\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}', k = 1, ..., b\}\end{aligned}$$

---

[2] Bowiem dla dowolnego $A \subset \mathbb{R}^n$, jeśli $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem spójnym, zgodnym ze zbiorami $A \setminus intA$, $\overline{A} \setminus intA$, to $\Lambda$ jest zgodny ze zbiorem $A$.

jest $C^q$ stratyfikacją przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zgodną ze zbiorami $D_0, ..., D_{2r}$. Wtedy $\mathcal{C}$ jest zgodna z $A, A_1, ..., A_r$ i wystarczy teraz skonstruować szukaną triangulację $(\widetilde{K}, H)$ zbioru

$$\{(y,z) \in A' \times \mathbb{R} : \eta_1(y) \leqslant z \leqslant \eta_b(y)\},$$

gdzie $A'$ jest rzutem zbioru $A$ na podprzestrzeń $\mathbb{R}^{n-1}$, zgodną z $\mathcal{C}$ i rozważyć podkompleks $K \subset \widetilde{K}$ taki, że $H(|K|) = A$. Wtedy para $\big(K, H|_{|K|}\big)$ jest szukaną triangulacją $A$.

**Krok 2.** Dalsza konstrukcja oparta jest na klasycznej idei konstrukcji triangulacji (por. [**Hi2**] lub [**Cos**] Theorem 4.4). Z założenia indukcyjnego istnieje definiowalna $C^q$ triangulacja $(K', h)$ zbioru $A'$, zgodna ze skończoną rodziną $\{\Gamma \in \mathcal{C}' : \quad \Gamma \subset A'\}$ i taka, że dla dowolnego sympleksu $\triangle \in K'$

*a)* $h|_{\overline{\triangle}}$ jest odwzorowaniem Lipschitza;

*b)* $h|_{\overline{\triangle}}$ jest słabo bi-lipschitzowskie kl. $C^q$ na naturalnej symplicjalnej stratyfikacji $\mathfrak{X}_{\overline{\triangle}}$ zbioru $\overline{\triangle}$, gdzie $\mathfrak{X}_{\overline{\triangle}} = \{\triangle' \in K' : \ \triangle' \subset \overline{\triangle}\}$.

Bez szkody ogólności, przechodząc ewentualnie do podpodziału barycentrycznego kompleksu $K'$, możemy założyć (dzięki obserwacji 2.2.6), że para $(K', h)$ ma nadal własności *a)* i *b)* i ponadto dla $\triangle \in K'$, $k = 1, ..., b-1$

$$\eta_k \circ h|_{\overline{\triangle}} = \eta_{k+1} \circ h|_{\overline{\triangle}} \quad \text{lub istnieje wierzchołek } v \text{ sympleksu } \triangle \text{ taki, że } \eta_k \circ h(v) < \eta_{k+1} \circ h(v).$$

Na mocy obserwacji 2.2.10 możemy więc bez szkody ogólności założyć, że $A' = |K'|$, $h = id_{A'}$ oraz

$$(\star\star) \qquad \eta_k|_{\overline{\triangle}} = \eta_{k+1}|_{\overline{\triangle}} \quad \text{lub istnieje wierzchołek } v \text{ sympleksu } \triangle \text{ taki, że } \eta_k(v) < \eta_{k+1}(v)$$

dla dowolnego $\triangle \in K'$ oraz $k = 1, ..., b-1$. Rozważmy dla $k = 1, ..., b$ następujące funkcje $\psi_k : |K'| \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\psi_k\left(\sum_{i=0}^{l} \beta_i y_i\right) = \sum_{i=0}^{l} \beta_i \cdot \eta_k(y_i), \text{ dla dowolnego } [y_0, ..., y_l] \in K' \text{ oraz } \beta_i > 0 \text{ takie, że } \sum_{i=0}^{l} \beta_i = 1.$$

Zauważmy, że każde odworowanie $\psi_k$ jest afiniczne na domknięciu dowolnego sympleksu $\triangle \in K'$ i dzięki własności $(\star\star)$

$$\psi_k < \psi_{k+1} \text{ na } \triangle \iff \eta_k < \eta_{k+1} \text{ na } \triangle \quad \text{oraz} \quad \psi_k = \psi_{k+1} \text{ na } \overline{\triangle} \iff \eta_k = \eta_{k+1} \text{ na } \overline{\triangle}.$$

Rozważmy następujący kompleks wielościanowy:

$$K_p = \{\psi_k|_\triangle, \triangle \in K', k = 1, ..., b\} \cup \{(\psi_k, \psi_{k+1})|_\triangle, \triangle \in K', \psi_k|_\triangle < \psi_{k+1}|_\triangle, k = 1, ..., b-1\}.$$

Połóżmy $|K_p| = \bigcup K_p$. Określamy $H : |K_p| \longrightarrow \{(y,z) \in A' \times \mathbb{R} : \eta_1(y) \leqslant z \leqslant \eta_b(y)\}$ następującą formułą:

$$(\mathfrak{F}) \quad H(y,z) = \begin{cases} (y, \eta_k(y)), & (y,z) \in \psi_k|_\triangle, \triangle \in K', \\ & k = 1, ..., b, \\ \left(y, \frac{z - \psi_k(y)}{\psi_{k+1}(y) - \psi_k(y)} \cdot \eta_{k+1}(y) + \frac{\psi_{k+1}(y) - z}{\psi_{k+1}(y) - \psi_k(y)} \cdot \eta_k(y)\right), & (y,z) \in (\psi_k, \psi_{k+1})|_\triangle, \triangle \in K', \\ & k = 1, ..., b-1, \psi_k|_\triangle < \psi_{k+1}|_\triangle. \end{cases}$$

Na mocy lematu 5.1.3 odwzorowanie $H$ jest definiowalnym homeomorfizmem, $\{H(S) : \quad S \in K_p\}$ jest zgodna z $\mathcal{C}$ i dla dowolnego $S \in K_p$

*a)* $H|_{\overline{S}}$ jest odwzorowaniem Lipschitza;

*b)* $H|_{\overline{S}}$ jest słabo bi-lipschitzowskie kl. $C^q$ na naturalnej wielościanowej stratyfikacji $\mathfrak{X}_{\overline{S}}$ zbioru $\overline{S}$, gdzie $\mathfrak{X}_{\overline{S}} = \{S' \in K_p : \ S' \subset \overline{S}\}$.

Niech teraz $\widetilde{K}$ będzie semiliniową triangulacją zbioru $|K_p|$ zgodną z $K_p$. Na mocy obserwacji 2.2.6 para $\left(\widetilde{K}, H\right)$ jest szukaną triangulacją zbioru $\{(y,z) \in A' \times \mathbb{R} : \eta_1(y) \leqslant z \leqslant \eta_b(y)\}$. □

**Uwaga 5.2.3.** Z dowodu twierdzenia 5.2.2 wynika, że $K$ jest podzbiorem pewnego kompleksu symplicjalnego zanurzonego w $\mathbb{R}^n$.

**Uwaga 5.2.4.** Z dowodu twierdzenia 5.2.2 wynika również mocniejsza wersja tezy dla zbiorów zwartych: jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest definiowalny i zwarty, $A_1, ..., A_r$ są definiowalnymi podzbiorami $A$, wtedy istnieje definiowalna $C^q$ triangulacja $(K, H)$ zbioru $A$, zgodna z $A_1, ..., A_r$ i taka, że

*i)* $H$ jest odwzorowaniem Lipschitza;

*ii)* $H$ jest odwzorowaniem słabo bi-lipschitzowskim klasy $C^q$ na stratyfikacji $K$ zbioru $|K|$.

ROZDZIAŁ 6

# Klasa $\mathcal{T}$ warunków regularności

W niniejszym rozdziale wyróżnimy w klasie $\mathcal{WL}$ podklasę $\mathcal{T}$ warunków regularności i zajmiemy się udowodnieniem twierdzenia o istnieniu definiowalnej triangulacji lokalnie lipschitzowskiej z warunkiem typu $\mathcal{T}$. Konstrukcja dowodu opiera się na trzech zasadniczych filarach: na twierdzeniu o definiowalnej triangulacji lokalnie lipschitzowskiej, słabo bi-lipschitzowskiej (tw. 5.2.2), twierdzeniu o niezmienniczości (tw. 3.2.1) oraz na własności stożkowości (def. 6.1.1). W rozdziałach 7 i 8 pokazujemy, że do klasy $\mathcal{T}$ należą w szczególności warunek Whitneya (B) i warunek Verdiera.

## 6.1. Własność stożkowości

**Definicja 6.1.1.** Niech $\mathcal{Q}$ będzie ustalonym warunkiem regularności. Powiemy, że $\mathcal{Q}$ ma *własność stożkowości klasy* $C^q$, jeżeli dla dowolnej podprzestrzeni afinicznej $V \subset \mathbb{R}^n$ oraz dowolnych definiowalnych $C^q$ podrozmaitości $M$, $N \subset V$ takich, że $N \subset \overline{M} \setminus M$ i dla dowolnego punktu $c \in \mathbb{R}^n \setminus V$ zachodzi

$$\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(M,N) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{a) } \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(c * M, M),\, \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(c * N, N); \\ \text{b) } \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(c * M, c * N)\ ; \\ \text{c) } W^{\mathcal{Q}}(c * M, N). \end{array}$$

**Uwaga 6.1.2.** Zauważmy, że jeśli $V \subset \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią afiniczną, zaś $c \in \mathbb{R}^n \setminus V$ dowolnie ustalonym punktem, wówczas odwzorowanie

$$\varphi : V \times (0; +\infty) \ni (x,t) \longrightarrow (1-t) \cdot c + t \cdot x \in \mathbb{R}^n$$

jest definiowalnym zanurzeniem klasy $C^q$. Zatem jeśli warunek $\mathcal{Q}$ jest $C^q$ niezmienniczy (np. gdy $\mathcal{Q}$ jest warunkiem typu $\mathcal{WL}$ klasy $C^q$), wówczas $\mathcal{Q}$ ma własność stożkowości wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych definiowalnych $C^q$ podrozmaitości $M$, $N \subset \mathbb{R}^n$ takich, że $N \subset \overline{M} \setminus M$ zachodzi

$$\mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(M,N) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{a) } \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(M \times (0;1), M \times \{1\}),\, \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(N \times (0;1), N \times \{1\}); \\ \text{b) } \mathcal{W}^{\mathcal{Q}}(M \times (0;1), N \times (0;1))\ ; \\ \text{c) } W^{\mathcal{Q}}(M \times (0;1), N \times \{1\}). \end{array}$$

**Definicja 6.1.3.** Warunek regularności $\mathcal{Q}$ nazywamy *warunkiem typu* $\mathcal{T}$ *klasy* $C^q$, jeżeli $\mathcal{Q}$ jest warunkiem typu $\mathcal{WL}$ klasy $C^q$, posiadającym własność stożkowości klasy $C^q$. Warunki regularności z klasy $\mathcal{T}$ nazywać będziemy czasem *warunkami triangulowalnymi.*

## 6.2. Twierdzenie o definiowalnej triangulacji z warunkiem typu $\mathcal{T}$

**Definicja 6.2.1.** Niech $\mathcal{Q}$ będzie ustalonym warunkiem regularności, zaś $(K, f)$ będzie definiowalną triangulacją kl. $C^q$ pewnego zwartego zbioru definiowalnego $A \subset \mathbb{R}^n$. Powiemy, że $(K, f)$ jest *triangulacją klasy* $C^q$ *z warunkiem* $\mathcal{Q}$, jeżeli $\{f(\triangle) : \triangle \in K\}$ jest definiowalną stratyfikacją z warunkiem $\mathcal{Q}$.

**Twierdzenie 6.2.2.** *(Triangulacja definiowalna lokalnie lipschitzowska z warunkiem typu $\mathcal{T}$). Niech $\mathcal{Q}$ będzie warunkiem regularności typu $\mathcal{T}$ klasy $C^q$, zaś $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem definiowalnym i $A_1, ..., A_r$ będą skończoną rodziną definiowalnych podzbiorów $A$. Wówczas istnieje definiowalna triangulacja $(K, H)$ zbioru $A$ klasy $C^q$ taka, że $\{H(\triangle) :\ \triangle \in K\}$ jest definiowalną $C^q$ stratyfikacją z warunkiem $\mathcal{Q}$ zbioru $A$, zgodną z rodziną $A_1, ..., A_r$ i $H : |K| \longrightarrow A$ jest odwzorowaniem lokalnie lipschitzowskim.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.2.2 możemy bez szkody ogólności założyć, że $A$ jest zbiorem zwartym. Wykażemy mocniejszą tezę twierdzenia 6.2.2 z $H$ jako odwzorowaniem Lipschitza. Dowód prowadzimy indukcją rosnącą ze względu na wymiar zbioru $A$. Połóżmy $\dim A = d$.

Przypadek $d = 0$ jest trywialny. Dla $d = 1$ szukaną triangulację otrzymujemy stosując twierdzenie 5.2.2 (uwaga 5.2.4). Niech teraz $d > 1$ i załóżmy, że teza zachodzi dla zbiorów wymiaru $\leqslant d - 1$.

**Krok 1.** Na mocy twierdzenia 5.2.2 (uwaga 5.2.4) znajdujemy definiowalną $C^q$ triangulację $(K_1, h_1)$ zbioru $A$, zgodną ze zbiorami $A_1, ..., A_r$, słabo bi-lipschitzowską klasy $C^q$ na symplicjalnej stratyfikacji $K_1$ wielościanu $|K_1|$ i taką, że $h_1 : |K_1| \longrightarrow A$ jest odwzorowaniem Lipschitza.

**Krok 2.** Stosując twierdzenie 3.2.1 dla $f = h_1, B = |K_1|, \mathfrak{X}_B = K_1$, otrzymujemy definiowalną $C^q$ substratyfikację $\mathfrak{X}'_{|K_1|}$ wielościanu $|K_1|$, zgodną z $K_1$ i taką, że warunek $\mathcal{Q}$ i para $\left(h_1, \mathfrak{X}'_{|K_1|}\right)$ spełnia tezę twierdzenia 3.2.1. W szczególności

$$\left\{\Gamma \in \mathfrak{X}'_{|K_1|} : \quad \dim \Gamma = d\right\} = \{\triangle \in K_1 : \quad \dim \triangle = d\}.$$

Zauważmy, że następująca rodzina definiowalnych $C^q$ podrozmaitości

$$\mathfrak{X}'_{\left|K_1^{(d-1)}\right|} = \left\{\Gamma \in \mathfrak{X}'_{|K_1|} : \dim \Gamma \leqslant d-1\right\}$$

jest skończoną definiowalną $C^q$ stratyfikacją wielościanu $\left|K_1^{(d-1)}\right|$, zgodną z jego naturalną stratyfikacją

$$K_1^{(d-1)} = \{\triangle \in K_1 : \ \dim \triangle \leqslant d-1\}.$$

**Krok 3.** Rozważmy wielościan $\left|K_1^{(d-1)}\right|$ i jego stratyfikację $\mathfrak{X}'_{\left|K_1^{(d-1)}\right|}$. Ponieważ $\dim \left|K_1^{(d-1)}\right| \leqslant d-1$, zatem na mocy założenia indukcyjnego istnieje definiowalna $C^q$ triangulacja $(K_2, h_2)$ wielościanu $\left|K_1^{(d-1)}\right|$ taka, że rodzina $\{h_2(\triangle) : \ \triangle \in K_2\}$ jest definiowalną $C^q$ stratyfikacją z warunkiem $\mathcal{Q}$ zbioru $\left|K_1^{(d-1)}\right|$, zgodną z $\mathfrak{X}'_{\left|K_1^{(d-1)}\right|}$ i $h_2 : |K_2| \longrightarrow \left|K_1^{(d-1)}\right|$ jest odwzorowaniem Lipschitza.

**Krok 4.** Definiujemy[1] nowy kompleks symplicjalny $K_3$ :

Niech $\{a_1, ..., a_\alpha\}$ będzie zbiorem wszystkich wierzchołków kompleksu $K_2$ i $\{\triangle_{\alpha+1}, ..., \triangle_T\}$ będzie zbiorem wszystkich $d$ - wymiarowych sympleksów kompleksu $K_1$. Oznaczmy jako $\{0_{\triangle_{\alpha+1}}, ..., 0_{\triangle_T}\}$ zbiór barycentrów sympleksów $\triangle_{\alpha+1}, ..., \triangle_T$. Zdefiniujemy najpierw zbiór wierzchołków kompleksu $K_3$:

$$Vert(K_3) = \{e_1, ..., e_\alpha, e_{\alpha+1}, ..., e_T\},$$

gdzie $e_j = (0, ..., \underset{j}{1}, ..., 0)$, $j = 1, ..., T$, są wierzchołkami $T-1$ wymiarowego sympleksu w $\mathbb{R}^T$

$$\triangle^{T-1} = [e_1, ..., e_\alpha, e_{\alpha+1}, ..., e_T].$$

Określamy teraz kompleks symplicjalny $K_3$ jako następujący podkompleks naturalnego kompleksu symplicjalnego $K_{\triangle^{T-1}} = \{[e_{\delta_1}, ..., e_{\delta_s}] : \quad \delta_1, ..., \delta_s \in \{1, ..., T\}\}$:

$$\begin{aligned} \triangle \in K_3 \iff & \triangle = [e_{\beta_1}, ..., e_{\beta_s}] \quad \text{dla} \quad [a_{\beta_1}, ..., a_{\beta_s}] \in K_2, \\ \text{lub} \quad & \triangle = [e_j, e_{\beta_1}, ..., e_{\beta_s}] \quad \text{dla} \quad [a_{\beta_1}, ..., a_{\beta_s}] \in K_2 \text{ oraz } \triangle_j, \text{ gdzie } j \in \{\alpha+1, ..., T\} \text{ jest} \\ & \qquad \text{takie, że } h_2([a_{\beta_1}, ..., a_{\beta_s}]) \subset \overline{\triangle}_j, \\ \text{lub} \quad & \triangle = [e_j] \quad \text{dla} \quad j \in \{\alpha+1, ..., T\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $K_3$ jest $d$ - wymiarowym kompleksem symplicjalnym w $\mathbb{R}^T$ oraz istnieje $d-1$ wymiarowy podkompleks $L \subset K_3$:

$$L = \{[e_{\beta_1}, ..., e_{\beta_s}] : \quad [a_{\beta_1}, ..., a_{\beta_s}] \in K_2\},$$

symplicjalnie izomorficzny z $K_2$ via następujący semiliniowy homeomorfizm $f : |L| \longrightarrow |K_2|$:

$$f\left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j \cdot e_{\beta_j}\right) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \cdot a_{\beta_j},$$

dla $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j \cdot e_{\beta_j} \in [e_{\beta_1}, ..., e_{\beta_s}]$, $[e_{\beta_1}, ..., e_{\beta_s}] \in L$. Wówczas $(L, h_2 \circ f)$ jest nadal definiowalną $C^q$ triangulacją zbioru $\left|K_1^{(d-1)}\right|$ z warunkiem $\mathcal{Q}$, zgodną z $\mathfrak{X}'_{\left|K_1^{(d-1)}\right|}$ i $h_2 \circ f$ jest odwzorowaniem Lipschitza[2].

**Krok 5.** Rozszerzamy $h_2 \circ f$ na wielościan $|K_3|$ w sposób „stożkowy”:

$$h_3 : |K_3| \longrightarrow |K_1|$$

[1]Porównaj konstrukcję np. w [**DG**] Theorem 4.2, także [**ES**] Przykład 9.5.3.

[2]odwzorowanie $f$ jest lipschitzowskie na mocy lematu 5.1.1, obserwacji 5.1.2 i wniosku 1.3.11.

$$h_3(z)=\begin{cases} h_2\circ f(z), & \text{gdy } z\in\triangle',\ \triangle'\in L,\\ (1-t)\cdot 0_{\triangle_j}+t\cdot h_2\circ f(x), & \text{gdy } z\in\triangle,\ \triangle\in K_3\setminus L,\ \triangle=[e_j,e_{\beta_1},...,e_{\beta_s}],\\ & z=(1-t)\cdot e_j+t\cdot x,\ x\in[e_{\beta_1},...,e_{\beta_s}],\ t\in(0,1),\\ 0_j, & \text{gdy } z=e_j,\ j\in\{\alpha+1,...,T\}. \end{cases}$$

Z konstrukcji wynika, że $h_3$ posiada następujące własności:

*i)* $h_3|_{\triangle}$ jest definiowalnym $C^q$ zanurzeniem dla dowolnego $\triangle\in K_3$ ;

*ii)* $h_3\left((e_j,e_{\beta_1},...,e_{\beta_s})\right)=0_{\triangle_j}*h_2\circ f\left((e_{\beta_1},...,e_{\beta_s})\right)$, dla dowolnego $\triangle=[e_j,e_{\beta_1},...,e_{\beta_s}]\in K_3\setminus L$,

*iii)* $\{h_3(\triangle):\ \triangle\in L\}$ jest $C^q$ stratyfikacją z warunkiem $\mathcal{Q}$ zbioru $\left|K_1^{(d-1)}\right|$, zgodną z $\mathfrak{X}'\big|_{\left|K_1^{(d-1)}\right|}$,

*iv)* $h_3$ jest odwzorowaniem Lipschitza [3].

Złożenie $h_1\circ h_3$ jest oczywiście odwzorowaniem Lipschitza. Dzięki własności stożkowości i uwadze 3.1.5 rodzina $\{h_3(\triangle):\ \triangle\in K_3\}$ jest definiowalną $C^q$ stratyfikacją z warunkiem $\mathcal{Q}$ zbioru $|K_1|$, zgodną ze stratyfikacją $\mathfrak{X}'_{|K_1|}$. Ponieważ para $\left(h_1,\mathfrak{X}'_{|K_1|}\right)$ spełnia tezę twierdzenia 3.2.1, zatem rodzina

$$\{h_1\circ h_3(\triangle):\ \triangle\in K_3\}$$

jest definiowalną $C^q$ stratyfikacją z warunkiem $\mathcal{Q}$ zbioru $A$, zgodną z $\{h_1(\triangle):\ \triangle\in K_1\}$. Jest ona również zgodna ze zbiorami $A_1,...,A_r$, bowiem rodzina $\{h_1(\triangle):\ \triangle\in K_1\}$ jest zgodna z $A_1$,...,$A_r$ (zob. Krok 1). Zatem $(K_3,h_1\circ h_3)$ jest szukaną definiowalną $C^q$ triangulacją zbioru $A$. □

[3] Wystarczy zauważyć, że dla dowolnego $\triangle\in K_3$, $h_3|_{\overline{\triangle}}$ jest odwzorowaniem Lipschitza, bowiem $h_3|_{\triangle}$ ma pochodne pierwszego rzędu ograniczone na $\triangle$ i zastosować wniosek 1.3.11, lemat 5.1.1 i obserwacja 5.1.2.

ROZDZIAŁ 7

# Warunek Whitneya (B) jako warunek typu $\mathcal{T}$

## 7.1. Warunek Whitneya (B) jako warunek typu $\mathcal{WL}$ klasy $C^q$, $q \geqslant 1$

Na poczatek przypomnijmy krótko definicję oraz najważniejsze własności warunku Whitneya (B).

**Definicja 7.1.1.** Niech $N, M \subset \mathbb{R}^n$ będą podrozmaitościami klasy $C^q$, $q \geqslant 1$, przy czym $N \subset \overline{M} \setminus M$. Niech $a \in N$ będzie dowolnie ustalonym punktem. Powiemy, że para płatów $(M,\ N)$ spełnia *warunek Whitneya (B) w punkcie* $a$, jeżeli dla dowolnych dwóch ciągów $\{a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset N$, $\{b_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset M$ zbieżnych do punktu $a$, jeżeli ciąg siecznych $\{\mathbb{R}(a_\nu - b_\nu)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do pewnej podprzestrzeni $L \subset \mathbb{P}_{n-1}$ i ciąg przestrzeni stycznych $\{T_{b_\nu} M\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do pewnej podprzestrzeni $T \subset \mathbb{R}^n$, $T \in \mathbb{G}_{\dim M, n}$, wówczas zachodzi inkluzja $L \subset T$.

**Uwaga 7.1.2.** Jeżeli para $M$, $N$ spełnia warunek Whitneya (B) w punkcie $a \in N$, będziemy pisać $\mathcal{W}^B(M, N, a)$. Jeśli para płatów $M$, $N$ spełnia warunek Whitneya (B) w każdym punkcie $a \in N$, będziemy pisać $\mathcal{W}^B(M, N)$. Jeżeli natomiast para płatów $M$, $N$ nie spełnia warunku Whitneya (B) w punkcie $a \in N$, fakt ten będziemy oznaczać symbolem $\sim \mathcal{W}(M, N, a)$.

**Twierdzenie 7.1.3.** *Warunek Whitneya (B) jest definiowalny i generyczny.*

DOWÓD. Rozumowanie pochodzące z pracy [**TL2**] dla struktury o-minimalnej $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp, (r)_{r \in \mathbb{R}})$, przenosi się bez większych zmian na przypadek dowolnej sturktury o-minimalnej na uporządkowanym ciele liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Zobacz także [**DM1**], appendix B i C.

$\square$

**Uwaga 7.1.4.** Warunek Whitneya (B) jest niezmienniczy względem dyfeomorfizmów klasy $C^1$ (zob. także [**Tro**], Corollary 3.3).

Pokażemy teraz, że warunek Whitneya (B) posiada własność rzutowania względem odwzorowań słabo lipschitzowskich klasy $C^q$, $q \geqslant 1$.

**Twierdzenie 7.1.5.** *Niech* $\Lambda,\ \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *będą podrozmaitościami klasy* $C^q$ *takimi, że* $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ *oraz* $\dim \Gamma < \dim \Lambda$. *Niech* $f : \Lambda \cup \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *będzie odwzorowaniem słabo lipschitzowskim klasy* $C^q$ *na* $\{\Lambda, \Gamma\}$. *Wówczas*

$$\mathcal{W}^B(graph f|_\Lambda, graph f|_\Gamma) \Longrightarrow \mathcal{W}^B(\Lambda, \Gamma).$$

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że $graph f|_\Gamma$, $graph f|_\Lambda$ są podrozmaitościami klasy $C^q$ w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Niech więc $a \in \Gamma$ oraz $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$, $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ będą ciągami zbieżnymi do punktu $a$ i takimi, że ciągi

$$\mathbb{R}(a_k - b_k) \longrightarrow L, \quad T_{b_k}\Lambda \longrightarrow T, \qquad \text{gdy} \qquad k \longrightarrow +\infty,$$

z pewnymi $L \in \mathbb{P}_{n-1}$, $T \in \mathbb{G}_{\dim M, n}$. Wówczas również

$$(a_k, f(a_k)) \longrightarrow (a, f(a)), \quad (b_k, f(b_k)) \longrightarrow (a, f(a)), \qquad (k \longrightarrow +\infty).$$

Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że

$$\mathbb{R}\left((a_k, f(a_k)) - (b_k, f(b_k))\right) \longrightarrow L', \quad T_{(b_k, f(b_k))} graph\ f|_\Lambda \longrightarrow T', \qquad (k \longrightarrow +\infty),$$

z pewnymi $L' \in \mathbb{P}_{n+m-1}$, $T' \in \mathbb{G}_{\dim \Lambda, n+m}$. Z założenia $\mathcal{W}^B(graph f|_\Lambda, graph f|_\Gamma)$, zatem $L' \subset T'$. Ponieważ $f$ jest słabo lipschitzowskie na stratyfikacji $\{\Lambda,\ \Gamma\}$, więc $L' \not\subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$, w szczególności $\pi_1|_{L'}$ jest monomorfizmem, gdzie $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest naturalnym rzutowaniem. Wobec ciągłości $\pi_1$ musi więc zachodzić $\pi_1(L') = L$. Ponadto dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$\pi_1\left(T_{(b_k, f(b_k))} graph\ f|_\Lambda\right) = T_{b_k}\Lambda,$$

więc z ciągłości rzutowania $\pi_1$ otrzymujemy inkluzję $\pi_1(T') \subset T$. Stąd $L = \pi_1(L') \subset \pi_1(T') \subset T$. $\square$

Wykażemy teraz własność podniesienia względem odwzorowań lokalnie lipschitzowskich klasy $C^q$, $q \geqslant 1$ dla warunku Whitneya (B). Wynika ona prosto z następującego, nieco ogólniejszego twierdzenia:

**Twierdzenie 7.1.6.** *Niech $\Lambda_i, \Gamma_i$ $(i = 1, 2)$ będą dwoma parami podrozmaitości klasy $C^q$ w $\mathbb{R}^n$ takimi, że $\Gamma_i \subset \overline{\Lambda_i} \setminus \Lambda_i$ oraz $\mathcal{W}^B(\Lambda_i, \Gamma_i)$. Załóżmy, że $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ i $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ są podrozmaitościami w $\mathbb{R}^n$ klasy $C^q$ takimi, że $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subset \overline{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}$ oraz dla dowolnego $x_0 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ i dla dowolnego ciągu $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \Lambda_1 \cap \Lambda_2$, zbieżnego do $x_0$ zachodzi implikacja*

$$T_{y_\nu}\Lambda_i \longrightarrow S_i \ (i = 1, 2) \quad \Longrightarrow \quad \dim S_1 \cap S_2 = \dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2.$$

*Wówczas $\mathcal{W}^B(\Lambda_1 \cap \Lambda_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.*

Dowód. Niech $x_0 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Rozważmy dowolne ciągi

$$\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \Gamma_1 \cap \Gamma_2, \qquad \{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \Lambda_1 \cap \Lambda_2,$$

takie, że $x_\nu, y_\nu \longrightarrow x_0$ dla $\nu \longrightarrow +\infty$. Załóżmy ponadto, że $\mathbb{R}(x_\nu - y_\nu) \longrightarrow L$ z pewnym $L \in \mathbb{P}_{n-1}$ oraz, że poniższe ciągi przestrzeni stycznych są zbieżne na odpowiednich grasssmannianach:

$$\{T_{y_\nu}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)\}_{\nu \in \mathbb{N}}, \qquad \{T_{y_\nu}\Lambda_1\}_{\nu \in \mathbb{N}}, \qquad \{T_{y_\nu}\Lambda_2\}_{\nu \in \mathbb{N}}.$$

Niech $T = \lim\limits_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$. Wtedy $\dim T = \dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Na mocy $\mathcal{W}^B(\Lambda_1, \Gamma_1)$ i $\mathcal{W}^B(\Lambda_2, \Gamma_2)$ otrzymujemy $L \subset \lim\limits_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu}\Lambda_1 = S_1$ oraz $L \subset \lim\limits_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu}\Lambda_2 = S_2$. Ponieważ $T \subset S_1 \cap S_2$ oraz z założenia $\dim S_1 \cap S_2 = \dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2$, zatem

$$S_1 \cap S_2 = T,$$

skąd ostatecznie $L \subset T$. $\square$

**Twierdzenie 7.1.7.** *Niech $\Lambda$, $\Gamma$ będą podrozmaitościami klasy $C^q$ w $\mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$. Rozważmy odwzorowanie $f : \Lambda \cup \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lokalnie lipschitzowskie i takie, że $f|_\Lambda$, $f|_\Gamma$ są kl. $C^q$. Niech $M, N \subset \Lambda \cup \Gamma$ będą podrozmaitościami kl. $C^q$ takimi, że $N \subset \overline{M} \setminus M$ i rodzina $\{M, N\}$ jest zgodna z $\{\Lambda, \Gamma\}$. Wówczas*

$$\mathcal{W}^B(M, N), \quad \mathcal{W}^B(graph f|_\Lambda, graph f|_\Gamma) \quad \Longrightarrow \mathcal{W}^B(graph f|_M, graph f|_N).$$

Dowód. Jeśli $M, N \subset \Lambda$ lub $M, N \subset \Gamma$, wówczas zachodzi $\mathcal{W}^B(graph f|_M, graph f|_N)$, bowiem warunek Whitneya (B) jest niezmienniczy ze względu na $C^q$ dyfeomorfizmy. Niech więc teraz $M \subset \Lambda$, $N \subset \Gamma$. Pokażemy, że spełnione są założenia twierdzenia 7.1.6 dla

$$\Lambda_1 = graph f|_\Lambda, \quad \Gamma_1 = graph f|_\Gamma, \quad \Lambda_2 = M \times \mathbb{R}^m, \quad \Gamma_2 = N \times \mathbb{R}^m.$$

Istotnie, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = graph f|_M$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = graph f|_N$ są $C^q$ podrozmaitościami w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ oraz zachodzi $graph f|_N \subset \overline{graph f|_M} \setminus graph f|_M$. Ponadto łatwo można wykazać (zob. też [**BT**], uwaga poprzedzająca Proposition 1), że

$$\mathcal{W}^B(M, N) \Longrightarrow \mathcal{W}^B(M \times \mathbb{R}^m, N \times \mathbb{R}^m).$$

Ustalmy punkt $x_0 \in graph f|_N$. Rozważmy ciągi $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset graph f|_M$, $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset graph f|_N$ takie, że $y_\nu, x_\nu \longrightarrow x_0$ $(\nu \longrightarrow +\infty)$ oraz załóżmy, że następujące ciągi przestrzeni stycznych

$$\{T_{y_\nu} graph f|_M\}_{\nu \in \mathbb{N}}, \quad \{T_{y_\nu}(M \times \mathbb{R}^m)\}_{\nu \in \mathbb{N}}, \quad \{T_{y_\nu} graph f|_\Lambda\}_{\nu \in \mathbb{N}}$$

są zbieżne na odpowiednich grassmannianach. Oznaczmy teraz współrzędne punktów $x_0 = (x_0', x_0'')$, $x_\nu = (x_\nu', x_\nu'')$, $y_\nu = (y_\nu', y_\nu'')$, gdzie $x_0', x_\nu', y_\nu' \in \mathbb{R}^n$ i $x_0'', x_\nu'', y_\nu'' \in \mathbb{R}^m$ dla dowolnego $\nu \in \mathbb{N}$. Wtedy także ciąg $\left\{T_{y_\nu'} M\right\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny. Ponieważ $\dim T_{y_\nu} graph f|_M = \dim M$, więc

$$\dim \lim_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu} graph f|_M = \dim M.$$

Z drugiej strony istnieje $U_{x_0'}$ otwarte otoczenie punktu $x_0'$ takie, że $f|_{(\Lambda \cup \Gamma) \cap U_{x_0'}}$ jest odwzorowaniem Lipschitza, spełnia więc założenia obserwacji 1.1.8 i obserwacji 1.1.9. Istnieje więc stała $\alpha_{x_0'} > 0$ taka, że

$$\delta\left(\lim_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu} graph f|_\Lambda, \{0\} \times \mathbb{R}^m\right) \geqslant \alpha_{x_0'},$$

skąd na mocy obserwacji 1.1.7 *ii)*

$$\left(\lim_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu} graph f|_\Lambda\right) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^m) = \{0\}.$$

Ponadto $\lim\limits_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu}(M \times \mathbb{R}^m) = \left(\lim\limits_{y'_\nu \to x'_0} T_{y'_\nu} M\right) \times \mathbb{R}^m$, stąd

$$\dim \left(\lim_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu} graph f|_\Lambda\right) \cap \left(\left(\lim_{y'_\nu \to x'_0} T_{y'_\nu} M\right) \times \mathbb{R}^m\right) \leqslant \dim M.$$

Ale $M \subset \Lambda$ oraz dla dowolnego $\nu \in \mathbb{N}$ mamy $T_{y_\nu} graph f|_M = (T_{y_\nu} graph f|_\Lambda) \cap \left(T_{y'_\nu} M \times \mathbb{R}^m\right)$, zatem

$$\lim_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu} graph f|_M \subset \lim_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu} graph f|_\Lambda \cap \lim_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu}(M \times \mathbb{R}^m).$$

Stąd ponieważ $\dim \lim\limits_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu} graph f|_M = \dim M$, dostajemy, że

$$\dim \lim_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu} graph f|_\Lambda \cap \lim_{y_\nu \to x_0} T_{y_\nu}(M \times \mathbb{R}^m) = \dim M = \dim graph f|_\Lambda \cap (M \times \mathbb{R}^m),$$

spełnione są więc założenia twierdzenia 7.1.6. □

**Wniosek 7.1.8.** *Warunek Whitneya (B) jest warunkiem typu $\mathcal{WL}$ klasy $C^q$, $q \geqslant 1$.*

## 7.2. Własność stożkowości warunku Whitneya (B)

Ponieważ warunek Whitneya (B) jest niezmienniczy względem definiowalnych dyfeomorfizmów klasy $C^1$, zatem możemy bez szkody dla ogólności posługiwać się definicją równoważną własności stożkowości (uwaga 6.1.2).

**Twierdzenie 7.2.1.** *Warunek Whitneya (B) ma własność stożkowości klasy $C^q$, $q \geqslant 1$.*

Dowód. Niech $M$, $N$ będą definiowalnymi $C^q$ podrozmaitościami w $\mathbb{R}^n$ takimi, że $N \subset \overline{M} \setminus M$ i zachodzi $\mathcal{W}^B(M, N)$.

a) Warunki $\mathcal{W}^B(M \times (0;1), M \times \{1\})$ oraz $\mathcal{W}^B(N \times (0;1), N \times \{1\})$ są spełnione w sposób oczywisty, bowiem zbiory $M \times (0,1) \cup M \times \{1\}$ oraz $N \times (0,1) \cup N \times \{1\}$ są definiowalnymi podrozmaitościami z brzegiem klasy $C^q$, $q \geqslant 1$.

b) Wykażemy, że zachodzi $\mathcal{W}^B(M \times (0;1), N \times (0;1))$. Niech więc $x \in N \times (0,1)$ będzie ustalonym punktem i rozważmy dowolne dwa ciągi $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \in N \times (0;1)$, $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \in M \times (0;1)$ takie, że

$$x_\nu, y_\nu \longrightarrow x, \qquad \mathbb{R}(x_\nu - y_\nu) \longrightarrow L, \qquad T_{y_\nu}(M \times (0;1)) \longrightarrow T \qquad (\nu \longrightarrow +\infty)$$

z pewnymi $L \in \mathbb{P}_n$, $T \in \mathbb{G}_{\dim M+1, n+1}$. Pokażemy, że $L \subset T$. Oznaczmy współrzędne punktów $x, x_\nu, y_\nu$:

$$x = (x', x_{n+1}), \qquad x_\nu = (x'_\nu, x_{\nu n+1}), \qquad y_\nu = (y'_\nu, y_{\nu n+1}),$$

gdzie $x'$, $x'_\nu \in N$ oraz $y'_\nu \in M$, $x_{n+1}$, $x_{\nu n+1}$, $y_{\nu n+1} \in (0,1)$. Wówczas mamy inkluzję siecznych

$$(\mathcal{S}1) \qquad \mathbb{R}(x_\nu - y_\nu) = \mathbb{R}(x'_\nu - y'_\nu, x_{\nu n+1} - y_{\nu n+1}) \subset \mathbb{R}(x'_\nu - y'_\nu) \times \mathbb{R}.$$

Ponadto dla dowolnego $\nu \in \mathbb{N}$

$$(\mathcal{S}2) \qquad T_{y_\nu}(M \times (0;1)) = T_{y'_\nu} M \times \mathbb{R}.$$

Ze zbieżności ciągów $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ do $x$ otrzymujemy zbieżność ciągów $\{x'_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, $\{y'_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ do $x'$ i bez szkody ogólności możemy przyjąć, że

$$\mathbb{R}(x'_\nu - y'_\nu) \longrightarrow L', \qquad T_{y'_\nu} M \longrightarrow T_M \qquad (\nu \longrightarrow +\infty),$$

gdzie $L' \in \mathbb{P}_{n-1}$, $T_M \in \mathbb{G}_{\dim M, n}$ są pewnymi podprzestrzeniami liniowymi. Na mocy $(\mathcal{S}1)$ oraz $(\mathcal{S}2)$ zachodzą związki $L \subset L' \times \mathbb{R}$, $T = T_M \times \mathbb{R}$. Ponadto z założenia $\mathcal{W}^B(M, N)$ zachodzi $L' \subset T_M$. Ostatecznie więc

$$L \subset L' \times \mathbb{R} \subset T_M \times \mathbb{R} = T.$$

c) Dowód faktu $W^B(M \times (0;1), N \times \{1\})$ jest analogiczny jak w przypadku b).

□

**Wniosek 7.2.2.** *Warunek Whitneya (B) jest warunkiem typu $\mathcal{T}$ klasy $C^q$, $q \geqslant 1$.*

ROZDZIAŁ 8

# Warunek Verdiera jako warunek typu $\mathcal{T}$

Zanim przejdziemy do dowodu rozmaitych własności warunku Verdiera, udowodnimy najpierw kilka luźno związanych ze sobą faktów z geometrii euklidesowej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

## 8.1. Lematy przygotowawcze

**Lemat 8.1.1.** *Niech $R$, $S$ będą dowolnymi liniowymi podprzestrzeniami $\mathbb{R}^n$. Wówczas*
*a) $\forall v \in S \quad \pi_{\pi_R(S)}(v) = \pi_R(v)$ ;*
*b) $d(S, R) = d(S, \pi_R(S))$.*
*c) Jeśli $d(S, R) < 1$, wtedy $\dim \pi_R(S) = \dim S$.*

Dowód. Własności a) i b) dowodzi się elementarnie. Do dowodu własności c) wystarczy zauważyć, że na mocy obserwacji 1.1.3 c) zachodzi $S \cap R^{\perp} = \{0\}$, zatem $\pi_R|_S$ jest monomorfizmem.

□

Kolejny lemat mówi natomiast o lipschitzowskim zachowaniu się wybranych projekcji otrogonalnych względem odwzorowania $d$.

**Lemat 8.1.2.** *Niech $V$ będzie liniową podprzestrzenią w $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n = V \oplus V^{\perp}$. Ustalmy $\alpha \in (0, 1]$ i rozważmy następujący podzbiór sfery*

$$B_\alpha = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : \quad d(\mathbb{R}u, V^{\perp}) \geqslant \alpha\}.$$

*Istnieje wtedy stała $C_\alpha > 0$ taka, że*
*i) dla dowolnych $u \in B_\alpha$, $w \in B_\alpha$ zachodzi*

$$d(\mathbb{R}\pi_V(u), \mathbb{R}\pi_V(w)) \leqslant C_\alpha \cdot d(\mathbb{R}u, \mathbb{R}w),$$

*ii) jeśli $L, K$ są liniowymi podprzestrzeniami w $\mathbb{R}^n$ takimi, że $L \cap \mathbb{S}^{n-1} \subset B_\alpha$, $K \cap \mathbb{S}^{n-1} \subset B_\alpha$,wtedy*

$$d\left(\pi_V(L), \pi_V(K)\right) \leqslant C_\alpha \cdot d(L, K).$$

Dowód. *i)* Wybierzmy dowolne wektory $u, w \in B_\alpha$. Z opisu zbioru $B_\alpha$ wynika, że

$$|\pi_V(u)| = |u - \pi_{V^\perp}(u)| = d(\mathbb{R}u, V^{\perp}) \geqslant \alpha \quad \text{oraz} \quad |\pi_V(w)| = |w - \pi_{V^\perp}(w)| = d(\mathbb{R}w, V^{\perp}) \geqslant \alpha.$$

Ponieważ $||\pi_V|| \leqslant 1$, zatem z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\pi_V(u)}{|\pi_V(u)|} - \frac{\pi_V(w)}{|\pi_V(w)|}\right| &= \left|\frac{\pi_V(u)\cdot|\pi_V(w)| - \pi_V(w)\cdot|\pi_V(u)|}{|\pi_V(u)|\cdot|\pi_V(w)|}\right| \\
&= \left|\frac{\pi_V(u)\cdot|\pi_V(w)| - \pi_V(u)\cdot|\pi_V(u)| + \pi_V(u)\cdot|\pi_V(u)| - \pi_V(w)\cdot|\pi_V(u)|}{|\pi_V(u)|\cdot|\pi_V(w)|}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha^2}\cdot\big(|\pi_V(u)|\cdot\big|\,|\pi_V(u)| - |\pi_V(w)|\,\big| + |\pi_V(u)|\cdot|\pi_V(u) - \pi_V(w)|\big) \\
&\leqslant \frac{2}{\alpha^2}\big(|\pi_V(u) - \pi_V(w)|\big) = \frac{2}{\alpha^2}\big|\pi_V(u - w)\big| \leqslant \frac{2}{\alpha^2}|u - w|.
\end{aligned}$$

W analogiczny sposób pokazujemy, że

$$\left|\frac{\pi_V(u)}{|\pi_V(u)|} + \frac{\pi_V(w)}{|\pi_V(w)|}\right| \leqslant \frac{2}{\alpha^2}|u + w|.$$

Rozważmy teraz metrykę $\widetilde{d} : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \longrightarrow [0, \sqrt{2}]$, opisaną w obserwacji 1.1.3 $h$). Możliwe są dwa przypadki:

*Przypadek I.*

$$\widetilde{d}(\mathbb{R}\pi_V(u), \mathbb{R}\pi_V(w)) = \min\left\{\left|\frac{\pi_V(u)}{|\pi_V(u)|} + \frac{\pi_V(w)}{|\pi_V(w)|}\right|, \left|\frac{\pi_V(u)}{|\pi_V(u)|} - \frac{\pi_V(w)}{|\pi_V(w)|}\right|\right\} = \left|\frac{\pi_V(u)}{|\pi_V(u)|} - \frac{\pi_V(w)}{|\pi_V(w)|}\right|.$$

Wtedy

$$\left|\frac{\pi_V(u)}{|\pi_V(u)|} - \frac{\pi_V(w)}{|\pi_V(w)|}\right| \leqslant \left|\frac{\pi_V(u)}{|\pi_V(u)|} + \frac{\pi_V(w)}{|\pi_V(w)|}\right|$$

i na mocy powyższego rozumowania

$$\widetilde{d}(\mathbb{R}\pi_V(u), \mathbb{R}\pi_V(w)) \leqslant \frac{2}{\alpha^2} \min\{|u+w|, |u-w|\} = \frac{2}{\alpha^2}\ \widetilde{d}(\mathbb{R}u, \mathbb{R}v).$$

*Przypadek II.*

$$\widetilde{d}(\mathbb{R}\pi_V(u), \mathbb{R}\pi_V(w)) = \left|\frac{\pi_V(u)}{|\pi_V(u)|} + \frac{\pi_V(w)}{|\pi_V(w)|}\right|.$$

Analogicznie jak w Przypadku I dowodzimy nierówności

$$\widetilde{d}(\mathbb{R}\pi_V(u), \mathbb{R}\pi_V(w)) \leqslant \frac{2}{\alpha^2} \cdot \widetilde{d}(\mathbb{R}u, \mathbb{R}v).$$

Ostatecznie więc na mocy obserwacji 1.1.3h)

$$d(\mathbb{R}\pi_V(u), \mathbb{R}\pi_V(w)) \leqslant \widetilde{d}(\mathbb{R}\pi_V(u), \mathbb{R}\pi_V(w)) \leqslant \frac{2}{\alpha^2} \cdot \widetilde{d}(\mathbb{R}u, \mathbb{R}w) \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\alpha^2} \cdot d(\mathbb{R}u, \mathbb{R}w).$$

*ii)*. Ponieważ $L \cap \mathbb{S}^{n-1} \subset B_\alpha$, $K \cap \mathbb{S}^{n-1} \subset B_\alpha$, zatem $\pi_V|_L$, $\pi_V|_K$ są monomorfizmami. Wybierzmy $u \in L \cap \mathbb{S}^{n-1}$, $w \in K \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Wtedy $\pi_V(u)$, $\pi_V(w) \neq 0$. Na mocy lematu 8.1.2 *i)* istnieje $C_\alpha > 0$ taka, że

$$d\left(\mathbb{R}\pi_V(u), \pi_V(K)\right) \leqslant d\left(\mathbb{R}\pi_V(u), \mathbb{R}\pi_V(w)\right) \leqslant C_\alpha \cdot d(\mathbb{R}u, \mathbb{R}w).$$

Po przejściu z prawej strony nierówności do infimum po wszystkich $w \in K \cap \mathbb{S}^{n-1}$ otrzymujemy

$$d(\mathbb{R}\pi_V(u), \pi_V(K)) \leqslant C_\alpha \cdot d(\mathbb{R}u, K) \leqslant C_\alpha \cdot d(L, K).$$

Ponieważ $\pi_V|_L$ jest izomorfizmem na $\pi_V(L)$, zatem po przejściu z lewej strony nierówności do supremum po wszystkich $u \in L \cap \mathbb{S}^{n-1}$ dostajemy

$$d\left(\pi_V(L), \pi_V(K)\right) \leqslant C_\alpha \cdot d(L, K).$$

□

**Definicja 8.1.3.** Niech $S, K \subset \mathbb{R}^n$ będą podprzestrzeniami liniowymi. Określamy sinus kąta między podprzestrzeniami $S$ i $K$:

$$\lambda(S,K) = \begin{cases} \inf\{d(\mathbb{R}u, \mathbb{R}w) : u \in S, w \in K, |u| = |w| = 1, u \perp S \cap K, w \perp S \cap K\}, & S \not\subset K \text{ i } K \not\subset S, \\ 0, & S \subset K \text{ lub } K \subset S. \end{cases}$$

**Obserwacja 8.1.4.** *Niech $S, K$ będą podprzestrzeniami liniowymi w $\mathbb{R}^n$. Wówczas*
*i)* $\lambda(S,K) > 0 \iff S \not\subset K$ *i* $K \not\subset S \iff \dim S \cap K < min\{\dim S, \dim K\}$.
*ii)* $\lambda(S,K) = \lambda(K,S) \leqslant 1$.
*iii) Jeśli $S \not\subset K$ i $K \not\subset S$, wtedy* $\lambda(S,K) = \delta(S \cap (S \cap K)^\perp, K \cap (S \cap K)^\perp)$.

**Obserwacja 8.1.5.** *Niech $k, l, n \in \mathbb{N}$ i niech $S \in \mathbb{G}_{s,n}$, $K \in \mathbb{G}_{k,n}$ będą takie, że $\lambda(S,K) > 0$. Wtedy*
*i) dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$ zachodzi związek:*

$$d(\mathbb{R}v, S \cap K) \leqslant \frac{1}{\lambda(S,K)}(d(\mathbb{R}v, S) + d(\mathbb{R}v, K)).$$

*ii) Jeśli $R, L$ są dowolnymi liniowymi podprzestrzeniami w $\mathbb{R}^n$, wówczas*

$$d(R \cap L, S \cap K) \leqslant \frac{1}{\lambda(S,K)}(d(R,S) + d(L,K)).$$

Dowód. *i)* Niech $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$. Jeśli $v \in S \cap K$, wtedy nierówność z *i)* zachodzi trywialnie, gdyż

$$d(v, S \cap K) = d(v, S) = d(v, K) = 0.$$

Załóżmy teraz, że $v \notin S \cap K$. Wówczas $d(v, S \cap K) > 0$. Ponieważ $v - \pi_S(v) \perp S$, zatem $v - \pi_S(v) \perp S \cap K$, więc również $\pi_{S \cap K}(v - \pi_S(v)) = 0$. Stąd

$$\pi_{S \cap K}(v) = \pi_{S \cap K} \circ \pi_S(v).$$

Analogicznie $\pi_{S \cap K}(v) = \pi_{S \cap K} \circ \pi_K(v)$. Zatem $\pi_K(v) - \pi_{S \cap K}(v) \perp S \cap K$ oraz $\pi_S(v) - \pi_{S \cap K}(v) \perp S \cap K$. Niech $\pi_K(v) - \pi_{S \cap K}(v) = 0$ (sytuacja $\pi_S(v) - \pi_{S \cap K}(v) = 0$ jest analogiczna). Wtedy $\pi_K(v) = \pi_{S \cap K}(v)$ oraz

$$\lambda(S, K) \leqslant 1 = \frac{|v - \pi_K(v)|}{|v - \pi_{S \cap K}(v)|} = \frac{d(v, K)}{d(v, S \cap K)} \leqslant \frac{d(v, K)}{d(v, S \cap K)} + \frac{d(v, S)}{d(v, S \cap K)}.$$

Jeśli natomiast $\pi_K(v) - \pi_{S \cap K}(v) \neq 0$ oraz $\pi_S(v) - \pi_{S \cap K}(v) \neq 0$, wtedy z definicji 8.1.3

$$\lambda(S, K) \leqslant d(\mathbb{R}(\pi_K(v) - \pi_{S \cap K}(v)), \mathbb{R}(\pi_S(v) - \pi_{S \cap K}(v)))$$

i stosując nierówność trójkąta, dostajemy

$$\lambda(S, K) \leqslant d(\mathbb{R}(\pi_K(v) - \pi_{S \cap K}(v)), \mathbb{R}(\pi_S(v) - \pi_{S \cap K}(v))) \leqslant$$
$$\leqslant d(\mathbb{R}(\pi_K(v) - \pi_{S \cap K}(v)), \mathbb{R}(v - \pi_{S \cap K}(v))) + d(\mathbb{R}(v - \pi_{S \cap K}(v)), \mathbb{R}(\pi_S(v) - \pi_{S \cap K}(v))) =$$
$$= \frac{|v - \pi_K(v)|}{|v - \pi_{S \cap K}(v)|} + \frac{|v - \pi_S(v)|}{|v - \pi_{S \cap K}(v)|} = \frac{d(v, K)}{d(v, S \cap K)} + \frac{d(v, S)}{d(v, S \cap K)}.$$

Stąd ponieważ $\lambda(S, K) > 0$, zachodzi

$$d(v, S \cap K) \leqslant \frac{1}{\lambda(S, K)} \left( d(v, S) + d(v, K) \right).$$

*ii)* Niech $v \in R \cap L$, $|v| = 1$. Wówczas na mocy obserwacji 8.1.5 *i)*

$$d(\mathbb{R}v, S \cap K) \leqslant \frac{1}{\lambda(S, K)}(d(\mathbb{R}v, S) + d(\mathbb{R}v, K)) \leqslant \frac{1}{\lambda(S, K)}(d(R, S) + d(L, K)).$$

Po przejściu do supermum po wszystkich $v \in R \cap L$, $|v| = 1$ z lewej strony nierówności otrzymujemy tezę. □

**Obserwacja 8.1.6.** *Niech $\Sigma \subset \mathbb{G}_{s,n} \times \mathbb{G}_{k,n}$ będzie podzbiorem o tej własności, że dla dowolnej pary $(S, K) \in \Sigma$ zachodzą $\dim(S \cap K) = const = p$ oraz $p < \min\{s, k\}$. Wówczas odwzorowanie*

$$\lambda : \Sigma \ni (S, K) \longmapsto \lambda(S, K) \in [0, 1]$$

*jest ciągłe.*

Dowód. Ciągłość funkcji $\lambda$ wynika z ciągłości odwzorowania $\psi : \Sigma \ni (S, K) \longmapsto S \cap K \in \mathbb{G}_{p,n}$. Natomiast ciągłość $\psi$ w dowolnym punkcie $(S_0, K_0) \in \Sigma$ jest konsekwencją obserwacji 8.1.4 *i)* oraz obserwacji 8.1.5 *ii)*, bowiem wtedy dla dowolnego $(S, K) \in \Sigma$

$$d(S \cap K, S_0 \cap K_0) \leqslant \frac{1}{\lambda(S_0, K_0)}(d(S, S_0) + d(K, K_0)).$$

□

**Obserwacja 8.1.7.** *Niech $s, k, p, n \in \mathbb{N}$ oraz $p < \min\{k, s\}$. Niech $\widetilde{\Sigma}$ będzie domkniętym podzbiorem zbioru*

$$\Sigma = \{(S, K) \in \mathbb{G}_{s,n} \times \mathbb{G}_{k,n} : \dim(S \cap K) = p\}.$$

*Wówczas*

$$\inf\{\lambda(S, K) : \quad (S, K) \in \widetilde{\Sigma}\} > 0.$$

Dowód. Wynika ze zwartości $\widetilde{\Sigma}$ i ciągłości $\lambda : \Sigma \ni (S, K) \longmapsto \lambda(S, K) \in [0, 1]$. □

**Wniosek 8.1.8.** *Niech $s, k, p, n \in \mathbb{N}$, $p < \min\{k, s\}$ i niech $\widetilde{\Sigma}$ będzie domkniętym podzbiorem zbioru*

$$\Sigma = \{(S, K) \in \mathbb{G}_{s,n} \times \mathbb{G}_{k,n} : \dim(S \cap K) = p\}.$$

*Wtedy istnieje $C > 0$ takie, że dla dowolnych $R, L$ liniowych podprzestrzeni $\mathbb{R}^n$ i dla dowolnej pary $(S, K) \in \widetilde{\Sigma}$ zachodzi*

$$d(R \cap L, S \cap K) \leqslant C \cdot (d(R, S) + d(L, K)).$$

Dowód. Na mocy obserwacji 8.1.5 *ii)* i obserwacji 8.1.7 powyższa nierówność zachodzi ze stałą

$$C = \frac{1}{\inf\{\lambda(S,K): \quad (S,K) \in \widetilde{\Sigma}\}}.$$

□

### 8.2. Warunek Verdiera jako warunek typu $\mathcal{WL}$ klasy $C^q$, $q \geqslant 2$

**Definicja 8.2.1.** Niech $\Lambda$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ będą podrozmaitościami kl. $C^2$, $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$. Mówimy, że para płatów $(\Lambda, \Gamma)$ spełnia *warunek Verdiera w punkcie* $x_0 \in \Gamma$ (ozn. $\mathcal{W}^V(\Lambda, \Gamma, x_0)$), jeżeli istnieje otwarte otoczenie $U_{x_0}$ puntku $x_0$ w $\mathbb{R}^n$ oraz stała $C_{x_0} > 0$ taka, że

$$\forall x \in \Gamma \cap U_{x_0}\ \forall y \in \Lambda \cap U_{x_0} \quad d\,(T_x\Gamma, T_y\Lambda) \leqslant C_{x_0} \cdot |x-y|.$$

Jeżeli para $(\Lambda, \Gamma)$ spełnia warunek Verdiera w każdym punkcie $x_0 \in \Gamma$, to piszemy krótko $\mathcal{W}^V(\Lambda, \Gamma)$.

W roku 1998 Ta Le Loi udowodnił, że

**Twierdzenie 8.2.2.** *Warunek Verdiera jest definiowalny i generyczny.*

Dowód. Zob. [**TL1**] (także [**ŁSW**], [**DW**]). □

**Uwaga 8.2.3.** Warunek Verdiera jest niezmienniczy względem dyfeomorfizmów klasy $C^q$, $q \geqslant 2$ (por. [**Ver**]). Nie jest on jednak niezmienniczy względem dyfeomorfizmów kl. $C^1$ (zob. [**BT**]).

Własność rzutowania warunku Verdiera względem odwzorowań słabo lipschitzowskich kl. $C^q$, $q \geqslant 2$ jest prostą konsekwencją następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 8.2.4.** *Niech* $q \geqslant 2$ *i* $\Lambda$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *będą* $C^q$ *podrozmaitościami takimi, że* $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ *oraz* $\dim \Gamma < \dim \Lambda$. *Rozważmy naturalne rzutowania* $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *oraz* $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *i załóżmy ponadto, że* $\pi_1|_{\Lambda \cup \Gamma}$ *jest zanurzeniem homeomorficznym takim, że restrykcje* $\pi_1|_\Lambda$, $\pi_1|_\Gamma$ *są zanurzeniami kl.* $C^q$. *Załóżmy także, że odwzorowanie* $\pi_2|_{\Lambda\cup\Gamma} \circ (\pi_1|_{\Lambda\cup\Gamma})^{-1}$ *jest słabo lipschitzowskie klasy* $C^q$ *na* $C^q$ *stratyfikacji* $\{\pi_1(\Lambda), \pi_1(\Gamma)\}$. *Wówczas*

$$\mathcal{W}^V(\Lambda, \Gamma) \Longrightarrow \mathcal{W}^V(\pi_1(\Lambda), \pi_1(\Gamma)).$$

Dowód. Przyjmijmy, że $z' = \pi_2|_{\Lambda\cup\Gamma} \circ (\pi_1|_{\Lambda\cup\Gamma})^{-1}(z)$ dla dowolnego $z \in \pi_1(\Lambda \cup \Gamma)$.

Rozważmy dowolny punkt $x_0 \in \pi_1(\Gamma)$. Po wykonaniu dyfeomorficznej zmiany układu współrzędnych kl. $C^2$ w dostatecznie małym otoczeniu punktu $(x_0, x_0')$, możemy założyć, że $\pi_1(\Gamma) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ oraz $\Gamma = \pi_1(\Gamma) \times \{0\}^m = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n+m-k} = \mathbb{R}^k$. Wtedy dla dowolnego punktu $x \in \pi_1(\Gamma)$ zachodzi $x' = 0$. Ponieważ podrozmaitości $\Lambda$ i $\Gamma$ spełniają warunek Verdiera, znajdziemy więc otwarte otoczenie $U_{(x_0,0)}$ punktu $(x_0, 0)$ w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ oraz $C_{(x_0,0)} > 0$ takie, że dla $(x, 0) \in \Gamma \cap U_{(x_0,0)}$ oraz $(y, y') \in \Lambda \cap U_{(x_0,0)}$.

$$d\left(T_{(x,0)}\Gamma, T_{(y,y')}\Lambda\right) \leqslant C_{(x_0,0)} \cdot |(x,0) - (y,y')|.$$

Dzięki słabej lipschitzowości odwzorowania $\pi_2|_{\Lambda\cup\Gamma} \circ (\pi_1|_{\Lambda\cup\Gamma})^{-1}$ na stratyfkacji $\{\pi_1(\Lambda), \pi_1(\Gamma)\}$ znajdziemy otwarte otoczenie $U_{x_0}$ punktu $x_0$ w $\mathbb{R}^n$ i $L_{x_0} > 0$ takie, że dla $x \in \pi_1(\Gamma) \cap U_{x_0}$, $y \in \pi_1(\Lambda) \cap U_{x_0}$

$$\frac{|0 - y'|}{|x - y|} \leqslant L_{x_0}.$$

Zatem bez szkody ogólności możemy przyjąć, że $U_{x_0} = U_{(x_0,0)} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Z powyższego rozumowania dostajemy łatwo, iż dla wszystkich punktów $x \in \pi_1(\Gamma) \cap U_{x_0}$ oraz $y \in \pi_1(\Lambda) \cap U_{x_0}$ zachodzi

$$d\left(T_{(x,0)}\Gamma, T_{(y,y')}\Lambda\right) \leqslant C_{(x_0,0)} \cdot |(x,0) - (y,y')| \leqslant C_{(x_0,0)} \cdot \sqrt{1 + (L_{x_0})^2} \cdot |x - y|,$$

innymi słowy

$$d\left(\mathbb{R}^k, T_{(y,y')}\Lambda\right) \leqslant C_{(x_0,0)} \cdot \sqrt{1 + (L_{x_0})^2} \cdot |x - y|.$$

Zatem po ewentualnym zmniejszeniu $U_{(x_0,0)}$ otrzymamy, że dla $x \in \pi_1(\mathbb{R}^k) \cap U_{x_0}$, $y \in \pi_1(\Lambda) \cap U_{x_0}$

$$d\left(\mathbb{R}^k, T_{(y,y')}\Lambda\right) \leqslant 1 - \alpha,$$

z pewną liczbą $\alpha \in (0, 1)$. Niech teraz $K_y$ oznacza rzut ortogonalny podprzestrzeni $\mathbb{R}^k$ na podprzestrzeń $T_{(y,y')}\Lambda$. Wobec ostatniej nierówności oraz lematu 8.1.1 b), c) otrzymujemy, że $\dim K_y = k$ oraz

$$d\left(\mathbb{R}^k, K_y\right) = d\left(\mathbb{R}^k, T_{(y,y')}\Lambda\right) \leqslant 1 - \alpha.$$

Oczywiste jest, że $\mathbb{R}^k \cap \mathbb{S}^{n+m-1} \subset B_\alpha$, gdzie

$$B_\alpha = \{u \in \mathbb{S}^{n+m-1} : \quad d(\mathbb{R}u, \{0\} \times \mathbb{R}^m) \geqslant \alpha\}.$$

Pokażemy, że $K_y \cap \mathbb{S}^{n+m-1} \subset B_\alpha$. Niech $w \in K_y \cap \mathbb{S}^{n+m-1}$ i wybierzmy $v \in \mathbb{R}^k \cap S^{n+m-1}$ tak, aby

$$v = \frac{\pi_{\mathbb{R}^k}(w)}{|\pi_{\mathbb{R}^k}(w)|}.$$

Wtedy dzięki obserwacji 1.1.3 $f)$ zachodzi $d(\mathbb{R}v, \mathbb{R}w) = d(\mathbb{R}w, \mathbb{R}v)$ i na mocy obserwacji 1.1.3$g)$ mamy $d(\mathbb{R}w, \mathbb{R}v) = d(\mathbb{R}w, \mathbb{R}^k)$. Stąd $d(\mathbb{R}v, \mathbb{R}w) = d(\mathbb{R}w, \mathbb{R}^k)$. Także dzięki obserwacji 1.1.3$g)$ mamy

$$d(\mathbb{R}w, \{0\} \times \mathbb{R}^m) = d\left(\mathbb{R}w, \mathbb{R}\frac{\pi_2(w)}{|\pi_2(w)|}\right).$$

Wówczas ponieważ $v \perp \{0\} \times \mathbb{R}^m$, zatem na mocy obserwacji 1.1.3 j) i nierówności trójkąta dostajemy

$$1 \leqslant d\left(\mathbb{R}v, \{0\} \times \mathbb{R}^m\right) \leqslant d\left(\mathbb{R}v, \mathbb{R}\frac{\pi_2(w)}{|\pi_2(w)|}\right) \leqslant d(\mathbb{R}v, \mathbb{R}w) + d\left(\mathbb{R}w, \mathbb{R}\frac{\pi_2(w)}{|\pi_2(w)|}\right) =$$

$$= d\left(\mathbb{R}w, \mathbb{R}^k\right) + d(\mathbb{R}w, \{0\} \times \mathbb{R}^m) \leqslant d\left(K_y, \mathbb{R}^k\right) + d(\mathbb{R}w, \{0\} \times \mathbb{R}^m) \leqslant 1 - \alpha + d(\mathbb{R}w, \{0\} \times \mathbb{R}^m).$$

Stąd dla dowolnego $w \in K_y \cap \mathbb{S}^{n+m-1}$

$$\alpha \leqslant d(\mathbb{R}w, \{0\} \times \mathbb{R}^m),$$

czyli $K_y \cap S^{n+m-1} \subset B_\alpha$. Stosując obserwację 1.1.3 j) i lemat 8.1.2 $ii)$ znajdujemy $C_\alpha > 0$ taką, że

$$\begin{aligned} d\left(T_x\pi_1(\mathbb{R}^k), T_y\pi_1(\Lambda)\right) &= d\left(\pi_1(\mathbb{R}^k), \pi_1\left(T_{(y,y')}\Lambda\right)\right) \leqslant d\left(\pi_1(\mathbb{R}^k), \pi_1\left(K_y\right)\right) \\ &\leqslant C_\alpha \cdot d\left(\mathbb{R}^k, K_y\right) = C_\alpha \cdot d\left(\mathbb{R}^k, T_{(y,y')}\Lambda\right) \leqslant C_\alpha \cdot C_{(x_0,0)} \cdot \sqrt{1 + (L_{x_0})^2} \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

□

Dowód własności podniesienia warunku Verdiera względem odwzorowań lokalnie lipschitzowskich klasy $C^q$, $q \geqslant 2$ przebiega analogicznie jak w przypadku warunku Whitneya (B). Istotnie,

**Twierdzenie 8.2.5.** *Twierdzenie 7.1.6 pozostaje prawdziwe, jeżeli warunek Whitneya (B) zastąpimy warunkiem Verdiera.*

Dowód. Niech $x_0 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Istnieje wówczas otoczenie $U_{x_0}$ punktu $x_0$ oraz stała $C_{x_0} > 0$ taka, że dla dowolnych $x \in \Gamma_i \cap U_{x_0}$, $y \in \Lambda_i \cap U_{x_0}$, $i = 1, 2$ zachodzi

$$d\left(T_x\Gamma_i, T_y\Lambda_i\right) \leqslant C_{x_0} \cdot |x - y|.$$

*Przypadek I.* Załóżmy, że $\dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \min\{\dim \Lambda_1, \dim \Lambda_2\} = \dim \Lambda_1$ (przypadek $\dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \min\{\dim \Lambda_1, \dim \Lambda_2\} = \dim \Lambda_2$ dowodzi się analogicznie). Wówczas podrozmaitość $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ jest otwarta w $\Lambda_1$, zatem $T_y(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = T_y\Lambda_1$ dla dowolnych $y \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ i na mocy obserwacji 1.1.3 j) dla $x \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap U_{x_0}$, $y \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap U_{x_0}$ mamy

$$d\left(T_x(\Gamma_1 \cap \Gamma_2), T_y(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)\right) \leqslant d\left(T_x\Gamma_1, T_y\Lambda_1\right) \leqslant C_{x_0} \cdot |x - y|.$$

*Przypadek II.* Załóżmy teraz, że $\dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2 < \min\{\dim \Lambda_1, \dim \Lambda_2\}$. Niech

$$\Sigma = \{(S, K) \in \mathbb{G}_{\dim \Lambda_1, n} \times \mathbb{G}_{\dim \Lambda_2, n} : \dim(S \cap K) = \dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2\}.$$

Z implikacji w założeniach twierdzenia 7.1.6 otrzymujemy, że po ewentualnym zmniejszeniu otoczenia $U_{x_0}$ zbiór

$$\widetilde{\Sigma} = \overline{\{(T_y\Lambda_1, T_y\Lambda_2) \in \mathbb{G}_{\dim \Lambda_1, n} \times \mathbb{G}_{\dim \Lambda_2, n} : \quad y \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap U_{x_0}\}}$$

jest zwartym podzbiorem $\Sigma$. Na mocy wniosku 8.1.8 istnieje więc stała $\widetilde{C}_{x_0} > 0$ taka, że dla dowolnych $x \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap U_{x_0}$, $y \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap U_{x_0}$ mamy

$$d\left(T_x\Gamma_1 \cap T_x\Gamma_2, T_y\Lambda_1 \cap T_y\Lambda_2\right) \leqslant \widetilde{C}_{x_0} \cdot \left(d\left(T_x\Gamma_1, T_y\Lambda_1\right) + d\left(T_x\Gamma_2, T_y\Lambda_2\right)\right).$$

Ponieważ $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$, więc dla $y \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap U_{x_0}$ mamy $T_y\left(\Lambda_1 \cap \Lambda_2\right) = T_y\Lambda_1 \cap T_y\Lambda_2$. Ponadto dla dowolnego $x \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap U_{x_0}$ zachodzi $T_x\left(\Gamma_1 \cap \Gamma_2\right) \subset T_x\Gamma_1 \cap T_x\Gamma_2$, stąd

$$d\left(T_x\left(\Gamma_1 \cap \Gamma_2\right), T_y\left(\Lambda_1 \cap \Lambda_2\right)\right) \leqslant d\left(T_x\Gamma_1 \cap T_x\Gamma_2, T_y\Lambda_1 \cap T_y\Lambda_2\right) \leqslant \widetilde{C}_{x_0} \cdot 2C_{x_0} \cdot |x - y|.$$

□

**Twierdzenie 8.2.6.** *Niech* $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *będą naturalnymi rzutowaniami. Rozważmy* $\Gamma$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *podrozmaitości klasy* $C^q$, $q \geqslant 2$ *takie, że* $\Gamma \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, *rzutowanie* $\pi_1|_{\Lambda\cup\Gamma}$ *jest zanurzeniem homeomorficznym i restrykcje* $\pi_1|_\Gamma$, $\pi_1|_\Lambda$ *są zanurzeniami klasy* $C^q$. *Załóżmy dodatkowo, że odwzorownie* $f = \pi_2|_{\Lambda\cup\Gamma} \circ (\pi_1|_{\Lambda\cup\Gamma})^{-1}$ *jest lokalnie lipschitzowskie. Wówczas dla dowolnych* $C^q$ *podrozmaitości* $M, N \subset \mathbb{R}^n$ *takich, że* $M, N \subset \pi_1(\Gamma) \cup \pi_1(\Lambda)$, $N \subset \overline{M} \setminus M$ *i rodzina* $\{M, N\}$ *jest zgodna ze stratyfikacją* $\{\pi_1(\Lambda), \pi_1(\Gamma)\}$, *zachodzi implikacja*

$$\mathcal{W}^V(M,N), \quad \mathcal{W}^V(\Lambda,\Gamma) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{W}^V(graphf|_M, graphf|_N).$$

Dowód. Będziemy oznaczać współrzędne punktu $\widetilde{z} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ jako $\widetilde{z} = (z, z')$, gdzie $z \in \mathbb{R}^n$, $z' \in \mathbb{R}^m$. Zauważmy, że jeśli $M, N \subset \pi_1(\Lambda)$ lub $M, N \subset \pi_1(\Gamma)$, wówczas $\mathcal{W}^V(graphf|_M,\ graphf|_N)$ zachodzi trywialnie, gdyż warunek Verdiera jest $C^2$ niezmienniczy.

Załóżmy, że $M \subset \pi_1(\Lambda)$ oraz $N \subset \pi_1(\Gamma)$. Pokażemy, że spełnione są założenia[1] twierdzenia 8.2.5 z $\Lambda_1 = \Lambda$, $\Lambda_2 = M \times \mathbb{R}^m$, $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_2 = N \times \mathbb{R}^m$. Z założenia otrzymujemy $\mathcal{W}^V(\Lambda,\Gamma)$, natomiast $\mathcal{W}^V(M \times \mathbb{R}^m, N \times \mathbb{R}^m)$ zachodzi dzięki obserwacji 1.1.3 $k$). Ponadto

$$graphf|_N = \Gamma \cap (N \times \mathbb{R}^m) \qquad \text{oraz} \qquad graphf|_M = \Lambda \cap (M \times \mathbb{R}^m)$$

są $C^q$ podrozmaitościami, $graphf|_N \subset \overline{graphf|_M} \setminus graphf|_M$ i dla dowolnych $(x, x') \in \Gamma$ zachodzi[2]:

$$(\dagger) \qquad T_{(y,y')}(\Lambda \cap (M \times \mathbb{R}^m)) = T_{(y,y')}\Lambda \cap (T_y M \times \mathbb{R}^m)$$

Niech $(x_0, x_0')$ będzie dowolnie wybranym punktem z $\Gamma$. Dzięki lokalnej lipschitzowości odwzorowania $f$ (zob. obserwacja 1.1.9) znajdziemy otwarte otoczenia $U_{(x_0,x_0')}$ punktu $(x_0, x_0')$ oraz $\alpha > 0$ takie, że dla dowolnego $(y, y') \in \Lambda \cap U_{(x_0,x_0')}$ zachodzi $\delta\left(T_{(y,y')}\Lambda, \{0\} \times \mathbb{R}^m\right) \geqslant \alpha > 0$. Dzięki ciągłości $\delta$ otrzymujemy więc, że dla dowolnej podprzestrzeni liniowej $H$, należącej do zbioru

$$\overline{\{T_{(y,y')}\Lambda \in \mathbb{G}_{\dim\Lambda, n+m} : \quad (y, y') \in \Lambda \cap U_{(x_0,x_0')}\}}$$

zachodzi nierówność

$$(\mathcal{N}) \qquad \delta(H, \{0\} \times \mathbb{R}^m) \geqslant \alpha > 0.$$

Niech $\{(y_\nu, y_\nu')\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \Lambda \cap (M \times \mathbb{R}^m)$ będzie ciągiem zbieżnym do punktu $(x_0, x_0')$. Bez szkody ogólności możemy przyjąć, że $\left\{T_{(y_\nu,y_\nu')}(\Lambda \cap (M \times \mathbb{R}^m))\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny i

$$T_{(y_\nu,y_\nu')}\Lambda \longrightarrow S_1 \quad \text{oraz} \quad T_{(y_\nu,y_\nu')}(M \times \mathbb{R}^m) \longrightarrow S_2 \ (\nu \longrightarrow +\infty),$$

gdzie $S_1 \in \mathbb{G}_{\dim\Lambda, n+m}$, $S_2 \in \mathbb{G}_{\dim M+m, n+m}$. Wtedy ciąg $\{T_{y_\nu} M\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, podprzestrzeń $S_1$ spełnia nierówność $(\mathcal{N})$ oraz $S_2 = \left(\lim\limits_{\nu\to+\infty} T_{y_\nu} M\right) \times \mathbb{R}^m$. Zauważmy, że $\dim S_1 \cap S_2 \geqslant \dim M$, bowiem dzięki $(\dagger)$ mamy inkluzję $\lim\limits_{\nu\to+\infty} T_{(y_\nu,y_\nu')}(\Lambda \cap (M \times \mathbb{R}^m)) \subset S_1 \cap S_2$. Dzięki nierówności $(\mathcal{N})$ otrzymujemy, że $S_1 \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^m) = \{0\}$, skąd $\dim S_1 \cap S_2 \leqslant \dim M$, zatem $\dim S_1 \cap S_2 = \dim M = \dim(\Lambda \cap (M \times \mathbb{R}^m))$. □

**Wniosek 8.2.7.** *Warunek Verdiera jest warunkiem typu* $\mathcal{WL}$ *klasy* $C^q$, $q \geqslant 2$.

## 8.3. Własność stożkowości warunku Verdiera klasy $C^q$, $q \geqslant 2$

**Lemat 8.3.1.** *Niech* $k$ *będzie ustaloną liczbą naturalną,* $k \leqslant n$ *i rozważmy liniową podprzestrzeń* $E \subset \mathbb{R}^n$, $\dim E = k$. *Niech* $\mathcal{L}(E, E^\perp)$ *będzie przestrzenią wektorową odwzorowań liniowych z normą* $||l|| = \sup\{|f(v)| : \ v \in S, |v| = 1\}$. *Rozważmy grassmannian* $\mathbb{G}_{k,n}$ *z metryką* $d$ *oraz odwzorowanie*

$$\varphi : \mathcal{L}(E, E^\perp) \ni l \longmapsto \widehat{l} \in \mathbb{G}_{k,n}, \qquad gdzie \qquad \widehat{l} = \{v + l(v) : \quad v \in E\}.$$

*Wówczas* $\varphi$ *jest lipschitzowskie oraz*

$$\forall\ f, g \in \mathcal{L}(E, E^\perp) \quad d\left(\widehat{f}, \widehat{g}\right) \leqslant 2 \cdot ||f - g||.$$

Dowód. Niech $v \in E$, $|v| = 1$. Rozważmy dwa odwzorowania $f, g \in \mathcal{L}(E, E^\perp)$. Wtedy dzięki obserwacji 1.1.3 d) i nierówności trójkąta otrzymujemy

$$d\left(\mathbb{R}\frac{v + f(v)}{|v + f(v)|}, \widehat{g}\right) \leqslant d\left(\mathbb{R}\frac{v + f(v)}{|v + f(v)|}, \mathbb{R}\frac{v + g(v)}{|v + g(v)|}\right) \leqslant \left|\frac{v + f(v)}{\sqrt{1 + |f(v)|^2}} - \frac{v + g(v)}{\sqrt{1 + |g(v)|^2}}\right|$$

[1] inaczej twierdzenia 7.1.6 dla warunku Verdiera

[2] dzięki przecięciu transwersalnemu $M \times \mathbb{R}^m$ i $\Lambda$ w $\pi_1(\Lambda) \times \mathbb{R}^m$, por. obserwacje 1.1.8, 1.1.9

$$= \left| \frac{v+f(v)}{\sqrt{1+|f(v)|^2}} - \frac{v+g(v)}{\sqrt{1+|f(v)|^2}} + [v+g(v)] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1+|f(v)|^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+|g(v)|^2}} \right] \right| =$$

$$= \left| \frac{f(v)-g(v)}{\sqrt{1+|f(v)|^2}} + [v+g(v)] \cdot \frac{\sqrt{1+|g(v)|^2} - \sqrt{1+|f(v)|^2}}{\sqrt{1+|f(v)|^2} \cdot \sqrt{1+|g(v)|^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+|g(v)|^2} + \sqrt{1+|f(v)|^2}}{\sqrt{1+|g(v)|^2} + \sqrt{1+|f(v)|^2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{f(v)-g(v)}{\sqrt{1+|f(v)|^2}} \right| + \sqrt{1+|g(v)|^2} \cdot \frac{\big||g(v)|-|f(v)|\big| \cdot \big||g(v)|+|f(v)|\big|}{\sqrt{1+|f(v)|^2} \cdot \sqrt{1+|g(v)|^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|f(v)|^2} + \sqrt{1+|g(v)|^2}} \leqslant$$

$$\leqslant |f(v)-g(v)| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|f(v)|^2}} \cdot \left( 1 + \frac{|f(v)|+|g(v)|}{\sqrt{1+|f(v)|^2} + \sqrt{1+|g(v)|^2}} \right) \leqslant 2 \cdot |f(v)-g(v)| \leqslant 2 \cdot ||f-g||.$$

Stąd

$$d\left(\widehat{f}, \widehat{g}\right) = \sup_{v \in E \cap \mathbb{S}^{n-1}} d\left( \mathbb{R}\frac{v+f(v)}{|v+f(v)|}, \widehat{g} \right) \leqslant 2 \cdot ||f-g||.$$

□

Z lematu 8.3.1 natychmiast otrzymujemy następujący

**Wniosek 8.3.2.** *Niech $\Lambda$ będzie definiowalną podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ klasy $C^q$, $q \geqslant 2$. Wówczas dla dowolnego punktu $x_0 \in \Lambda$ istnieje stała $C_{x_0} > 0$ oraz otwarte otoczenie $U$ punktu $x_0$ takie, że*

$$\forall\ x, y \in U \cap \Lambda \quad d\left(T_x\Lambda, T_y\Lambda\right) \leqslant C_{x_0} \cdot |x-y|.$$

Przejdziemy teraz do bezpośredniego dowodu własności stożkowości warunku Verdiera.

**Twierdzenie 8.3.3.** *Warunek Verdiera ma własność stożkowości klasy $C^q$, $q \geqslant 2$.*

Dowód. Ponieważ warunek Verdiera jest niezmienniczy względem definiowalnych dyfeomorfizmów kl. $C^2$, możemy bez szkody ogólności posługiwać się równoważną definicją własności stożkowości, podaną w uwadze 6.1.2. Rozważmy zatem dwie definiowalne podrozmaitości $M$, $N \subset \mathbb{R}^n$ klasy $C^q$, $q \geqslant 2$ i takie, że $N \subset \overline{M} \setminus M$. Załóżmy ponadto, że $\mathcal{W}^V(M,N)$.

a) Pokażemy, że zachodzi $\mathcal{W}^V\left(M \times (0;1), M \times \{1\}\right)$. Niech $x_0 \in M \times \{1\}$, $x_0 = (x_0',1)$ z pewnym $x_0' \in M$. Na mocy wniosku 8.3.2 znajdujemy otoczenie $U_{x_0'}$ punktu $x_0'$ w $\mathbb{R}^n$ i stałą $C_{x_0'} > 0$ taką, że

$$\forall\ x', y' \in U_{x_0'} \cap M \quad d\left(T_{x'}M, T_{y'}M\right) \leqslant C_{x_0'} \cdot |x'-y'|.$$

Pokażemy otoczenie $U_{x_0} := U_{x_0'} \times (0;1+\varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$ i stała $C_{x_0} := C_{x_0'}$ spełniają warunki tezy. Niech $x \in U_{x_0} \cap (M \times \{1\})$, $y \in U_{x_0} \cap (M \times (0;1))$. Wtedy $x = (x',1)$, $y = (y', y_{n+1})$ z pewnymi punktami $x'$, $y' \in U_{x_0'} \cap M$ i $y_{n+1} \in (0;1)$. Ponadto, $T_x(M \times \{1\}) = T_{x'}M \times \{0\}$ oraz $T_y(M \times (0;1)) = T_{y'}M \times \mathbb{R}$. Stąd na mocy obserwacji 1.1.3 *j)*

$$d\left(T_{x'}M \times \{0\}, T_{y'}M \times \mathbb{R}\right) \leqslant d\left(T_{x'}M \times \{0\}, T_{y'}M \times \{0\}\right) = d\left(T_{x'}M, T_{y'}M\right) \leqslant C_{x_0'} \cdot |x'-y'| \leqslant C_{x_0} \cdot |x-y|.$$

Dowód $\mathcal{W}^V(N \times (0;1), N \times \{1\})$ jest analogiczny.

b) Dowód $\mathcal{W}^V(M \times (0;1), N \times (0;1))$ wynika elementarnie z obserwacji 1.1.3 *k)*.

c) Niech $x_0 \in N \times \{1\}$, $x_0 = (x_0',1)$. Dzięki $W^V(M,N)$ otrzymujemy otwarte otoczenie $U_{x_0'}$ punktu $x_0'$ i stałą $C_{x_0'} > 0$ taką, że

$$\forall\ x' \in U_{x_0'} \cap N \quad \forall y' \in U_{x_0'} \cap M \qquad d\left(T_{x'}N, T_{y'}M\right) \leqslant C_{x_0'} \cdot |x'-y'|.$$

Określamy więc szukane otoczenie punktu $x_0$ jako $U_{x_0} := U_{x_0'} \times (0,1+\varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$. Niech $C_{x_0} := C_{x_0'}$. Wtedy dla dowolnych $x \in U_{x_0} \cap (N \times \{1\})$ oraz $y \in U_{x_0} \cap (M \times (0;1))$ o współrzędnych $x = (x',1)$, $y = (y', y_{n+1})$, gdzie $x' \in N$, $y' \in M$, $y_{n+1} \in (0;1)$, otrzymujemy (dzięki obserwacji 1.1.3 *j)*)

$$d\left(T_x(N \times \{1\}), T_y(M \times (0;1))\right) = d\left(T_{x'}N \times \{0\}, T_{y'}M \times \mathbb{R}\right) \leqslant$$
$$d\left(T_{x'}N \times \{0\}, T_{y'}M \times \{0\}\right) = d(T_{x'}N, T_{y'}M) \leqslant C_{x_0'} \cdot |x'-y'| \leqslant C_{x_0} \cdot |x-y|.$$

□

**Wniosek 8.3.4.** *Warunek Verdiera jest warunkiem typu $\mathcal{T}$ klasy $C^q$, $q \geqslant 2$.*

# Bibliografia


[BT] H. Brodersen, D. Trotman, *Whitney (b) - regularity is weaker than Kuo's ratio tests for real algebraic stratifications*, Math. Scand. 45 (1979), p.27-34.

[Cos] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, Dottorato di Ricerca in Mathematica, Pisa, 2000.

[Cz] M. Czapla, *Invariance of regularity conditions under definable, locally Lipschitz, weakly bi-Lipschitz mappings* (to appear in Ann. Polon. Math.)

[Di] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London, 1960.

[DG] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed point theory*, vol. I, Polish Scientific Publishers, Warsaw 1982.

[vD1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, No. 248 in LMS, Lecture Notes Series, Cambridge University Press, 1998.

[vD2] L. van den Dries, *O-minimal structures, Logic: from Foundations to Applications* (Conference Proceedings), Oxford University Press, 1996, 137-185.

[DM1] L. van den Dries, C. Miller, *Geometrical categories and o-minimal structures*, Duke Mathematical Journal vol.84 (1996), no.2, p. 497-540.

[DM2] L. van den Dries, C. Miller, *On the real expotential field with restricted analytic functions*, Israel J. Math. 85 (1994), p. 19-56.

[DW] Z. Denkowska, K. Wachta, *Une construction de la stratification sous-analytique avec la condition (w)*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 35 (1987), n. 7-8, 401-405.

[ES] R. Engelking, K. Sieklucki, *Geometria i topologia, część II, Topologia*, PWN t. 54, Warszawa 1980.

[Ha] R. M. Hardt, *Triangulation of Subanalytic Sets and Proper Light Subanalytic Maps*, Inventiones mathematicae 38, 207-217 (1977).

[Hi1] H. Hironaka, *Subanalytic sets*, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y.Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, 453-493.

[Hi2] H. Hironaka, *Triangulations of algebraic sets*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 29, 1975.

[Kuo] T.-C. Kuo, *The ratio test for analytic Whitney stratifications*, Liverpool Singularities Symposium I, Lecture Notes in Mathematics 192, pp. 141-149, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1971.

[Ł1] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, I.H.E.S. Bur-sur-Yvette, 1965.

[Ł2] S. Łojasiewicz, *Triangulation of semi-analytic sets*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Sér. 3, 18 no 4. (1964), 449-474.

[Ł3] S. Łojasiewicz, *Stratifications et triangulations sous-analytiques*, Seminari Geometria, Bologna, 1986, 83-97.

[ŁSW] S. Łojasiewicz, J.Stasica, K.Wachta, *Stratifications sous-analytiques. Condition de Verdier,* Bull. Polish Acad. Math. 34 (1986), 531-539.

[Kuo] T.-C. Kuo, *The ratio test for analytic Whitney stratifications*, Liverpool Singularities Symposium I, Lecture Notes in Mathematics 192, pp. 141-149, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1971.

[M1] C. Miller, *Expansion of the real field with power functions*, Ann. Purre Appl. Logic 68 (1994), p. 79-94.

[M2] C. Miller, *Expotentiation is hard to avoid*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), 257-259.

[Sh1] M. Shiota, *Whitney triangulations of semialgebraic sets*, Ann. Polon. Math. 87, 2005, p. 237-246.

[Sh2] M. Shiota, *Geometry of subanalitic and semialgebraic sets*, Progress in Math., 150, Birkhäuser, 1997.

[TL1] T. Le Loi, *Verdier and strict Thom stratifications in o-minimal structures*, Illinois Journal of Mathematics, vol. 42, number 2, September 1998.

[TL2] T. Le Loi, *Whitney stratification of sets definable in the structure* $\mathbb{R}_{exp}$, Banach Center Publications, vol. 33 (1996), 401-409.

[Tro] D.J.A. Trotman, *Geometric versions of Whitney regularity for smooth stratifications*, Ann. Scienr, Ec.Norm.Sup. $4^e$ serie, t.12, 1979, p. 453-463.

[Val] G. Valette, *Lipschitz triangulations* , Illinois Journal of Mathematics, vol. 49, no. 3, Fall 2005, p. 953-979.

[Ver] J.-L. Verdier, *Stratifications de Whitney et Théorème de Bertini-Sard*, Invent. Math. 36 (1976), p.295-312.

[Wh1] H. Whitney, *Tangents to an Analytic Variety*, Annals of Math., vol. 81, 1965, pp. 496-549.

[Wh2] H. Whitney, *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.