Sławomir Dinew

Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a i jego zastosowania w geometrii

Praca doktorska

Opiekun:

Prof. dr hab. Sławomir Kołodziej

Uniwersytet Jagielloński

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Kraków 2009

Spis treści

1. Wstęp

Teoria pluripotencjału na zwartych rozmaitościach kählerowskich powstała jako samodzielna dziedzina w ostatniej dekadzie. O ile pewne wyniki znane już były dużo wcześniej (szczególnie na przestrzeniach rzutowych) to dopiero niedawno, głównie dzięki pracom Guedja, Zeriahiego i ich współpracowników ([GZ1], [GZ2], [BGZ], [CoGZ], [EGZ], [BEGZ]) oraz Kołodzieja ([K2], [K3]) teoria ta rozwinęła się i oddzieliła od teorii pluripotencjału na obszarach w $\mathbb{C}^n$. Odnotujmy, że główną motywacją rozwoju tej dziedziny są zastosowania w geometrii i dynamice zespolonej.

Jako iż jest to teoria bardzo młoda, nadal wiele wyników jest jeszcze w formie dalekiej od optymalnej. Także wiele problemów pozostaje nierozwiązanych. Metody w tej dziedzinie często opierają się na podobnych ideach jak w teorii płaskiej (pod tym określeniem będziemy w pracy rozumieć teorię pluripotencjału na obszarach w $\mathbb{C}^n$). Odnotujmy jednak wyraźnie iż "nowa" teoria nie jest prostym uogólnieniem "starej" i nie wszystkie wyniki z przypadku płaskiego da się przenieść.

Celem tej pracy jest omówienie powstałej dziedziny, wyjaśnienie podstawowych pojęć i pomysłów oraz zaprezentowanie ich zastosowań jak też i możliwych kierunków dalszych badań. Akcent w pracy oczywiście pada na wyniki własne autora wzięte z prac [Di1], [Di2], [Di3], [Di4] oraz ze wspólnej pracy z Z. Zhangiem [DZ].

Autor chciałby już na początku zaznaczyć, że jest to praca z analizy. Tak więc część geometryczna została potraktowana wyłącznie jako wyjaśnienie struktury przestrzeni na której będziemy pracować, bądź też subtelności związanych z konkretnym analitycznym problemem. W wyniku tej konwencji rozdział geometryczny różni się znacząco od pozostałych - większość z pojęć tam wprowadzonych została omówiona bardzo skrótowo i zazwyczaj bez podawania przykładów (jednak z odsyłaczami do literatury).

Intencją autora było osadzenie własnych wyników we w miarę spójnych ramach rozwiniętej już teorii. Z racji ograniczonej objętości pracy niektóre ważne wyniki zostały potraktowane skrótowo. Z kolei innym częściom poświęcono znacznie więcej uwagi niż to zazwyczaj się robi. W takich przypadkach autorowi chodziło o podkreślenie narzędzi, które odgrywają istotną rolę w oryginalnych wynikach pracy.

Praca dzieli się na cztery rozdziały. W pierwszym z nich została omówiona teoria pluripotencjału na obszarach w $\mathbb{C}^n$. Jako pierwsza została omówiona teoria prądów zespolonych. Elementem oryginalnym jest tu przykład dwóch gładkich dodatnich $(2,2)$-form na $\mathbb{C}^4$ o niedodatnim iloczynie zewnętrznym. Przykład ten pochodzi z pracy [Di4]. Następny krótki podrozdział zawiera szkic teorii topologii pluri-cienkiej. Dalej została omówiona klasyczna teoria pluripotencjału, w szczególności operator Monge'a-Ampère'a (w przypadku ograniczonych funkcji plurisubharmonicznych), pojemności i funkcje ekstremalne. W kolejnym podrozdziale omówiona została teoria klas Cegrella. W ostatniej części pierwszego rozdziału został zaprezentowany jeden z głównych wyników autora - nierówność dla mieszanych miar Monge'a-Ampère'a. Wynik ten pochodzi z pracy [Di2].

W drugim rozdziale podano podstawowe fakty i definicje geometryczne wykorzystywane w pracy. Część ta zaczyna się od wprowadzenia pojęcia zwartych rozmaitości kählerowskich i pokazania kilku przykładów. Następnie zostały naszkicowane pewne pojęcia związane z dywizorami i wiązkami. Rozdział kończy się przedstawieniem pewnych szczególnych klas dywizorów (szerokich, nef i dużych), wiązki kanonicznej i klasy Cherna.

Trzeci rozdział dotyczy równania Monge'a-Ampère'a na zwartych rozmaitościach kählerowskich. Jest to najważniejsza część pracy zawierająca główne wyniki uzyskane przez autora. Na początku omówiono geometryczną interpretację rozwiązań tego równania oraz naszkicowano dowód twierdzenia Calabiego-Yau. Następna część została poświęcona ważnemu uogólnieniu form kählerowskich - tak zwanym dużym formom. Wykazana została ciągłość rozwiązań w szczególnym przypadku (jest to wynik należący do Z. Zhanga, jednak pełne rozumowanie zostało wzięte z pracy [DZ]). W dalszych podrozdziałach zostało omówione równanie Monge'a-Ampère'a w klasach Cegrella. Kolejno naszkicowano dowód istnienia rozwiązań (twierdzenie Guedja-Zeriahiego) oraz podano dowód jedyności (jest to wynik autora pochodzący z pracy [Di3]). Następnie został omówiony problem stabilności rozwiązań. Przedstawiono trzy ważne wyniki w tej dziedzinie należące odpowiednio do Błockiego [Bl5], Eyssidieux, Guedja i Zeriahiego [EGZ] oraz Kołodzieja [K3]. Ostatni wynik został uogólniony i wzmocniony (rozumowanie pochodzi z pracy [DZ]). Ostatnia część tego rozdziału zawiera twierdzenia o wyższej regularności rozwiązań równania Monge'a-Ampère'a.

Czwarty rozdział dotyczy potoku Kählera-Ricciego, jego zastosowań w geometrii oraz problemów z nim związanych do których rozwiązania można stosować metody teorii pluripotencjału. Rozdział ten służy w pewnym sensie jako ilustracja aktualnych badań i stawianych hipotez.

Odnotujmy, że ciągłość rozwiązań w przypadku dużych form, wykazana w [DZ], została niedawno wykorzystana przez Songa i Tiana [ST2] oraz Tosattiego [To] do badania problemów geometrycznych. Natomiast nierówność dla mieszanych miar Monge'a-Ampère'a z pracy [Di2] i metody dowodu jedyności z [Di3] zostały użyte przez Boucksoma, Eyssidieux Guedja i Zeriahiego w pracy [BEGZ].

Teoria pluripotencjału stała się także bardzo skutecznym narzędziem w dynamice zespolonej. Szczególnie problemy związane z regularnością potencjałów dla prądów Greena, jak i dla różnego typu specjalnych miar wydają sie być powiązane z teorią regularności dla operatora Monge'a-Ampère'a opisanej w trzecim rozdziale. W pracy tej nie będziemy się zajmować tymi zagadnieniami, odsyłamy tutaj do pracy Dinha, Nguyena i Siboniego [DNS], gdzie można znaleźć pewne wyniki częściowo potwierdzające wspomniane wyżej związki.

Notacja i konwencje. W pracy będą używane standardowe notacje i konwencje stosowane w analizie. W wielu oszacowaniach stałe pomocnicze będą oznaczane jako C, a w przypadkach, gdy stałych tych jest dużo dla jasności będziemy je numerować. Miarę Lebesgue'a będziemy oznaczać przez $d\lambda$ niezależnie od tego czy jest to miara w obszarze w $\mathbb{C}^n$ czy też miara w mapie na rozmaitości. Zgodnie z historycznym rozwojem matematyki 0 **nie** jest liczbą naturalną.

Pewnym utrudnieniem przy pisaniu tej pracy była nieustalona jeszcze terminologia. Tak więc w wielu miejscach oprócz nazwy przyjętej przez autora będziemy też podawać jej synonimy wystepujące w literaturze. Podobnie będzie w przypadku nieustalonej jeszcze notacji (np. w klasach Cegrella na rozmaitościach).

W związku z niektórymi pojęciami z jezyka angielskiego autor stanął przed dylematem: z jednej strony nie chciał powielać złej (lecz niestety modnej) praktyki wprowdzania kolejnych anglicyzmów do polskiej terminologii naukowej, z drugiej zaś jest on zdania iż praca doktorska nie jest właściwym miejscem do ustalania polskiego nazewnictwa. Dodatkowo należy podkreślić iż większość kłopotów była związana z terminologią geometryczną czyli tematyką drugorzędną w pracy. Przyjęty więc został wariant kompromisowy dosłownego tłumaczenia wyrazów na język polski (np. "big divisor" zostało przetłumaczone jako *dywizor duży*). Autor zdaje sobie sprawę iż często nie oddaje to pełnego sensu (bądź też gry słów) angielskiego odpowiednika. Wyjątki od tej reguły stanowią wyrazy już utrwalone w polskiej terminologii (np. nef dywizor) oraz pojęcie "variety", które zostało przetłumaczone jako zbiór analityczny (choć ta ostatnia nazwa w polskiej terminologii oznacza istotnie szersze pojęcie). Tam gdzie było to możliwe autor starał się także unikać wyrazów zawierających przedrostki "quasi" bądź "pseudo", gdyż jego zdaniem świadczą one o sztuczności i małym znaczeniu definiowanych obiektów.

Podziękowania. Przede szystkim chciałbym podziękować moim dwóm ojczyznom Bułgarii i Polsce za stworzenie warunków do mojej edukacji i rozwoju naukowego, choć okres ten przypadł na bardzo trudne dla Nich czasy.

Słowa podziękowania należą się także moim rodzicom którzy, nie będąc naukowcami, stworzyli wokół mnie odpowiednią atmosferę i zawsze mnie wspierali w moich poczynaniach.

Chciałbym także wyrazić wdzięczność moim pierwszym nauczycielom z czasów szkolnych Georgi Dymitrowowi i profesorowi Nikołajowi Nikołowowi za rozbudzenie i pokierowanie moich matematycznych zaiteresowań.

W czasie studiów, seminariów i zajęć wielki wpływ na mnie wywarli profesor Marek Jarnicki, profesor Włodzimierz Zwonek, profesor Zbigniew Błocki oraz doktor Armen Edigarian. Im, a także innym nauczycielom akademickim Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, którzy mieli istotny wkład w mój rozwój matematyczny składam słowa szczerego podziękowania.

W trakcie studiów doktoranckich miałem możliwość przebywać gościnnie na Uniwersytecie w Tuluzie (Francja) na zaproszenie profesora Ahmeda Zeriahiego, jak też i na Uniwersytecie w Umea (Szwecja) na zaproszenie profesora Urbana Cegrella. Pobyty te wzbogaciły mój światopogląd matematyczny (i nie tylko) oraz przyczyniły się istotnie do powstania tej pracy. Tak więc składam wyrazy wdzięczności obu profesorom i Uniwerstytetom za okazaną gościnność.

Wiele także skorzystałem z rozmów ze starszymi i młodszymi kolegami. Nie może więc zabraknąć podziękowań dla mojego brata Żywomira Dinewa, a także dla Grzegorza Kapustki, Szymona Plisia i Łukasza Kosińskiego jak też i dla moich zagranicznych przyjaciół Zhou Zhanga i Phama Hoanga Hiepa.

Największe wyrazy wdzięczności jednak niewątpliwie należą sie mojemu promotorowi profesorowi Sławomirowi Kołodziejowi. Za wysiłek włożony w mój rozwój, za cierpliwość przy korektach, za wszystkie cenne uwagi, za olbrzymią ilość poświęconego czasu - serdecznie dziękuję.

Powstanie pracy było współfinansowane przez ministerialny grant promotorski N N 201 271135.

2. Podstawowe pojęcia i definicje

2.1. Teoria pluripotencjału.

2.1.1. *Prądy.* Prądy są podstawowym narzędziem w teorii pluripotencjału. Są to uogólnienia form różniczkowych. Poniżej przedstawimy potrzebne pojęcia.

Definicja 2.1.1 (Prądy). *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$. Prądem stopnia p w Ω nazywamy formę różniczkową stopnia p na Ω której współczynniki są dystrybucjami. Przestrzeń prądów stopnia p w Ω oznaczamy przez $\mathcal{D}_p(\Omega)$.*

Uwaga 2.1.2. *Definicja ta przenosi się w oczywisty sposób na gładkie rozmaitości.*

Prąd stopnia p działa na formach próbnych stopnia $(n-p)$ (czyli $(n-p)$-formach o współczynnikach w $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$) w następujący sposób:

Niech

$$\phi = \sum_{|J|=n-p}{}' \phi_J dx_J$$

będzie formą próbną (stosujemy tu następujące oznaczenia: $J = (j_1, j_2, \cdots, j_{n-p})$ jest wielowskaźnikiem, $dx_J := dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-p}}$, a znak $'$ oznacza sumowanie tylko po uporządkowanych wielowskaźnikach tzn. $1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-p} \leq n$). Jeżeli Θ jest prądem stopnia p, to można go zapisać jako

$$\Theta = \sum_{|I|=p}{}' \Theta_I dx_I,$$

gdzie Θ_I są dystrybucjami. Działanie Θ na ϕ określamy jako

$$\Theta(\phi) := \sum_{|J|=n-p}{}' \sum_{|I|=p}{}' \Theta_I(\phi_J) dx_I \wedge dx_J.$$

Oczywiście tylko wielowskaźniki I będące dopełnieniami J (tzn. $I \cup J = \{1, 2, \cdots, n\}$) dają niezerowy wkład do sumy.

Dalej w pracy często będziemy definiować prądy poprzez określenie ich działania na formach próbnych odpowiedniego stopnia.

Uwaga 2.1.3. *Wszystkie operacje algebraiczne jak sumowanie czy mnożenie przez funkcję które da się określić na dystrybucjach przenoszą się w sposób naturalny na prądy.*

Podstawowym przykładem jest *prąd całkowania*:

Przykład 2.1.4. *Niech X będzie podrozmaitością Ω (dla ustalenia uwagi kowymiaru 1). Definiujemy prąd całkowania $[X]$ za pomocą wzoru*

$$[X](\phi) = \int_X \phi,$$

gdzie ϕ jest $(n-1)$-formą o współczynnikach w $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Na przykład gdy X jest określona przez $\{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega | \ x_n = 0\}$, $[X]$ równa się $\delta_{(x',0)} dx_n$, gdzie $\delta_{(x',0)}$ jest waluacją

$$\delta_{(x',0)}(\psi) := \psi(x', 0).$$

Omówmy teraz sytuację zespoloną. Wiadomo iż dz_i oraz $d\bar{z}_j$ tworzą bazę w przestrzeni 1- form, istnieje więc naturalny rozkład na sumę prostą dla r-form w $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ dany przez

$$\mathcal{C}_p(\Omega) = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{C}_{p,q}(\Omega),$$

gdzie $\mathcal{C}_{p,q}(\Omega)$ składa się z form typu

$$\phi = \sum_{|I|=p, \ |J|=q}{}' \phi_{I\bar{J}} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

(tu, jak wyżej, $dz_I := dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$, $d\bar{z}_j := d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$, oraz oba wielowskaźniki są uporządkowane).

Podział ten implikuje definicję zespolonych (p, q)-prądów:

Definicja 2.1.5. *(p, q)- prąd zespolony to (p, q)-forma (czyli forma dwustopnia (p, q)) ze współczynnikami będącymi (zespolonymi) dystrybucjami. Przestrzeń zespolonych (p, q)-prądów będziemy oznaczać przez $\mathcal{D}_{(p,q)}(\Omega)$.*

Uwaga 2.1.6. *Tak jak w przypadku rzeczywistym pojęcie to przenosi się na rozmaitości zespolone.*

Jako przykład rozważmy prąd $[Z] = [Z_n]$ całkowania po zespolonej hiperpłaszczyźnie

$$Z = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in \Omega | \ z_n = 0\}.$$

Jest to $(1,1)$-prąd, który równa się $i\delta_{(z',0)}dz_n \wedge d\bar{z}_n$ ($\delta_{(z',0)}$ jest, jak poprzednio, waluacją $\delta_{(z',0)}(\psi) := \psi(z',0)$.).

Dalej w pracy będziemy rozpatrywać wyłącznie prądy zespolone. Dlatego często będziemy je skrótowo nazywać prądami.

Definicja 2.1.7 (Prądy rzeczywiste). *Prąd (zespolony) nazywamy rzeczywistym jeżeli* $\Theta = \bar{\Theta}$.

Oczywistym warunkiem koniecznym na to by (p,q)-prąd był rzeczywistym jest $p = q$. W tym przypadku warunkiem koniecznym i wystarczającym by prąd Θ był rzeczywisty jest warunek aby współczynniki $\Theta_{I\bar{J}}$ spełniały (w sensie dystrybucji zespolonych) równość

$$\bar{\Theta}_{I\bar{J}} = \Theta_{J\bar{I}}.$$

W szczególności współczynniki $\Theta_{I\bar{I}}$ muszą być *rzeczywistymi* dystrybucjami.

Poniżej będziemy się zajmować wyłącznie prądami rzeczywistymi.

Przykład 2.1.8. $[Z_n]$ *jest przykładem rzeczywistego* $(1,1)$*-prądu. Można pokazać, że prąd całkowania po dowolnej zespolonej podrozmaitości wymiaru p jest prądem rzeczywistym typu* $(n-p, n-p)$.

Szczególnie interesujące w teorii pluripotencjału są tzw. *prądy dodatnie.*

Definicja 2.1.9 (Prądy dodatnie). *Prąd zespolony* T *dwustopnia* (k,k) *nazywamy dodatnim jeżeli dla dowolnych* $(1,0)$*-form próbnych* $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-k}$ *zachodzi nierówność*

$$T \wedge i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_1} \wedge i\alpha_2 \wedge \overline{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge i\alpha_{n-k} \wedge \overline{\alpha_{n-k}} \geq 0.$$

W [LG] można znaleźć dowód następującej propozycji, która w szczególności pokazuje iż prądy dodatnie są bardzo szczęgólnym przypadkiem prądów zespolonych:

Propozycja 2.1.10. *Współczynniki prądów dodatnich są miarami zespolonymi (czyli dystrybucjami rzędu 0).*

Poniżej podajemy dwa fundamentalne przykłady prądów dodatnich:

Przykład 2.1.11. *Prąd* $[Z_n]$ *(ogólniej: dowolny prąd całkowania po zespolonej podrozmaitości) jest prądem dodatnim.*

Drugi przykład pokazuje związek pomiędzy funkcjami plurisubharmonicznymi a prądami dodatnimi:

Przykład 2.1.12. *Jeśli* u *jest funkcją plurisubharmoniczna to* $(1,1)$*-prąd* $i\partial\bar{\partial}u$ *jest dodatni. Stosujemy tu standardowe oznaczenia na operatory* ∂ *oraz* $\bar{\partial}$ *będące odpowiednio* $(1,0)$ *oraz* $(0,1)$ *częścią operatora* d *różniczki zewnętrznej. Dodatniość* $i\partial\bar{\partial}u$ *wynika z następującego rozumowania: grupując wyrazy w iloczynie zewnętrznym*

$$i\partial\bar{\partial}u \wedge i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_1} \wedge i\alpha_2 \wedge \overline{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge i\alpha_{n-1} \wedge \overline{\alpha_{n-1}},$$

uzyskamy formę Leviego funkcji u *na pewnym polu wektorowym zależnym od* $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$.

Uwaga 2.1.13. *Przykład ten można w pewnym sensie odwrócić. Mianowicie jeżeli* T *jest dodatnim* $(1,1)$*-prądem, to lokalnie zawsze można znaleźć plurisubharmoniczną funkcję* u *taką, że* $i\partial\bar{\partial}u = T$ *(dowód tego wyniku można znaleźć w* [LG]*).*

Podstawową operacją w teorii pluripotencjału jest iloczyn zewnętrzny prądów. Oczywiście nie zawsze jest to operacja wykonalna, gdyż nie zawsze da się mnożyć współczynniki prądów (które są dystrybucjami). Jednak w pewnych przypadkach da się iloczyn zewnętrzny zdefiniować. Gdyby, na przykład, jeden z prądów miał gładkie współczynniki (czyli był zwykłą formą różniczkową) to operacja ta jest dobrze określona.

Istotnym problemem jest czy iloczyn zewnętrzny prądów dodatnich jest również dodatni. Ważnym wynikiem jest tu nastepujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.1.14. *Jeśli Θ jest (p,p)-prądem dodatnim, T jest $(1,1)$-prądem dodatnim oraz jeden z tych prądów jest zwykłą gładką formą różniczkową, to prąd $\Theta \wedge T$ jest dodatnim $(p+1,p+1)$-prądem.*

Uwaga 2.1.15. *W powyższym twierdzeniu założenie, że jeden z prądów jest typu $(1,1)$ jest istotne. Bedford i Taylor* [BT1] *oraz niezależnie Harvey i Knapp* [HaK] *wykazali, że w przypadku wyższych stopni twierdzenie to nie musi zachodzić. Przykład poniżej (wzięty z pracy* [Di4]*) pokazuje, że iloczyn zewnętrzny dwóch gładkich dodatnich $(2,2)$-form w $\mathbb{C}^4$ nie musi być dodatni.*

Zanim podamy przykład wykażemy najpierw pomocniczą propozycję:

Propozycja 2.1.16 ([Di4]). *Niech $\alpha = \sum'_{|I|=2,|J|=2} a_{IJ}\, e_I \wedge \overline{e_J}$ będzie gładką $(2,2)$-formą na przestrzeni $\mathbb{C}^4$. α jest dodatnia wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $s \in M$ zachodzi $sA\overline{s}^T \geq 0$, gdzie zbiór M to zespolony stożek zdefiniowany przez*

$$M := \left\{(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) \in \mathbb{C}^6 \middle|\ s_1 s_6 + s_3 s_4 = s_2 s_5 \right\}.$$

(Stosujemy tu oznaczenia $e_I = dz_{i_1} \wedge dz_{i_2}$, $I = (i_1,\ i_2)$, A jest macierzą $[a_{IJ}]_{I,J}$, a s^T oznacza transponowany (czyli kolumnowy) wektor). Innymi słowy A jest dodatnio określona w kierunkach wyznaczonych przez M.

Dowód. Weźmy dowolne $(1,0)$-formy $\gamma = \sum_{j=1}^4 c_j dz_j$ oraz $\beta = \sum_{j=1}^4 b_j dz_j$. Wystarczy sprawdzić, że współczynnik iloczynu $\alpha \wedge i\gamma \wedge \overline{\gamma} \wedge i\beta \wedge \overline{\beta}$ jest nieujemny. Jest to równoważne nierówności $\alpha \wedge \gamma \wedge \beta \wedge \overline{\gamma \wedge \beta} \geq 0$, która po elementarnych przekształceniach sprowadza się do

$$\Theta(c_1, c_2, c_3, c_4, b_1, b_2, b_3, b_4) A \overline{\Theta(c_1, c_2, c_3, c_4, b_1, b_2, b_3, b_4)}^T \geq 0,$$

gdzie Θ to odwzorowanie

$$\begin{aligned}\Theta : \mathbb{C}^8 \ni (z_1, z_2, z_3, z_4, w_1, w_2, w_3, w_4) \longmapsto (&z_1 w_2 - z_2 w_1, -z_1 w_3 + z_3 w_1, \\ &z_1 w_4 - z_4 w_1, z_2 w_3 - z_3 w_2, -z_2 w_4 + z_4 w_2, z_3 w_4 - z_4 w_3) \in \mathbb{C}^6.\end{aligned}$$

Teza wynika teraz z (dość niespodziewanej) obserwacji iż $\Theta(\mathbb{C}^8) = M$, co można sprawdzić elementarnymi rachunkami. ☐

Oto zapowiadany przykład:

Przykład 2.1.17. *Niech*

$$\begin{aligned}\zeta = \frac{19}{4} dz_1 \wedge dz_2 \wedge \overline{dz_1 \wedge dz_2} + \frac{19}{4} dz_3 \wedge dz_4 \wedge \overline{dz_3 \wedge dz_4} + dz_1 \wedge dz_3 \wedge \overline{dz_1 \wedge dz_3} \\ + dz_1 \wedge dz_4 \wedge \overline{dz_1 \wedge dz_4} + dz_2 \wedge dz_3 \wedge \overline{dz_2 \wedge dz_3} + dz_2 \wedge dz_4 \wedge \overline{dz_2 \wedge dz_4} \\ - \frac{21}{4} dz_1 \wedge dz_2 \wedge \overline{dz_3 \wedge dz_4} - \frac{21}{4} dz_3 \wedge dz_4 \wedge \overline{dz_1 \wedge dz_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta = \frac{19}{4} dz_1 \wedge dz_2 \wedge \overline{dz_1 \wedge dz_2} + \frac{19}{4} dz_3 \wedge dz_4 \wedge \overline{dz_3 \wedge dz_4} + dz_1 \wedge dz_3 \wedge \overline{dz_1 \wedge dz_3} \\ + dz_1 \wedge dz_4 \wedge \overline{dz_1 \wedge dz_4} + dz_2 \wedge dz_3 \wedge \overline{dz_2 \wedge dz_3} + dz_2 \wedge dz_4 \wedge \overline{dz_2 \wedge dz_4} \\ + \frac{21}{4} dz_1 \wedge dz_2 \wedge \overline{dz_3 \wedge dz_4} + \frac{21}{4} dz_3 \wedge dz_4 \wedge \overline{dz_1 \wedge dz_2}.\end{aligned}$$

Wtedy

$$\zeta \wedge \eta = (2(\frac{19}{4})^2 + 4 - 2(\frac{21}{4})^2) dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4 \wedge \overline{dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4} =$$
$$= -6 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4 \wedge \overline{dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4},$$

a więc prąd $\zeta \wedge \eta$ nie jest dodatni.

Wykażemy poniżej, że ζ jest prądem dodatnim (dodatniość η dowodzi się analogicznie):

Z powyższej propozycji i elementarnych przekształceń wynika, że wystarczy pokazać iż

$$|z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 + 5|z_6 - z_1|^2 - \frac{1}{4}|z_1 + z_6|^2 \geq 0$$

dla dowolnego $z \in M$.

Szacujemy:

$$|z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 + 5|z_6 - z_1|^2 - \frac{1}{4}|z_1 + z_6|^2 \geq |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 +$$
$$+ |z_6 - z_1|^2 - \frac{1}{4}|z_1 + z_6|^2.$$

Jest to wyrażenie jednorodne, można więc założyć iż $||z|| = 1$ (i nadal $z \in M$). Stąd wynika, że

$$|z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 + |z_6 - z_1|^2 - \frac{1}{4}|z_1 + z_6|^2 \geq$$
$$\geq 1 - 2\Re(z_1\overline{z_6}) - \frac{1}{4}|z_1 + z_6|^2 \geq 1 - 2|z_1 z_6| - \frac{1}{4}|z_1 + z_6|^2 =$$
$$= 1 - 2|z_2 z_5 - z_4 z_3| - \frac{1}{4}|z_1 + z_6|^2 \geq 1 - |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2 - |z_5|^2 - \frac{1}{4}|z_1 + z_6|^2 =$$
$$= |z_1|^2 + |z_6|^2 - \frac{1}{4}|z_1 + z_6|^2 \geq \frac{1}{4}|z_1 + z_6|^2 \geq 0.$$

Więcej informacji o prądach można znaleźć w [Ho], [Kli], [LG] oraz [K4].

2.1.2. *Topologia pluri-cienka.* Funkcje plurisubharmoniczne nie muszą być ciągłe. Wynika stąd, że standardowa topologia przestrzeni euklidesowych jest niedopasowana do tej klasy funkcji. Naturalne jest w takim przypadku zdefiniowanie subtelniejszej topologii, która bierze pod uwagę osobliwości plurisubharmoniczne. Intuicyjnie, topologia pluri-cienka jest najsłabszą topologią w której wszystkie funkcje plurisubharmoniczne są ciągłe.

Definicja 2.1.18 (Topologia pluri-cienka). *Topologia pluri-cienka to topologia w $\mathbb{C}^n$ zdefiniowana przez bazę*

$$\mathcal{U}_{B(z,r),\phi,a} = \{\, w \in B(z,r) |\ \phi(z) > a,\ \phi \in PSH,\ a \in \mathbb{R} \,\},$$

gdzie $B(z,r)$ to kula o promieniu r i środku w z.

Uwaga 2.1.19. *Zazwyczaj topologia ta jest definiowana w inny sposób i wtedy powyższa definicja wynika jako wniosek. Bardziej szczegółowe omówienie tego pojęcia można znaleźć w* [Kli].

Obserwacja 2.1.20. *Każdy zbiór otwarty w topologii euklidesowej jest również otwarty w topologii pluri-cienkiej.*

Podamy teraz przykład który ilustruje jak wielkie są różnice pomiędzy nową topologią a topologią euklidesową.

Przykład 2.1.21. *Wiadomo (patrz np.* [Kli]*), że istnieje funkcja plurisubharmoniczna h w $\mathbb{C}^n$, taka, że $h \neq -\infty$, ale zbiór $\{h = -\infty\}$ jest gęsty w $\mathbb{C}^n$. Tak więc*

$$\mathcal{U} = \{\, z \in \mathbb{C}^n |\ h(z) > -c \,\}$$

jest otwartym zbiorem w topologii pluri-cienkiej (i zbiorem niepustym, o ile $c > 0$ jest duże), lecz $\mathcal{U}$ ma puste wnętrze Euklidesowe.

Obserwacja 2.1.22. *Topologia na rozmaitościach jest indukowana za pomocą topologii w mapach. Wynika stąd, że topologię pluri-cienką można zdefiniować na dowolnej rozmaitości zespolonej.*

Kończąc krótkie omówienie tego tematu udowodnimy ważne twierdzenie, z którego skorzystamy później:

Twierdzenie 2.1.23. *Każdy niepusty otwarty zbiór w topologii pluri-cienkiej ma dodatnią miarę Lebesgue'a.*

Dowód. Oczywiście wystarczy wykazać tezę dla zbiorów z bazy topologii. Przypuśćmy niewprost, że miara pewnego niepustego zbioru $\mathcal{U}_{B(z,r),\phi,a}$ wynosi zero. Skoro jest to zbiór niepusty, to istnieje $w \in B(z,r)$, takie, że $\phi(w) > a$. Ustalmy mały promień r', tak aby kula $B(w,r')$ była relatywnie zwarta w $B(z,r)$. Funkcja ϕ jest półciągła z góry (w topologii euklidesowej), dostaniemy więc, że $sup_{B(w,r')}\phi = c < +\infty$. Korzystając z nierównośći wartości średnich dla funkcji plurisubharmonicznych otrzymamy ($\lambda(A)$- to objętość zbioru A)

$$\begin{aligned} a < \phi(w) &\leq \frac{1}{\lambda(B(w,r'))} \int_{B(w,r')} \phi(x) d\lambda(x) \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda(B(w,r'))} a\lambda[B(w,r') \setminus \mathcal{U}_{B(z,r),\phi,a}] + \\ &+ \frac{1}{\lambda(B(w,r'))} c\lambda[B(w,r') \cap U_{B(z,r),\phi,a}] \leq a, \end{aligned}$$

czyli sprzeczność. $\square$

2.1.3. *Operator Monge'a-Ampère'a dla ograniczonych funkcji plurisubharmonicznych.* Operator Laplace'a można traktować jako ślad hessjanu zespolonego funkcji. Gdy wymiar przestrzeni jest większy niż 1 ślad nie zawiera pełnej informacji o macierzy Hessego. By znaleźć wartości własne macierzy potrzebne są wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego. Stąd wynika potrzeba badania wyznacznika (i wszystkich pośrednich niezmienników) zespolonego hessjanu.

Definicja 2.1.24 (Zespolony operator Monge'a-Ampère'a). *Niech u będzie C^2-gładką funkcją zdefiniowaną w pewnym obszarze w $\mathbb{C}^n$. Operator Monge'a-Ampère'a działa na u za pomocą wzoru*

$$MA(u) := 4^n n! \det(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}).$$

W języku form różniczkowych, który jest bardziej użyteczny w analizie (i dlatego będziemy go od tej pory używać) można ten operator zapisać jako

$$MA(u) := 4^n n! \det(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}) d\lambda = (dd^c u)^n,$$

gdzie, jak zwykle, $d = \partial + \overline{\partial}$, $d^c := i(\overline{\partial} - \partial)$ (a więc $dd^c = 2i\partial\overline{\partial}$) oraz

$$(dd^c\, u)^n := \underbrace{dd^c\, u \wedge \cdots \wedge dd^c\, u}_{n-razy}.$$

Z liniowości operatora Laplace'a wynika, że można rozszerzyć jego działanie również na niegładkie funkcje (w sensie dystrybucyjnym). Jest to istota teorii potencjału. W przypadku funkcji plurisubharmonicznych można zawsze zdefiniować $dd^c\, u$ jako dodatni $(1,1)$-prąd, lecz definiowanie iloczynów zewnętrznych wyższych rzędów jest problematyczne.

Korzystając z teorii prądów zespolonych można jednak zdefiniować miarę Monge'a-Ampère'a dla dowolnych lokalnie ograniczonych funkcji plurisubharmonicznych.

Twierdzenie 2.1.25 (Bedford-Taylor [BT2],[BT3]). *Niech $u_0, u_1, \cdots, u_n \in PSH \cap L^\infty$. Wtedy:*

- *dla każdego $k \in \{1, \cdots, n\}$ $\quad u_0 dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k$ jest dobrze określonym prądem zespolonym. W szczególności można zdefiniować (indukcyjnie) $dd^c u_0 \wedge dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k := dd^c(u_0 dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k)$,*
- *$(dd^c u_0)^n$ jest dodatnią miarą Radona,*
- *tak zdefiniowany operator jest ciągły ze względu na ciągi monotoniczne (malejące lub rosnące) tzn. jeżeli $\{u_j^k\} \searrow u_j$, lub $\{u_j^k\} \nearrow u_j$, $(u_j^k \in PSH \cap L^\infty)$ to*

$$u_0^k dd^c u_1^k \wedge dd^c u_2^k \wedge \cdots \wedge dd^c u_l^k \to u_0 dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k,$$

  gdzie zbieżność rozumiemy w słabej topologii prądów.

Wynik ten pokazuje, że w przypadku ograniczonej funkcji plurisubharmonicznej można poprawnie określić borelowską miarę Monge'a-Ampère'a. Definicja ta pokrywa się z definicją klasyczną dla gładkich funkcji plurisubharmonicznych.

Z powyższego twierdzenia dostajemy ciągłość tak zdefiniowanego operatora Monge'a-Ampère'a ze względu na ciągi monotoniczne. W przypadku operatora Laplace'a, słaba zbieżność funkcji subharmonicznych implikuje słabą zbieżność ich laplasjanów. Powstaje pytanie czy tak samo jest w sytuacji operatora Monge'a-Ampère'a. Odnotujmy, że z klasycznych wyników dotyczących funkcji plurisubharmonicznych wynika (patrz np. [Ho]) iż słaba zbieżność w klasie PSH jest równoważna zbieżności w L^p_{loc} dla dowolnego $p > 1$. Przykład Cegrella pokazuje jednak, że operator Monge'a-Ampère'a jest nieciągły ze względu na słabą zbieżność.

Przykład 2.1.26 ([Ce1], patrz również [CeK1])**.** *Istnieje ciąg u_j lokalnie ograniczonych funkcji plurisubharmonicznych w $\mathbb{C}^2$ zbieżny słabo (a więc również w L^p_{loc}, $\forall p > 1$) do lokalnie ograniczonej funkcji plurisubharmonicznej u oraz miara borelowska μ, takie, że $(dd^c\, u_j)^n \to \mu \neq (dd^c\, u)^n$. Co więcej w kuli jednostkowej $(n > 1)$ istnieją u_j oraz u o tych samych własnościach, przy czym dodatkowo wszystkie funkcje u_j oraz u mają takie same wartości brzegowe.*

Przykład ten prowadzi do naturalnego pytania jakie warunki musi spełniać ciąg funkcji plurisubharmonicznych u_j zbieżny w L^1 do u, tak aby można było stwierdzić iż $(dd^c\, u_j)^n \to (dd^c\, u)^n$. Odpowiedź na to pytanie poznamy nieco później, kiedy wprowadzimy odpowiednie pojęcia.

Bardzo użyteczny jest następujący fundamentalny wynik uzyskany przez Bedforda i Taylora (patrz [BT4]).

Twierdzenie 2.1.27. *Niech u, v będą lokalnie ograniczonymi funkcjami plurisubharmonicznymi w obszarze zawartym w $\mathbb{C}^n$. Wtedy zachodzi równość*

$$\chi_{\{u>v\}}(dd^c u)^n = \chi_{\{u>v\}}(dd^c \max(u, v))^n.$$

(χ_A to funkcja charakterystyczna zbioru A).

Istota twierdzenia polega na tym, że u oraz v nie muszą być ciągłe, a więc zbiór borelowski $\{ u > v \}$ nie musi być otwarty w topologii euklidesowej (choć oczywiście jest otwarty w topologii pluri-cienkiej). Jako wniosek dostaniemy stosunkowo prosty dowód nierówności, znanej jako *zasada porównawcza*:

Twierdzenie 2.1.28 (Zasada porównawcza [BT2], [BT3]). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem, oraz u, $v \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Załóżmy, że zbiór $\{ u > v \}$ jest relatywnie zwarty Ω. Wtedy*

$$\int_{\{u>v\}} (dd^c u)^n \leq \int_{\{u>v\}} (dd^c v)^n.$$

Zasada porównawcza jest jednym z najważniejszych narzędzi w teorii pluripotencjału. Różne jej wersje bedą się pojawiać wielokrotnie w dalszych częściach pracy.

Dowód. Zastosujemy pomysł pochodzący z [GZ2]. Zauważmy najpierw, że skoro zbiór $\{ u > v \}$ jest relatywnie zwarty, to modyfikując u oraz v w pobliżu brzegu, (co nie zmienia wyrażeń w naszej tezie), można założyć iż $u = v$ w otoczeniu $\partial\Omega$. Wtedy jednak, z wersji twierdzenia Stokesa (patrz [Bl1], gdzie podano formalny dowód tego punktu) dostaniemy

$$\int_\Omega (dd^c u)^n = \int_\Omega (dd^c v)^n = \int_\Omega (dd^c max(u, v))^n.$$

Z tego wynika, że

$$\begin{aligned}\int_{\{u>v\}} (dd^c u)^n &= \int_{\{u>v\}} (dd^c max(u, v))^n = \int_\Omega (dd^c max(u, v))^n - \\ - \int_{\{u\leq v\}} (dd^c max(u, v))^n &\leq \int_\Omega (dd^c v)^n - \int_{\{u<v\}} (dd^c max(u, v))^n = \\ = \int_\Omega (dd^c v)^n - \int_{\{u<v\}} (dd^c v)^n &= \int_{\{u\geq v\}} (dd^c v)^n.\end{aligned}$$

Zamieniając u na $u-\epsilon$, $\epsilon > 0$ znowu rozważane zbiory bedą relatywnie zwarte, dostaniemy więc

$$\int_{\{u>v\}} (dd^c u)^n = lim_{\epsilon\to 0} \int_{\{u-\epsilon>v\}} (dd^c u)^n \leq lim_{\epsilon\to 0} \int_{\{u-\epsilon\geq v\}} (dd^c v)^n = \int_{\{u>v\}} (dd^c v)^n.$$

□

2.1.4. *Pojemności.* Jak już wspomnieliśmy operator Monge-Ampère'a jest nieciągły ze względu na zbieżność w L^1. Przypomnijmy także, że w przypadku jednowymiarowym pewne zbiory o zerowej mierze Lebesgue'a zachowują się z punktu widzenia teorii potencjału jak "duże zbiory": np. potencjał newtonowski jest poprawnie określony dla odcinka lub łuku w $\mathbb{C}$.

Wszytko to wskazuje, że teoria miary nie wyławia całej informacji zakodowanej w funkcjach plurisubharmonicznych.

Właściwa teoria analizująca te subtelności była dawno znana w teorii potencjału na płaszczyźnie - jest nią teoria (newtonowskiej) pojemności. Opiera się ona jednak istotnie na liniowości laplasjanu. Tak więc w wyższych wymiarach potrzebny był nieliniowy odpowiednik tego pojęcia. Został on wprowadzony przez Bedforda i Taylora w pracy [BT3] gdzie rozwinięto teorię *pojemności względnej.*

Poniżej omówimy podstawowe pojemności używane w analizie zespolonej:

Definicja 2.1.29 (Pojemność względna). *Niech $K \subset \Omega$ będzie zwartym podzbiorem obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Pojemność względna jest zdefiniowana za pomocą wzoru*

$$cap(K,\Omega) := \sup\{\int_K (dd^c u)^n |\ u \in PSH(\Omega),\ 0 < u < 1\}.$$

Definicję można rozszerzyć na dowolny zbiór borelowski E zawarty w Ω kładąc

$$cap_*(E,\Omega) := \sup\{cap(K,\Omega)\ |\ K \subset E,\ K\ zwarty\}.$$

Pojemność ta jest niezwykle skutecznym narzędziem w teorii pluripotencjału. W wielu sytuacjach zachowuje się ona analogicznie do pojemności newtonowskiej znanej z przypadku płaszczyzny.

Efektywne wyliczenie pojemności relatywnej (poza bardzo szczególnymi przypadkami) jest niewykonalne. Jednak można wprowadzić bardzo pomocną funkcję, która w pewnym sensie realizuje supremum z definicji:

Definicja 2.1.30 (Relatywna plurisubharmoniczna funkcja ekstremalna). *Niech $K \subset \Omega$ będzie zwartym podzbiorem obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Definiujemy relatywną funkcję ekstremalną jako*

$$u_{K,\Omega} := \sup\{v(z)\ |\ v \in\ PSH(\Omega),\ u \leq 0,\ u|_K \leq -1\}.$$

Regularyzacja górna u

$$u^*_{K,\Omega}(z) := limsup_{\zeta \to z} u_{K,\Omega}(\zeta)$$

jest funkcją plurisubharmoniczną.

Zanim podamy podstawowe wyniki dotyczące związków pomiędzy pojemnością i funkcją ekstremalną wprowadzimy pojęcie obszaru *hiperwypukłego* w $\mathbb{C}^n$.

Definicja 2.1.31. *Obszar $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy hiperwypukłym, jeżeli istnieje ciągła ujemna plurisubharmoniczna funkcja definiująca u. Jest to taka funkcja, że dla każdego ujemnego c zbiory $\{u \leq c\}$ są relatywnie zwarte w Ω.*

Obszary hiperwypukłe są pseudowypkłe, ale nie na odwrót. Intuicyjnie na te obszary można patrzeć jak na wielowymiarowe odpowiedniki obszarów regularnych (na płaszczyźnie) względem operatora Laplace'a. Odnotujmy jednak wyraźnie, że obszar (w $\mathbb{C}^n$, $n > 1$), który jest regularny względem operatora Laplace'a nie musi byc hiperwypukły- przykładem jest trójkąt Hartogsa.

Poniżej wymieniamy podstawowe wyniki dotyczące omawianych pojęć (więcej szczegółów, wraz z dowodami, można znaleźć w [Kli]):

Twierdzenie 2.1.32. *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem, a K jego zwartym podzbiorem. Zachodzą następujące fakty:*

(1) *K jest pluripolarny wtedy i tylko wtedy gdy $cap(K,\Omega) = 0$.*
(2) *Miara $(dd^c u^*_{K,\Omega})^n$ ma nośnik zawarty w K.*
(3) *$u^*_{K,\Omega} = -1$ we wnętrzu zbioru K, a także na ∂K za wyjątkiem zboru pluripolarnego.*
(4) *Jeżeli Ω jest dodatkowo hiperwypukły, to*

$$cap(K,\Omega) = \int_K (dd^c u^*_{K,\Omega})^n = \int_\Omega -u^*_{K,\Omega}(dd^c u^*_{K,\Omega})^n.$$

Poniżej wprowadzimy pojęcie zbieżności względem pojemności (względnej):

Definicja 2.1.33 (Zbieżność względem pojemności). *Mówimy, ze ciąg funkcji plurisubharmonicznych u_j na zbiorze otwartym Ω zmierza względem pojemności do funkcji plurisubharmonicznej u, jeżeli dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ i każdego $\epsilon > 0$ mamy*

$$lim_{j\to\infty} cap(K \cap \{\, |u_j - u| > \epsilon, \Omega \,\}) = 0.$$

Znaczenie tego pojęcia wynika z następującego twierdzenia Xinga ([X]):

Twierdzenie 2.1.34 (Twierdzenie Xinga). *Jeżeli $\{\, u_j^{(k)} \,\}_{j=1}^{\infty}$, $k = 1, \cdots, n$ będą lokalnie jednostajnie ograniczonymi ciągami funkcji plurisubharmonicznych na pewnym obszarze Ω zbieżnymi względem pojemności odpowiednio do funkcji plurisubharmonicznych $u^{(k)}$, to*

$$dd^c\, u_j^{(1)} \wedge \cdots \wedge dd^c\, u_j^{(n)} \to dd^c\, u^{(1)} \wedge \cdots \wedge dd^c\, u^{(n)},$$

gdzie zbieżność rozumiemy w sensie słabej zbieżności miar. Innymi słowy operator Monge'a-Ampère'a jest ciągły ze względu na zbieżność w sensie pojemności.

Poniżej wprowadzimy jeszcze jedną pojemność, zwaną *pojemnością Siciaka*. Nie jest ona bezpośrednio powiązana z operatorem Monge'a-Ampère'a, za to opiera się na oszacowaniach dla (specjalnych) funkcji plurisubharmonicznych. Często więc związki pomiędzy tymi dwoma pojemnościami stanowią techniczne narzędzie w teorii pluripotencjału pozwalające maksymalnie wykorzystać rozwiniętą teorię. By wprowadzić pojemność logarytmiczną, potrzebujemy kilku definicji.

Zdefiniujmy pewną szczególną klasę funkcji plurisubharmonicznych zdefiniowanych na całym $\mathbb{C}^n$. Jest to tzw. *klasa Lelonga*:

Definicja 2.1.35 (Klasa Lelonga).

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) := \{u \in PSH(\mathbb{C}^n)|\ \limsup_{z\to\infty}(u(z) - log(1 + |z|)) \le C_u < \infty\},$$

gdzie stała C_u zależy tylko od funkcji u.

Funkcje te nazywane są również funkcjami o logarytmicznym wzroście.

Z tą klasą ściśle związana jest tzw. *globalna ekstremalna funkcja Siciaka-Zahariuty* (dalej dla wygody nazywać ją będziemy globalną funkcją ekstremalną):

Definicja 2.1.36 (Globalna funkcja ekstremalna [S1], [Za]). *Niech K będzie podzbiorem relatywnie zwartym w $\mathbb{C}^n$. Definiujemy*

$$V_K(z) := sup\{u(z)|\ u \in PSH(\mathbb{C}^n) \cap \mathcal{L}(\mathbb{C}^n),\ u|_K \le 0\}.$$

Funkcja ta została wprowadzona (za pomocą innego wzoru) przez Siciaka w [S1]. Obecna forma pochodzi od Zahariuty ([Za]).

Odnotujmy iż z definicji wynika, że V_K jest półciagła z dołu. Stosując górną regularyzację

$$V_K^*(z) := \limsup_{\zeta\to z} V_K(\zeta)$$

uzyskamy funkcję półciągłą z góry. Teraz można pokazać, że V_K^* jest funkcją plurisubharmoniczną (o ile nie równa się $+\infty$).

Istotnie jest wiedzieć kiedy V_K^* jest skończona. Mówi o tym następujące klasyczne twierdzenie z teorii pluripotencjału ([S2]):

Twierdzenie 2.1.37. *Niech K będzie podzbiorem relatywnie zwartym w $\mathbb{C}^n$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *K nie jest zbiorem pluripolarnym;*
(2) *V_K^* jest funkcją lokalnie ograniczoną. Co więcej $V_K^* \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.*

W przypadku gdy K jest pluripolarny zachodzi równość $V_K^* \equiv +\infty$, jednak na ogół nie jest prawdą, że $V_K \equiv +\infty$. W związku z tym wyrażenie

$$T_R(K) := exp(-sup\{ V_K^*(z) \mid ||z|| \leq R \})$$

zeruje się dokładnie na zbiorach pluripolarnych.

Definicja 2.1.38 (Pojemność Siciaka). *Wyrażenie*

$$T(K) := T_1(K)$$

nazywamy pojemnością Siciaka relatywnie zwartego zbioru K zawartego w $\mathbb{C}^n$.

Oczywiście ustalając dowolna inną stałą dodatnią zamiast 1, dostaniemy równoważną pojemność.

Ostatni wynik który wymienimy to wspomniany już związek pomiędzy dwoma wprowadzonymi pojemnościami. Nierówności, które podamy, pochodzą od Aleksandera i Taylora [AT]. W pracy [K4] można znaleźć krótki dowód tego twierdzenia do którego odsyłamy.

Twierdzenie 2.1.39 (Nierówności Aleksandera-Taylora). *Jeżeli $K \subset \{ z \mid ||z|| \leq r \}$, $r < R$ jest zbiorem zwartym, to istnieje stała $A(r) > 0$, zależna tylko od r, taka że*

$$exp(-A(r)cap(K, B(0,R))^{-1}) \leq T_R(K) \leq exp(-2\pi cap(K, B(0,R))^{-1/n}),$$

gdzie przez $B(0,R)$ oznaczamy kulę o promieniu R i środku w 0.

Więcej informacji o pojemnościach, funkcjach ekstremalnych oraz zależności pomiędzy nimi można znaleźć w [Kli] oraz [K4].

2.1.5. *Operator Monge'a-Ampère'a i nieograniczone funkcje plurisubharmoniczne - klasy Cegrella.* Przypomnijmy, że wyniki Bedforda i Taylora dotyczą funkcji plurisubharmonicznych lokalnie ograniczonych. Naturalne jest więc pytanie, czy dla dowolnej funkcji $u \in PSH$ można zdefiniować miarę Radona $MA(u)$, tak żeby definicja była zgodna z klasyczną definicją dla funkcji gładkich oraz żeby pokrywała się z definicją Bedforda i Taylora w przypadku L^∞_{loc}. Chcielibyśmy przy tym zachować przynajmniej niektóre własności operatora które ma on w klasie funkcji ograniczonych. Analizę zagadnienia należy więc zacząć właśnie od określenia jakie własności operatora Monge'a-Ampère'a znane z przypadku ograniczonego chcemy zachować. Zauważmy, że każdą funkcję plurisubharmoniczną można lokalnie aproksymować malejącym ciągiem gładkich funkcji plurisubharmonicznych. W przypadku ograniczonym operator jest ciągły ze względu na zbieżność malejącą, zakładamy więc, że operator (również dla funkcji nieograniczonych) powinien być ciągły ze względu na zbieżność malejącą.

Poniższy przykład, pochodzący od Kiselmana [Ki1] pokazuje, że zdefiniowanie operatora Monge'a-Ampère'a nie jest możliwe dla dowolnej funkcji plurisubharmonicznej:

Przykład 2.1.40 (Kiselman [Ki1]**).** *Niech $u(z) = (-\log|z_1|)^{\frac{1}{2}}(|z'|^2 - 1)$, gdzie $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Funkcja u jest plurisubharmoniczna w otoczeniu zera, ale*

$$\int_{B(0,R)\setminus L} (dd^c u)^n = \infty,$$

gdzie $L = \{z_1 = 0\}$ a $R > 0$ jest dowolną (małą) stałą.

W związku z tym przykładem pojawia się pytanie o charakteryzację rodziny tych funkcji dla których poprawna definicja jest możliwa. Odnotujmy, że częściowe wyniki w tym kierunku były znane dość dawno, np. jak pokazali Sibony i Demailly operator jest dobrze określony dla funkcji ograniczonych w pobliżu brzegu obszaru definicji (patrz np. [Kli]). Jednak systematyczne badania w tym kierunku zaczęły się dopiero ok. 10 lat temu.

Problem ten można rozwiązać na dwa sposoby: albo zająć się własnościami lokalnymi, tzn. jak zdefiniować operator Monge'a-Ampère'a w okolicy ustalonego punktu, lub rozwinąć teorię w ustalonym obszarze i badać funkcje o kontrolowanym zachowaniu na brzegu (ewentualnie zakładając coś o samym obszarze). Problem definiowalności „pierwszym sposobem" został rozwiązany w całości przez Błockiego ([Bl4]). Poniżej podajemy główne twierdzenie z tej pracy:

Twierdzenie 2.1.41. *Dla ujemnej funkcji plurisubharmonicznej następujące warunki są równoważne:*

(1) *u ma dobrze zdefiniowaną miarę Monge'a-Ampère'a, tak że zbieżnośc malejąca funkcji implikuje słabą zbieżność miar;*
(2) *dla każdego ciągu gładkich funkcji plurisubharmonicznych u_j malejącego do u ciąg miar $(dd^c u_j)^n$ jest słabo ograniczony;*
(3) *dla każdego ciągu gładkich funkcji plurisubharmonicznych u_j malejącego do u ciągi miar*
$$|u_j|^{n-2-p} du_j \wedge d^c u_j \wedge (dd^c u_j)^p \wedge \omega^{n-p-1}, \quad p = 0, 1, \cdots, n-2$$
są słabo ograniczone;
(4) *istnieje ciąg gładkich funkcji plurisubharmonicznych u_j malejący do u taki, że ciągi miar*
$$|u_j|^{n-2-p} du_j \wedge d^c u_j \wedge (dd^c u_j)^p \wedge \omega^{n-p-1}, \quad p = 0, 1, \cdots, n-2$$
są słabo ograniczone;

($\omega := dd^c ||z||^2 = 2\sum_{j=1}^n dz_j \wedge \overline{dz_j}$ jest kanoniczną formą kählerowską w $\mathbb{C}^n$).

Oznaczmy (roboczo) klasę tych funkcji plurisubharmonicznych przez $\mathcal{D}$, a jeżeli ustalimy obszar Ω na którym rozpatrujemy funkcje plurisubharmoniczne spełniające powyższe warunki równoważne to klasę tą oznaczamy przez $\mathcal{D}(\Omega)$.

Drugie podejście (które chronologicznie poprzedzało jednak pierwsze) zostało rozwinięte przez Cegrella (patrz [Ce2], [Ce3]). Naturalną klasą obszarów dla których teorię można sensownie rozwinąć są obszary hiperwypukłe. Poniżej przedstawimy podstawowe pojęcia z tej dziedziny:

Definicja 2.1.42 (Klasa $\mathcal{E}_0$). *Klasę ujemnych ograniczonych funkcji plurisubharmonicznych u na Ω takich, że $\lim_{z \to \zeta} u(z) = 0$, $\forall \zeta \in \partial\Omega$ oraz $\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty$ oznaczamy przez $\mathcal{E}_0(\Omega)$.*

Będzie to dla nas podstawowy zbiór funkcji z których wygenerujemy nieograniczone funkcje o dobrze zdefiniowanej mierze Monge'a-Ampère'a. Poniżej, dla wygody, będziemy często pomijać w zapisie zależność od obszaru Ω i będziemy korzystać z oznaczenia $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}_0(\Omega)$.

Definicja 2.1.43 (Klasy Cegrella). *Niech*
$$\forall p > 0 \quad \mathcal{E}_p := \{u \in PSH(\Omega) |\ \exists u_j \in \mathcal{E}_0 : \ u_j \searrow u, \ j \to \infty, \ sup_j \int_\Omega (-u_j)^p (dd^c u_j)^n < \infty\}.$$
Jeżeli dodatkowo ciąg u_j można wybrać tak, że $sup_j \int_\Omega (dd^c u_j)^n < \infty$, to mówimy, że u należy do klasy $\mathcal{F}_p$.

Jeżeli zachodzi tylko warunek $\sup_j \int_\Omega (dd^c u_j)^n < \infty$, *to mówimy, że u należy do klasy* $\mathcal{F}$. *Natomiast jeżeli warunki te zachodzą tylko lokalnie, tzn.*

$$\forall w \in \Omega \ \exists U_w \subset \Omega, \ U_w - \text{otwarty} \ \exists g_w \in \mathcal{F}(\Omega) : g|_{U_w} = g_w|_{U_w},$$

to u należy do klasy $\mathcal{E}$.

Okazuje się, że każda funkcja plurisubharmoniczna, która należy do jednej spośród wyżej wymienionych klas ma dobrze zdefiniowaną miarę Monge'a-Ampère'a (patrz [Ce2]), którą określamy jako słabą granicę ciągu miar $(dd^c u_j)^n$ (w [Ce2] udowodniono, że ta słaba granica istnieje i nie zależy od ciągu aproksymującego).

Odnotujmy, że wszystkie z rozważanych klas Cegrella zawierają się w $\mathcal{E}$. Żeby jednak móc stwierdzić, że rzeczywiście jest to największa możliwa klasa na której da się określić operator Monge'a-Ampère'a należy porównać tą klasę z $\mathcal{D}(\Omega)$. Odnotujmy tu fundamentalny wynik uzyskany przez Błockiego:

Twierdzenie 2.1.44 ([Bl4]). *Niech* Ω *będzie obszarem hiperwypukłym. Wtedy*

$$\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega).$$

Innymi słowy definicja "lokalna" i "globalna" maksymalnej dziedziny operatora Monge'a-Ampère'a pokrywają się.

Podstawowe własności funkcji z klas Cegrella można znaleźć w [Ce2] oraz [Ce3]. Poniżej przedstawimy tylko te z nich które będą bezpośrednio przydatne w dalszych rozważaniach.

Pierwszym (i najważniejszym) wynikiem jest zasada porównawcza:

Twierdzenie 2.1.45 (Zasada porównawcza w klasach Cegrella). *Niech* $u, \ v \in \mathcal{E}^p, \ p > 0$. *Wtedy*

$$\int_{\{u<v\}} (dd^c\, v)^n \le \int_{\{u<v\}} (dd^c\, u)^n.$$

Wynik pozostaje prawdziwy w klasach $\mathcal{F}$ *oraz* $\mathcal{E}$ *o ile dodatkowo założymy, że miara* $(dd^c\, v)^n$ *zeruje się na zbiorach pluripolarnych tzn.* $\forall A \subset \Omega$ *- borelowskiego zbioru pluripolarnego zachodzi* $(dd^c\, v)^n(A) = 0$ *(w przypadku klasy* $\mathcal{E}$ *potrzebne jest także dodatkowe założenie* $\{u < v\} \Subset \Omega$*).*

Zasada porównawcza jest podstawowym narzędziem w teorii pluripotencjału również w przypadku nieograniczonym. Została udowodniona przez Cegrella w pracy [Ce3] po kilku kolejnych "słabszych" wersjach. Odnotujmy tu nieco nienaturalny warunek zerowania się na zbiorach pluripolarnych. Z punktu widzenia teorii miary hiperpłaszyczna zespolona w $\mathbb{C}^n$ jest oczywiście zbiorem "większym" od $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, natomiast nasz warunek pozwala koncentrację miary na tym drugim zbiorze, lecz na pierwszym - nie! Okazuje się jednak, że jest to warunek istotny - będziemy się z nim często spotykać w dalszych rozważaniach, które wykażą jego znaczenie.

W analizie operatora Monge'a-Ampère'a często potrzebne są oszacowania dla miar "mieszanych" tzn. miar typu

$$dd^c\, u_1 \wedge dd^c\, u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c\, u_n.$$

Bardzo przydatne do tego są nierówności typu Höldera które zostały wykazane przez Cegrella w [Ce3] dla funkcji z klasy $\mathcal{F}$.

Twierdzenie 2.1.46. *Niech $u \in \mathcal{E}_0(\Omega),\ v_1, \cdots, v_n \in \mathcal{F}(\Omega)$. Wtedy zachodzą nierówności*

$$\int_\Omega -u(dd^c v_1) \wedge (dd^c v_2) \wedge \cdots \wedge (dd^c v_n) \le (\int_\Omega -u(dd^c v_1)^n)^{\frac{1}{n}} \cdots (\int_\Omega -u(dd^c v_n)^n)^{\frac{1}{n}};$$

$$\int_\Omega -u(dd^c v_1) \wedge (dd^c v_2) \wedge \cdots \wedge (dd^c v_n) \le$$

$$\le (\int_\Omega -v_1(dd^c v_1)^n)^{\frac{1}{n+1}} \cdots (\int_\Omega -v_n(dd^c v_n)^n)^{\frac{1}{n+1}} (\int_\Omega -u(dd^c u)^n)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Ważnym wyrażeniem, z którym często będziemy mieć do czynienia, jest całka funkcji z klasy $\mathcal{E}^1$ względem swojej własnej miary Monge'a-Ampère'a.

Definicja 2.1.47 (**$\mathcal{E}^1$ energia**). *Niech $u \in \mathcal{E}^1(\Omega)$. Wyrażenie*

$$\int_\Omega -u(dd^c u)^n$$

nazywamy $\mathcal{E}^1$-energią funkcji u.

Propozycja 2.1.48. *Niech $u,\ v \in \mathcal{E}^1(\Omega),\ u \le v$. Wtedy*

$$\int_\Omega -v(dd^c v)^n \le \int_\Omega -u(dd^c u)^n.$$

Wynik ten wskazuje, że $\mathcal{E}^1$-energia funkcji jest kontrolowana przez $\mathcal{E}^1$-energię dowolnej mniejszej funkcji z $\mathcal{E}^1$.

2.1.6. *Dodatkowe wyniki.* Często w konkretnych rachunkach zamiast nierówności z Twierdzenia 2.1.46 potrzebne są oszacowania w drugą stronę. Tym razem będziemy szacować same miary zamiast całek względem nich. Wyniki w tym rozdziale zostały wzięte z [Di2].

Z faktu, że operator Monge'a-Ampère'a można interpretować (w przypadku gładkim) jako wyznacznik dodatnio półokreślonej macierzy wynika wniosek, że teoria macierzy jest przydatna w teorii pluripotencjału (w książce [HJ] można znaleźć podstawowe fakty dotyczące tych macierzy). W pracy [Bl2] (patrz również [W1]), wykorzystano pewne fakty z tej teorii by uzyskać punktowe oszacowania dla operatora Monge'a-Ampère'a. W szczególności zachodzi nastepujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.1.49. *Niech $u,\ v$ będą gładkimi funkcjami plurisubharmonicznymi, takimi, że $(dd^c u)^n \ge f d\lambda$, $(dd^c v)^n \ge g d\lambda$, gdzie f oraz g są gładkimi nieujemnymi funkcjami, a $d\lambda$ to miara Lebesgue'a. Wtedy:*

$$(dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{n-k} \ge f^{\frac{k}{n}} g^{\frac{n-k}{n}} d\lambda, \tag{2.1}$$

$$(dd^c(u+v))^n \ge (f^{\frac{1}{n}} + g^{\frac{1}{n}})^n d\lambda. \tag{2.2}$$

Odnotujmy, że to twierdzenie przy pewnych dodatkowych założeniach zostało udowodnione w pracy [Ga]. Zauważmy jednak, że wynika ono wprost z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczą, co można łatwo wykazać za pomocą jednoczesnej diagonalizacji $dd^c u$ oraz $dd^c v$ (diagonalizujemy je jako formy hermitowskie, nie jako macierze!).

Pracując z funkcjami z klas Cegrella, (które nie muszą być ani gładkie ani nawet ograniczone) chcielibyśmy uzyskać (odpowiednio uogólnione) odpowiedniki tego wyniku. W szczególności powstaje pytanie czy prawdziwe jest następujące twierdzenie: *Jeżeli $u,\ v$ należą do pewnej klasy Cegrella (a więc $(dd^c u)^n$, $(dd^c v)^n$ są dobrze zdefiniowane), μ jest* *dodatnią miarą, $f,\ g \in L^1(d\mu)$ oraz $(dd^c\, u)^n \geq f d\mu$, $(dd^c\, v)^n \geq g d\mu$ (w sensie miar), to czy prawdą jest, że (znów w sensie miar)*

$$(dd^c\, u)^k \wedge (dd^c\, v)^{n-k} \geq f^{\frac{k}{n}} g^{\frac{n-k}{n}} d\mu, \tag{2.3}$$

$$(dd^c(u+v))^n \geq (f^{\frac{1}{n}} + g^{\frac{1}{n}})^n d\mu. \tag{2.4}$$

Analizę tego problemu zaczniemy od kontrprzykładu pokazującego, że bez dodatkowych założeń powyższy fakt jest nieprawdziwy.

Przykład 2.1.50. *Niech*

$$u_k = \max\{\frac{1}{k}\log|z_1|, k^2\log|z_2|\}, \quad v_k = \max\{\frac{1}{k}\log|z_2|, k^2\log|z_1|\}, \ k \in \mathbb{R},\ k > 0.$$

Można pokazać, że u_k oraz v_k należą do $\mathcal{E}$ dla dowolnego $k > 0$ (załóżmy, dla ustalenia uwagi, że rozważamy powyższe funkcje w bidysku jednostkowym).

Wtedy

$$(dd^c\, u_k)^2 = (2\pi)^2 \frac{k}{2}\delta_0, \ (dd^c\, v_k)^2 = (2\pi)^2 \frac{k}{2}\delta_0$$

lecz

$$dd^c\, u_k \wedge dd^c\, v_k = (2\pi)^2 \frac{1}{2k^2}\delta_0,$$

$$(dd^c(u_k+v_k))^2 = (2\pi)^2(k + \frac{1}{k})\delta_0$$

(δ_0 jest deltą Diraca w 0). Tak więc (2.3) oraz (2.4) nie zachodzą.

Uwaga 2.1.51. *Funkcje te zostały wzięte z pracy* [W2]*, gdzie zostały one wykorzystane do innych celów. Obliczenia poniżej opierają się na pomysłach z prac* [R1]*,* [R2]*.*

Dowód. Policzmy miarę $(dd^c\, u_k)^2$ ($(dd^c\, v_k)^2$, dzięki symetrii, liczy się analogicznie). Skoro $u_k \in \mathcal{E} = \mathcal{D}$, z twierdzenia Błockiego (Twierdzenie 2.1.41) wynika iż wystarczy policzyć $(dd^c\, u_{k,j})^2$, gdzie $u_{k,j} := \max\{u_k, -j\}$. Zamieniając zmienne

$$(x, y) \longrightarrow (\log|z_1|, \log|z_2|)$$

uzyskamy

$$\int_{\mathbb{D}^2} (dd^c\, u_{k,j})^2 = (2\pi)^2 \int_{\{x\leq 0, y \leq 0\}} MA(\overline{u}_{k,j}),$$

gdzie MA jest rzeczywistym opratorem Monge'a-Ampère'a oraz

$$\overline{u}_{k,j}(x,y) := \max\{\frac{1}{k}x,\ k^2 y,\ -j\}.$$

Z twierdzenia Aleksandrowa (patrz [Al]) całka ta równa się polu obrazu gradientu, czyli

$$\int_{\{x\leq 0, y\leq 0\}} MA(\overline{u}_{k,j}) = \lambda(\nabla\overline{u}_{k,j}(\{x \leq 0, y \leq 0\})),\ \nabla\overline{u}_{k,j}(E) := \cup_{w\in E} \nabla\overline{u}_{k,j}(w),$$

gdzie $\nabla\overline{u}_{k,j}(w) := \{t \in \mathbb{R}^n |\, u_{k,j}(w) + < s - w, t > \leq u_{k,j}(s),\ \forall s \in Dom\, u_{k,j}\}$.

W punktach, gdzie $u_{k,j}$ jest gładka zbiór $\nabla\overline{u}_{k,j}(w)$ jest singletonem (jest to zwykły gradient $u_{k,j}$). Natomiast w punktach osobliwych zazwyczaj zbiór $\nabla\overline{u}_{k,j}$ jest większy. Tak więc tam gdzie $u_{k,j}$ jet gładka i równa $\frac{1}{k}x$ dostajemy $\nabla\overline{u}_{k,j}(w) = \{(\frac{1}{k}, 0)\}$. Analogicznie w pozostałych dwóch "gładkich sektorach" $u_{k,j} = k^2 y$ oraz $u_{k,j} = -j$ $\nabla\overline{u}_{k,j}(w)$ będą odpowiednio równe $\{(0, k^2)\}$ i $\{(0,0)\}$. Tak więc miara Lebesgue'a obrazu gradientu tych zbiorów wynosi 0. Niech teraz w będzie punktem, w którym $\frac{1}{k}x = k^2 y > -j$. Wtedy obraz gradientu tego punktu będzie odcinkiem domkniętym pomiędzy punktami $(\frac{1}{k}, 0)$ i $(0, k^2)$. Analogicznie w innych punktach gdzie dwie z trzech rozważanych funkcji dają maksimum obrazem gradientu będzie odcinek łączący odpowiednie punkty. W punkcie $(-kj, \frac{-j}{k^3})$ (gdzie wszystkie trzy funkcje są równe), obrazem gradientu będzie trójkąt o wierzchołkach $(\frac{1}{k}, 0)$, $(0, k^2)$, $(0, 0)$.

Tak więc całkowita masa $(dd^c\, u_{k,j})^2$ na bidysku równa się $(2\pi)^2 \frac{k}{2}$.

Ustalmy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{D}^2$ rozłączny z $(0,0)$. Jego obraz logarytmiczny nie będzie zawierał punktu $(-kj, \frac{-j}{k^3})$ dla dużych j, więc miara Lebesgue'a obrazu gradientu U wynosi 0. Pokazuje to, że $(dd^c\, u_k)^2$ jest skupiona w punkcie $(0,0)$, a znając całkowitą masę dostajemy $(dd^c\, u_k)^2 = (2\pi)^2 \frac{k}{2} \delta_0$. Również $(dd^c\, v_k)^2 = (2\pi)^2 \frac{k}{2} \delta_0$.

Pozostała do policzenia miara $dd^c\, u_k \wedge dd^c\, v_k$. Zauważmy, że

$$2dd^c u_k \wedge dd^c\, v_k = (dd^c(u_k + v_k))^2 - (dd^c\, u_k)^2 - (dd^c\, v_k)^2,$$

wystarczy więc policzyć $(dd^c(u_k + v_k))^2$. Z równości

$$u_k + v_k = \max\{(k^2 + \frac{1}{k}) \log|z_1|,\ \frac{1}{k} \log|z_1 z_2|,\ (k^2 + \frac{1}{k}) \log|z_1|\}.$$

i analogicznego rozumowania dostaniemy, że $\nabla \overline{u}_{k,j} \max\{\overline{u_k + v_k},\ -j\}$ jest (wklęsłym) czworokątem o wierzchołkach (kolejność wierzchołków zgodna z ruchem wskazówek zegara) $(0, k^2 + \frac{1}{k})$, $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$, $(k^2 + \frac{1}{k}, 0)$, $(0, 0)$. Czworokąt ten ma pole $k + \frac{1}{k^2}$, więc $(dd^c(u_k + v_k))^2 = (2\pi)^2 (k + \frac{1}{k^2}) \delta_0$. Dostajemy stąd, że $dd^c\, u_k \wedge dd^c\, v_k = (2\pi)^2 \frac{1}{2k^2} \delta_0$. $\square$

Zauważmy, że w tym przykładzie miary Monge'a-Ampère'a były skoncentrowane na zbiorze pluripolarnym (w punkcie). Stąd widać, że dodatnia masa na (pewnych) zbiorach pluripolarnych jest przeszkodą aby nierówności (2.3) oraz (2.4) zachodziły.

Poniżej wykażemy główny wynik tego rozdziału:

Twierdzenie 2.1.52. *Niech μ będzie dodatnią miarą na obszarze hiperwypukłym $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Zakładamy, że miara ta znika na zbiorach pluripolarnych. Niech $u_1, u_2, \cdots, u_n \in PSH(\Omega)$ będą funkcjami należącymi do $\mathcal{E}(\Omega)$. Zakładamy ponadto, że f_i, $i = 1, \cdots, n$ są nieujemnymi funkcjami w Ω całkowalnymi względem μ. Jeżeli*

$$(dd^c\, u_i)^n \geq f_i d\mu,\ \forall i = 1, \cdots, n,$$

to zachodzą nierówności

$$dd^c\, u_1 \wedge dd^c\, u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c\, u_n \geq (f_1 f_2 \cdots f_n)^{\frac{1}{n}} d\mu.$$

Uwaga 2.1.53. *Wynik ten ma charakter lokalny, wystarczy więc uzasadnić nierówność w pewnej (małej) kuli. Aby uprościć notację, wykażemy wynik dla dwóch różnych funkcji u oraz v zamiast dla n różnych funkcji. Ogólny przypadek wyniknie łatwo po pewnych modyfikacjach, które zostaną podane na końcu dowodu.*

Dowód. W [K3] twierdzenie to zostało wykazane przy dodatkowych założeniach, mianowicie gdy μ jest miarą Lebesgue'a oraz u i v są ciągłe. Głównym pomysłem w tym dowodzie jest aproksymacja u i v gładkimi funkcjami plurisubharmonicznymi o kontrolowanych miarach Monge'a-Ampère'a oraz wykorzystanie tej samej nierówności z przypadku gładkiego.

Strategia dowodu poniżej jest podobna. Znajdziemy odpowiednie ciągi u_j, v_j dla których Twierdzenie 2.1.52 zachodzi, oraz wykażemy zbieżność tych ciągów odpowiednio do u i v pociągającą słabą zbieżność ciągu $(dd^c\, u_j)^k \wedge (dd^c\, v_j)^{n-k}$ do $(dd^c\, u)^k \wedge (dd^c\, v)^{n-k}$. Aby zilustrować trudności przypominamy (patrz Przykład 2.1.26), że słaba zbieżność $(dd^c\, u_j)^n$ do $(dd^c\, u)^n$ (nawet gdy wszystkie funkcje mają takie same wartości brzegowe) nie pociąga za sobą odpowiednio dobrej zbieżności (wzgledem pojemności) ciągu u_j do u. Z drugiej strony, aproksymując funkcje za pomocą splotu dostaniemy zbieżność względem pojemności, jednak nie dostaniemy nierówności miar dla ciągów regularyzujących.

Wprowadźmy więc specjalny ciąg regularyzujący dla ustalonej miary μ na obszarze $\Omega \in \mathbb{C}^n$. Będziemy go nazywać *aproksymacją kanoniczną* (patrz [K1]). Niech *supp* μ będzie zawarty w dużej kostce I. Niech $\mathcal{B}_k$ będzie podziałem I na 3^{2kn} jednakowych małych kostek I_k^j, $j = 1, \cdots, 3^{2kn}$. Bez straty ogólności zakładamy, że $\mu(\cup_{I_k^j \in \mathcal{B}_k} \partial(I_k^j)) = 0$ (w przeciwnym przypadku zawsze możemy przesunąć trochę układ współrzędnych). Zdefiniujmy

$$\mu_k := \sum_j \frac{\mu(I_k^j \cap \Omega)}{d\lambda(I_k^j \cap \Omega)} \chi_{I_k^j} \, d\lambda, \tag{2.5}$$

gdzie $\chi_{I_k^j}$ jest funkcją charakterystyczną I_k^j. Oczywiście ciąg μ_k jest słabo zbieżny do μ i każda miara μ_k ma gęstość w L^∞ względem miary Lebesgue'a.

Poniżej przedstawiamy kilka znanych faktów z których bedziemy w dowodzie korzystać:

Twierdzenie 2.1.54. *Niech Ω będzie gładkim ściśle pseudowypukłym obszarem $\mathbb{C}^n$ oraz $f \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$ będzie dowolną funkcją. Zakładamy, że μ jest dodatnią miarą na Ω o skończonej masie i nośniku zwartym. Dodatkowo μ spełnia następujący warunek dla pewnego $p > \frac{n}{n-1}$:*

Istnieje stała $A = A(p)$, taka że

$$\int_\Omega (-\phi)^p d\mu \leq A\Big(\int_\Omega (-\phi)^p (dd^c \phi)^n\Big)^{\frac{p}{n+p}}$$

dla dowolnej funkcji $\phi \in \mathcal{E}_0$. Wtedy:

(1) *Istnieje funkcja $u_k \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ będąca rozwiązaniem problemu Dirichleta*

$$\begin{cases} u_k \in PSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ (dd^c u_k)^n = \mu_k \\ u_k = f \ on \ \partial\Omega, \end{cases}$$

(μ_k to kanonicze aproksymanty μ).

(2) *Niech $u := (limsup_{k\to\infty} u_k)^*$. Istnieje wtedy podciąg $\{u_k\}$ (który dla wygody oznaczamy również przez $\{u_k\}$), taki, że $u_k \to u$ in $L^1(d\lambda)$.*

(3) *Dodatkowo dla tego ciągu zachodzą następujące fakty:*

$$\sup_k \int_\Omega |-u_k|(dd^c u_k)^n < \infty$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u - u_k|(dd^c u_k)^n = 0.$$

Dowód pierwszej części można znaleźć w [K1]. Opiera się on na głębokich faktach z teorii pluripotencjału i wykorzystuje w istotny sposób iż μ_k jest typu $gd\lambda$ dla pewnej funkcji $g \in L^\infty(d\lambda)$. Druga część wynika ze specjalnych własności funkcji plurisubharmonicznych - mianowicie zawsze można wybrać podciąg zbieżny w słabej topologii, a dla funkcji plurisubharmonicznych zbieżność w słabej topologii jest równoważna zbieżności w L^1_{loc} (patrz np. [Ho]). Trzecią własność dostaniemy z połączenia Twierdzeń 5.1 oraz 7.7, a także Lematów 5.2, 5.3, 7.8 oraz 7.9 z pracy [Ce2]. W szczególności wykorzystując oszacowanie $\int_\Omega (-\phi)^p d\mu \leq A(\int_\Omega (-\phi)^p (dd^c \phi)^n)^{\frac{p}{n+p}}$ można uzasadnić iż $\lim_{j\to\infty} \int u_j d\mu = \int u_j d\mu$. Wykazanie, że w tym ostatnim wzorze można zamienić μ na μ_j jest skomplikowane (istotnie wykorzystuje się znów specjalną postać μ_k). Odsyłamy do [Ce2] gdzie można znaleźć szczegóły techniczne. Warunek, że funkcje mają takie same wartości brzegowe można osłabić. Gdyby wartości brzegowe ciągu u_k tworzyły malejący ciąg zbieżny do pewnej półciągłej funkcji na brzegu, to $u := (limsup_{k\to\infty} u_k)^*$ znów jest poprawnie określone, oraz powtarzając dowód z [Ce2] dostaniemy skończoność i zbieżność całek.

Twierdzenie 2.1.55. *Niech $u_j \in PSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ będzie ciągiem zbieżnym do $u \in PSH(\Omega)$ względem $L^1(d\lambda, \Omega)$. Przypuśćmy także, że u_k (więc również u) mają takie same wartości brzegowe, tzn. $\lim_{z\to\zeta} u_j(z) = f(\zeta)\ \forall \zeta \in \partial\Omega$. Jeżeli dodatkowo założymy, że $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u - u_k|(dd^c u_k)^n = 0$, to u_k jest zbieżny do u względem pojemności.*

Wynik ten zawiera się w dowodzie Lematu 2.1 w pracy [CeK2]. Znów warunek brzegowy można osłabić dopuszczając by wartości brzegowe u_j tworzyły ciąg malejący (w dowodzie z [CeK2] wartości brzegowe wykorzystywane są aby uzyskać relatywną zwartość zbiorów $\{u_j < u - a\},\ a > 0$, a więc to samo będzie zachodzić w przypadku gdy wartości brzegowe u_j są wieksze od tychże dla funkcji u).

Powracamy teraz do głównego dowodu. Załóżmy, że u oraz v są dodatkowo ograniczone.

Wybierzmy mała kulę $\mathbb{B}^n$, taką, że $u,\ v$ są zdefiniowane w jej otoczeniu. Niech $m_j,\ n_j$ będą ciągami gładkich funkcji na $\partial\mathbb{B}^n$, malejącymi odpowiednio do $u|_{\partial\mathbb{B}^n}$ oraz $v|_{\partial\mathbb{B}^n}$. Niech $u_j,\ v_j$ będą rozwiązaniami równań

$$\begin{cases} u_j \in PSH(\mathbb{B}^n) \cap L^\infty(\mathbb{B}^n) \\ (dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n_j \\ u_j|_{\partial\mathbb{B}^n} = m_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_j \in PSH(\mathbb{B}^n) \cap L^\infty(\mathbb{B}^n) \\ (dd^c v_j)^n = (dd^c v)^n_j \\ v_j|_{\partial\mathbb{B}^n} = n_j, \end{cases}$$

(przypominamy, że $(dd^c u)^n_j$ jest kanoniczną aproksymantą miary $(dd^c u)^n$). Dzięki Twierdzeniu 2.1.54 rozwiązania te istnieją.

Odnotujmy tu pewną subtelność. Gdyby u oraz v były ciągłe, to ciągi $m_j,\ n_j$ byłyby niepotrzebne (możemy pracować na ciągłych wartościach brzegowych). Również po prawej stronie korzystamy z aproksymantów zamiast samych miar. Powód jest następujący: problem Dirichleta

$$\begin{cases} u_j \in PSH(\mathbb{B}^n) \cap L^\infty(\mathbb{B}^n) \\ (dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n \\ u_j|_{\partial\mathbb{B}^n} = m_j \end{cases}$$

nie musi mieć rozwiązania ciągłego do brzegu.

Propozycja 2.1.56. *Niech $u_j,\ v_j$ oraz $u,\ v$ będą jak wyżej. Niech także u_j (odpowiednio v_j) zmierza do u (odpowiednio v) w $L^1(d\lambda)$. W takiej sytuacji dostajemy zbieżność*

$$(dd^c u_j)^k \wedge (dd^c v_j)^{n-k} \to (dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{n-k},\ \forall k \in \{1, \cdots, n\}.$$

Dowód. Zauważmy, że nierówność

$$\int_\Omega (-\phi)^p d\mu \le A(p)(\int_\Omega (-\phi)^p (dd^c \phi)^n)^{\frac{p}{n+p}},\ \phi \in \mathcal{E}_0(\Omega)$$

zachodzi dla dowolnego p z pewną stałą $A(p)$ zależną od p, o ile μ jest miarą Monge'a-Ampère'a pewnej ograniczonej funkcji plurisubharmonicznej (fakt ten wynika łatwo z teorii rozwiniętej w [Ce2]). Z Twierdzenia 2.1.54 (i uwagi po tym twierdzeniu), dostaniemy po ewentualnym przejściu do podciągów, że

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |u-u_k|(dd^c u_k)^n = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |v-v_k|(dd^c v_k)^n = 0.$$

Z Twierdzenia 2.1.55 (i uwagi po nim) dostajemy, że u_k oraz v_k zmierzają do u oraz v względem pojemności.

Dostaniemy więc z twierdzenia Xinga zbieżność

$$(dd^c u_j)^k \wedge (dd^c v_j)^{n-k} \to (dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{n-k},$$

o ile ciągi $u_j,\ v_j$ są lokalnie jednostajnie ograniczone.

Nie wiemy jednak *a priori* czy nasze ciągi są rzeczywiście lokalnie jednostajnie ograniczone. Problem ten można ominąć, o ile uzasadnimy iż $u_j,\ v_j$ mają jednostajnie ograniczoną $\mathcal{E}^1$-energię (patrz [Ce2] lub [K4]). Aby to wykazać weźmy dowolny $U \Subset \Omega$, taki, że $cap(U,\mathbb{B}^n) < \epsilon$. Wtedy z Twierdzenia 2.1.46 wynika, że

$$\begin{aligned}
&\int_U (dd^c u_j)^k \wedge (dd^c v_j)^{n-k} \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{B}^n} -h_{U,\Omega}(dd^c(u_j+U(0,-m_j)))^k \wedge (dd^c(v_j+U(0,-n_j)))^{n-k} \leq \\
&\leq (\int_{\mathbb{B}^n} -(u_j+U(0,-m_j))(dd^c(u_j+U(0,-m_j)))^n)^{\frac{k}{n+1}} \\
&\times (\int_{\mathbb{B}^n} -(v_j+U(0,-n_j))(dd^c(v_j+U(0,-n_j)))^n)^{\frac{n-k}{n+1}} (\int_{\mathbb{B}^n} -h_{U,\Omega}(dd^c h_{U,\Omega})^n)^{\frac{1}{n+1}} \leq \\
&\leq C^{\frac{n}{n+1}} cap(U,\Omega)^{\frac{1}{n+1}} \leq C^{\frac{n}{n+1}} \epsilon^{\frac{1}{n+1}},
\end{aligned}$$

gdzie C jest wspólnym ograniczniem dla $\mathcal{E}^1$-energii funkcji $u_j,\ v_j$, a $h_{U,\Omega}$ jest relatywną funkcją ekstremalną zbioru U. Skorzystaliśmy z nierówności typu Höldera, co jest dopuszczalne, gdyż $u_j+U(0,-m_j), v_j+U(0,-v_j)$ należą do $\mathcal{E}_0$ (patrz [Ce3]). Uzasadnienie $\mathcal{E}^1$ oszacowania dla ciągów jest techniczne i zostanie podane w Lemacie 2.1.57 poniżej.

Dzięki $\mathcal{E}^1$ oszacowaniu oraz Twierdzeniu 2.1.46, dostajemy także

$$cap(\{u_j < -s\},\Omega) \leq \int_\Omega -\frac{|u_j|}{s}(dd^c h_{\{u_j<-s\},\Omega})^n \leq \frac{C}{s},$$

ze stałą C niezależną od j oraz s.

Ustalmy s wystarczająco duże, tak aby $cap(\{u_j < -s\},\Omega) \leq \epsilon, \forall j$. Dla dowolnej funkcji testującej χ otrzymamy

$$\begin{aligned}
&|\int_{\mathbb{B}^n} \chi[(dd^c u_j)^k \wedge (dd^c v_j)^{n-k} - (dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{n-k}]| \leq \\
&\leq |\int_{\{u_j\leq -s\}\cup\{v_j\leq -s\}} \chi((dd^c u_j)^k \wedge (dd^c v_j)^{n-k} - (dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{n-k})| + \\
&+ |\int_{\mathbb{B}^n} \chi((dd^c max(u_j,-s))^k \wedge (dd^c max(v_j,-s))^{n-k} - (dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{n-k})|.
\end{aligned}$$

Pierwszy wyraz jest mały dzięki rozumowaniu powyżej, a drugi zmierza do 0 dzięki twierdzeniu Xinga. Uzyskaliśmy więc zbieżność miar. □

Lemat 2.1.57. *Istnieje stała C, niezależna od j, taka, że*

$$\int_{\mathbb{B}^n} -(v_j + U(0,-n_j))(dd^c(v_j + U(0,-n_j)))^n < C.$$

Dowód. Niech $g_j := U((dd^c v_j)^n, 0)$. Z pracy [Ce2] wiadomo, że $g_j \in \mathcal{E}_0$ oraz $(dd^c g_j)^n = (dd^c v_j)^n$. Z zasady porównawczej dla pary $v_j, g_j + U(0,n_j)$ dostajemy

$$v_j + U(0,-n_j) \geq g_j + U(0,n_j) + U(0,-n_j).$$

Niech $h_j := U(0,n_j) + U(0,-n_j)$. Z Propozycji 2.1.48 dodatkowo mamy

$$\int_{\mathbb{B}^n} -(v_j + U(0,-n_j))(dd^c(v_j + U(0,-n_j)))^n \leq \int_{\mathbb{B}^n} -(g_j + h_j)(dd^c(g_j + h_j))^n.$$

Ostatni wyraz można rozłożyć na sumę składników typu

$$\binom{n}{m} \int_{\mathbb{B}^n} -(g_j + h_j)(dd^c g_j)^m \wedge (dd^c h_j)^{n-m},\ m \in \{0, \cdots, n\}.$$

Znowu dzięki Twierdzeniu 2.1.46 wyrazy te można oszacować z góry przez iloczyn elementów typu $\int_{\mathbb{B}^n} -g_j(dd^c g_j)^n$ oraz $\int_{\mathbb{B}^n} -h_j(dd^c h_j)^n$. Zauważmy jednak iż h_j jest ciągiem jednostajnie ograniczonym, a dla g_j mamy nierówność

$$\int_{\mathbb{B}^n} -g_j(dd^c g_j)^n = \int_{\mathbb{B}^n} -g_j(dd^c v_j)^n \leq \int_{\mathbb{B}^n} -(v_j + U(0,-n_j))(dd^c v_j)^n.$$

Ciąg $U(0,-n_j)$ jest jednostajnie ograniczony, miary $(dd^c v_j)^n$ mają jednostajnie ograniczoną łączną masę oraz wyrażenie $\sup_j \int_{\mathbb{B}^n} -v_j(dd^c v_j)^n$ jest skończone dzięki Twierdzeniu 2.1.54. Uzyskaliśmy więc potrzebne oszacowanie. $\square$

Dalej dowód przbiega następująco:

$$\begin{aligned}
(dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{n-k} &= \lim_{j\to\infty} (dd^c u_j)^k \wedge (dd^c v_j)^{n-k} \\
&\geq \limsup_{j\to\infty} \sum_j \chi_{I_k^j} \frac{(\int_{I_k^j} (dd^c u)^n)^{\frac{k}{n}} (\int_{I_k^j} (dd^c v)^n)^{\frac{n-k}{n}}}{d\lambda(I_k^j)} d\lambda \\
&\geq \limsup_{j\to\infty} \sum_j \chi_{I_k^j} \frac{(\int_{I_k^j} f d\mu)^{\frac{k}{n}} (\int_{I_k^j} g d\mu)^{\frac{n-k}{n}}}{d\lambda(I_k^j)} d\lambda \\
&\geq \limsup_{j\to\infty} \sum_j \chi_{I_k^j} \frac{(\int_{I_k^j} f^{\frac{k}{n}} g^{\frac{n-k}{n}} d\mu)}{d\lambda(I_k^j)} d\lambda = f^{\frac{k}{n}} g^{\frac{n-k}{n}} d\mu.
\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z nierówności znanej z przypadku "μ to miara Lebesgue'a" oraz (zwykłej) nierówności Höldera.

Przypadek n różnych funkcji dowodzi się analogicznie. Jedyną istotną zmianą w ogólnej sytuacji jest konieczność skorzystania z uogólnionej nierówności Höldera (dla n funkcji) zamiast wersji klasycznej.

Rozważmy teraz przypadek funkcji nieograniczonych.

Skorzystajmy z następującej znanej nierówności, która jest szczególnym przypadkiem nierówności Demailly'ego (dowód można znaleźć w [KH]):

$$(dd^c \max(u, -j))^n \geq \chi_{\{u>-j\}} (dd^c u)^n \tag{2.6}$$

dla dowolnej funkcji u z klasy $\mathcal{E}(\Omega)$. Z pomocą tego wyniku, nierówności w przypadku ograniczonym oraz monotonicznego przechodzenia do granicy dostaniemy

$$(dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{n-k} = lim_{j\to\infty}(dd^c \max(u,-j))^k \wedge (dd^c \max(v,-j))^{n-k} \geq$$
$$\geq limsup_{j\to\infty}(\chi_{\{u>-j\}}f)^{\frac{k}{n}}(\chi_{\{v>-j\}}g)^{\frac{n-k}{n}}\mu.$$

Ostatni wyraz zmierza do $f^{\frac{k}{n}}g^{\frac{n-k}{n}}\mu$, gdyż μ zeruje się na (pluripolarnym) zbiorze $\{u=-\infty\}\cup\{v=-\infty\}$. Dowodzi to nierówności w przypadku nieograniczonym.

□

2.2. **Geometria zespolona.** Rozmaitość zespolona to (parzysto - wymiarowa) rozmaitość o *strukturze zespolonej*, tzn. przejścia pomiędzy mapami są holomorficzne. W naszych rozważaniach skupimy się na zwartych rozmaitościach zespolonych, chociaż niektóre z wprowadzonych pojęć są niezależne od zwartości. Tak więc, o ile wyraźnie nie jest zaznaczone coś innego, przez rozmaitość w tym rozdziale rozumiemy zwartą rozmaitość.

2.2.1. *Rozmaitości kählerowskie -definicje i przykłady.* Ustalmy (zespoloną) rozmaitość X oraz niech $n = dimX$. W lokalniej mapie znajdziemy wiele gładkich dodatnich $(1,1)$-form (przez dodatniość rozumiemy tu ściśle dodatnią określoność w każdym punkcie). Dzięki rozkładowi jedności można pokleić takie lokalne formy by dostać globalną dodatnią $(1,1)$-formę. Indukuje ona metrykę hermitowską na wiązce stycznej, stąd takie formy będziemy nazywać *formami hermitowskimi*.

Lokalnie możemy zawsze znaleźć *zamknięte* formy hermitowskie (np. jeżeli $z = (z_1,\cdots, z_n)$ będą lokalnymi współrzędnymi, to $dd^c||z||^2$ jest taką lokalną formą). Pytanie o istnienie *globalnej* zamkniętej formy hermitowskiej prowadzi do pojęcia *rozmaitości kählerowskiej*:

Definicja 2.2.1 (Rozmaitość kählerowska). *Zespoloną rozmaitość X nazywamy kählerowską jeżeli istnieje globalna dodatnia i zamknięta $(1,1)$-forma. Taką formę nazywamy formą kählerowską.*

Poniżej podajemy kilka podstawowych przykładów rozmaitości kählerowskich:

Przykład 2.2.2 (Przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}^n$). *Rozważmy zbiór $\mathbb{P}^n$ składający się z wszystkich prostych zespolonych przechodzących przez punkt 0 w $\mathbb{C}^{n+1}$. Na zbiorze tym można wprowadzić strukturę (zespolonej) rozmaitości wykorzystując naturalną projekcję z $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$. Aby zdefiniować formę kählerowską $\mathbb{P}^n$ rozważmy formę*

$$dd^c log(|Z_0|^2+\cdots+|Z_n|^2),$$

gdzie Z_i są współrzędnymi w $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$. Odnotujmy, że forma ta jest niezmiennicza na każdej prostej zespolonej przechodzącej przez 0 (wynika to z faktu iż funkcja $\lambda\to log|\lambda|$ jest harmoniczna na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$). Tak więc forma ta przenosi się jako $(1,1)$-forma na $\mathbb{P}^n$. Tak skonstruowaną formę nazywamy (kählerowską) formą Fubiniego-Studiego i oznaczamy ją przez ω_{FS}.

Uwaga 2.2.3. *Współrzędne $Z_0,\cdots,Z_n$ nazywamy współrzędnymi jednorodnymi, a $[Z_0 : ,\cdots, Z_n]$, rozumiane jako klasy abstrakcji modulo mnożenie przez (zespolony) skalar są współrzędnymi na $\mathbb{P}^n$. Jest to wygodne oznaczenie w analizie na przestrzeniach rzutowych.*

Zauważmy, że zawężając zamkniętą $(1,1)$-formę hermitowską do (zespolonej) podrozmaitości dostajemy znów zamkniętą formę hermitowską.

Propozycja 2.2.4. *Każda zespolona podrozmaitość rozmaitości kählerowskiej jest rozmaitością kählerowską. W szczególności wszystkie podrozmaitości $\mathbb{P}^n$ są kählerowskie. Takie rozmaitości nazywamy rzutowymi bądź algebraicznymi.*

Inną standardową konstrukcją pozwalającą tworzyć nowe rozmaitości jest iloczyn kartezjański. Można się łatwo przekonać, że dla dwóch rozmaitości kählerowskich (X, ω_X), (Y, ω_Y) ich iloczyn kartezjański $X \times Y$ można zaopatrzyć w formę kählerowską $\omega := \pi_X^* \omega_X + \pi_Y^* \omega_Y$, ($\pi_Z$ oznacza tu rzutowanie na Z). Dostajemy więc kolejna propozycję:

Propozycja 2.2.5. *Iloczyn kartezjański dwóch rozmaitości kählerowskich jest rozmaitością kählerowską.*

Inną grupę przykładów tworzą *torusy zespolone*:

Przykład 2.2.6 (Zespolony torus). *Niech Λ będzie kratą w $\mathbb{C}^n$. Wtedy forma kählerowska o stałych współczynnikach $\omega := \sum_{j=1}^n idz_j \wedge d\bar{z}_j$ przenosi się na iloraz $\mathbb{C}^n / \Lambda$ (który topologicznie jest $2n$-wymiarowym torusem). Tak więc torusy zespolone są rozmaitościami kählerowskimi.*

Uwaga 2.2.7. *Można wykazać, (szczegóły można znaleźć np. w* [De3]*) że nie każdy torus jest rozmaitością rzutową (zależy to od wyboru kraty Λ, choć oczywiście wszystkie torusy są homeomorficzne). Tak więc rozmaitości kählerowskie tworzą istotnie większą klasę niż rozmaitości algebraiczne.*

Omówienie tematu nie byłoby pełne bez przytoczenia przykładu rozmaitości zespolonej, która nie jest kählerowska.

Przykład 2.2.8 (Powierzchnia Hopfa). *Niech $\phi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \ni z \to 2z \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Można sprawdzić iż grupa $< \phi >$ generowana przez automorfizm ϕ (obszaru $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$) działa w sposób wolny i całkowicie dyskretny, tak więc iloraz $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / < \phi >$ posiada strukturę rozmaitości zespolonej. Rozmaitość ta nazwana jest powierzchnią Hopfa. Można udowodnić, (patrz np.* [De3]*) że (z powodów topologicznych) na powierzchni Hopfa nie można znaleźć żadnej formy kählerowskiej.*

Więcej informacji o rozmaitościach kählerowskch można znaleźć w [De3], [GH] oraz [T].

2.2.2. *Pojęcia z geometrii algebraicznej (dywizory i wiązki).* W tym rozdziale przedstawimy podstawowe pojęcia z geometrii algebraicznej, z których będziemy korzystać. Większość konstrukcji zostanie tylko naszkicowana. Odsyłamy do [GH], gdzie można znaleźć znacznie bardziej szczegółowe rozważania na temat omawianych pojęć.

Zaczynamy od wprowadzenia pojęcia dywizora:

Definicja 2.2.9 (Dywizor). *Niech X będzie rozmaitością zespoloną (niekoniecznie zwartą lub kählerowską). Dywizorem na X nazywamy lokalnie skończoną formalną kombinację liniową*

$$D = \sum_i a_i V_i,$$

z pewnymi stałymi $a_i \in \mathbb{Z}$ oraz nierozkładalnymi analitycznymi hiperpowierzchniami V_i ("lokalnie skończona" oznacza tu, że każdy punkt posiada otoczenie takie, że tylko skończona liczba sposród V_i przecina się z tym otoczeniem). Zbiór wszystkich dywizorów na X tworzy grupę abelową (z naturalnym działaniem), którą będziemy oznaczać przez $Div(X)$.

Oczywiście w przypadku zwartych rozmaitości "lokalnie skończona suma" to po prostu suma skończona. Odnotujmy, że w definicji dopuszczamy hiperpowierzchnie V_i z osobliwościami. Nierozkładalność jest założeniem technicznym wprowadzonym aby dostać jednoznaczność rozkładu dywizora na formalną sumę skończoną. Gdyby V była hiperpowierzchnią rozkładalną, to $V = \cup_{i=1} W_i$, gdzie W_i są nierozkładalnymi składowymi

V (standardowy fakt z teorii zbiorów analitycznych głosi, że taki rozkład jest lokalnie skończony). Tak więc zamiast V możemy użyć sumę formalną $\sum_i W_i$.

Szczególnie ciekawe w geometrii algebraicznej są *dywizory efektywne*:

Definicja 2.2.10 (Dywizor efektywny). *Dywizor D nazywamy efektywnym jeżeli w rozkładzie*

$$D = \sum_i a_i V_i$$

wszystkie a_i są nieujemne (z jedyności rozkładu wynika, że definicja ta jest poprawna). Efektywność dywizora będziemy oznaczać przez $D \geq 0$.

Hiperpowierzchnię zespoloną lokalnie można określić jako zbiór zer funkcji holomorficznej. Poniżej omówimy powiązania dywizorów i tych lokalnie zdefiniowanych obiektów.

Definicja 2.2.11 (Krotność funkcji). *Niech g będzie funkcją holomorficzną w otoczeniu punktu $p \in V \subset X$. Krotnością $ord_{V,p}(g)$ funkcji g wzdłuż V w p nazywamy największą liczbę naturalną (lub zero) k, taką, że (w otoczeniu p) funkcja f definiująca hiperpowierzchnię V podniesiona do potęgi k dzieli g.*

Klasyczny wynik z analizy zespolonej głosi, że jeżeli kiełki funkcji holomorficznych u oraz v są względnie pierwsze w punkcie p, to będą one względnie pierwsze również w otoczeniu p (dowód można znaleźć np. w [GH]). Wynika stąd, że na części regularnej V krotność jest lokalnie stała, a więc w przypadku gdy V jest nierozkładalna jest to liczba stała na całym zbiorze punktów regularnych V przeciętym z obszarem określenia funkcji g. Oznaczamy więc w tym przypadku krotność przez $ord_V(g)$.

Obserwacja 2.2.12. *Przy oczywistych założeniach na V i dziedziny określenia f oraz g zachodzi wzór*

$$ord_V(fg) = ord_V(f) + ord_V(g).$$

Jeśli f jest globalną funkcją meromorficzną (takie funkcje mogą istnieć nawet gdy X jest zwarta) to lokalnie można ją zapisać jako $f = \frac{g}{h}$, gdzie g i h są holomorficzne oraz względnie pierwsze. Jeśli V jest hiperpowierzchnią nierozkładalną, to możemy zdefiniować

$$ord_V(f) := ord_V(g) - ord_V(h).$$

Definicja 2.2.13. *Niech f będzie funkcją meromorficzną. Definiujemy dywizor (f) za pomocą wzoru*

$$(f) = \sum_V ord_V(f)V,$$

(sumujemy po wszystkich hiperpowierzchniach dla których $ord_V(f) \neq 0$). Analogicznie definiujemy dywizor zer przez

$$(f)_0 = \sum_V ord_V(g)V,$$

(definicja nie zależy od lokalnego reprezentanta g), oraz dywizor biegunów przez

$$(f)_\infty = \sum_V ord_V(h)V,$$

(znów jest on poprawnie zdefiniowany). Z samej definicji wynika iż zachodzi wzór

$$(f) = (f)_0 - (f)_\infty.$$

W tym momencie przerywamy na chwilę omawianie dywizorów aby wprowadzić pojęcie *wiązek wektorowych.* Jak zobaczymy poniżej, istnieją naturalne związki pomiędzy dywizorami a (holomorficznymi) wiązakmi liniowymi (czyli wymiaru 1).

Intuicyjnie holomorficzna wiązka wektorowa (wymiaru r) lokalnie wygląda jak iloczyn kartezjański kawałka rozmaitości z $\mathbb{C}^r$, oraz wszystkie te lokalne iloczyny kartezjańskie są poklejone ze sobą tak aby dawały gładką strukturę "dwukierunkową": w jednym kierunku wiązka wygląda jak $\mathbb{C}^r$ (tzw. kierunek pionowy bądź kierunek włókna), a w drugim "poziomym" wiązka wyglada jak rozmaitość nad którą ją rozpatrujemy.

Poniżej podajemy formalną definicję:

Definicja 2.2.14 (Holomorficzna wiązka wektorowa). *Niech X będzie rozmaitością zespoloną wymiaru n (w definicji nie zakładamy zwartości ani kählerowskości, aczkolwiek w pracy interesuje nas wyłącznie ten przypadek). Holomorficzna wiązka wektorowa V rzędu r nad X to zespolona rozmaitość wymiaru $n + r$, taka, że zachodzą następujące własności:*

(1) *Istnieje odwzorowanie $\pi : V \to X$, nazywane rzutowaniem wiązki, takie, że dla dowolnego $x \in X$ zbiór $\pi^{-1}(x)$ (tak zwane włókno nad x) jest zespoloną przestrzenią wektorową wymiaru r,*
(2) *X można pokryć otwartymi zbiorami U_α tak, aby $\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ były biholomorficzne z $U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ (pokrycie to nazywamy lokalną trywializacją),*
(3) *Jeżeli $\theta_\alpha : \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ jest lokalnym biholomorfizmem trywializującym, to dla dowolnego $x \in U_\alpha \subset X$ odwzorowanie $\theta_\alpha|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \to \{ x \} \times \mathbb{C}^r$ jest $\mathbb{C}$-liniowym izomorfizmem (liniowa struktura włókna $\pi^{-1}(x)$ wynika z pierwszego punktu),*
(4) *Dla dowolnych α, β odwzorowanie*

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r$$

jest typu

$$(z, \zeta) \to (z, g_{\alpha,\beta}(z)(\zeta)),$$

dla pewnej macierzy zespolonej $g_{\alpha,\beta}(z)$ zależnej holomorficznie od z, (przez $g_{\alpha,\beta}(z)(\zeta)$ rozumiemy działanie macierzy $g_{\alpha,\beta}(z)$ na wektorze ζ),
(5) *Macierze te spełniają następujące związki (relacje kocykli)*

$$g_{\alpha,\beta}(z) g_{\beta,\gamma}(z) g_{\gamma,\alpha}(z) = I_r,$$

dla każdego $z \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ (I_r jest macierzą identycznościową rzędu r).

Podstawowym przykładem jest dobrze znana wiązka styczna. Oczywiście pojęcie wiązki jest uogólnieniem tego obiektu: włókno odpowiada przestrzeni stycznej w danym punkcie, trywializacja odpowiada atlasowi z mapami a dyfeomorfizmy θ_α odpowiadaja różniczkom na przestrzeniach stycznych.

Innym prostym przykładem jest wiązka trywialna $X \times \mathbb{C}^r$.

Można sprawdzić, że każda wiązka jest jednoznacznie określona (modulo izomorfizm) za pomocą układu zbiorów trywializujących i macierzy przejścia $g_{\alpha,\beta}$ spełniających relację kocykli.

Pojęcie odpowiadające (globalnemu) polu wektorowemu na wiązce stycznej to pojęcie *sekcji:*

Definicja 2.2.15 (Sekcja). *(Holomorficzna) sekcja wiązki wektorowej V nad rozmaitością X to (holomorficzne) odwzorowanie $s : X \to V$, takie, że $\pi \circ s = id_X$.*

Intuicyjnie, określenie sekcji to wybranie wektora w każdym włóknie w sposób holomorficzny. Oczywiście w przypadku wiązki trywialnej pojęcie to sprowadza się do zwykłego odwzorowania holomorficznego. Z faktu iż nie istnieją (niestałe) holomorficzne funkcje na zwartych rozmaitościach wnioskujemy iż istnienie globalnych holomorficznych sekcji istotnie zależy od konkretnej geometrycznej sytuacji.

Na specjalną uwage zasługują wiązki liniowe:

Definicja 2.2.16. *(Holomorficzna) wiązka liniowa to (holomorficzna) wiązka wektorowa wymiaru* 1.

W tym przypadku zamiast macierzy przejścia dostajemy lokalne funkcje holomorficzne. Dzięki relacji kocykli funkcje te nigdzie sie nie zerują.

Tak jak w przypadku ogólnym *dowolny* układ lokalnych funkcji holomorficznych spełniających relację kocykli definiuje wiązkę liniową.

Dzięki tej obserwacji zbiór wszystkich wiązek liniowych nad X (modulo izomorfizm) można wyposażyć w naturalną strukturę grupy za pomocą następujących działań:

Jeżeli L oraz L' są wiązkami liniowymi danymi w lokalnej trywializacji (zawsze możemy zmniejszyć zbiory trywializujące tak, aby dostac wspólną trywializację dla obu wiązek) za pomocą funkcji $g_{\alpha,\beta}$ oraz $g'_{\alpha,\beta}$ to definiujemy

$$L \otimes L' \text{ oraz } L^*$$

jako wiązki liniowe dane w tej lokalnej trywializacji przez funkcje $g_{\alpha,\beta}g'_{\alpha,\beta}$ oraz $g^{-1}_{\alpha,\beta}$.

Klasa wiązek liniowych (modulo izomorfizmy) ze zdefiniowanymi powyżej działaniami tworzy grupę abelową, którą nazywamy grupą Picarda X i oznaczamy przez $Pic(X)$.

Uwaga 2.2.17. *Relacja kocykli oznacza, że* $\{ g_{\alpha,\beta} \}$ *tworzą łańcuch w kohomologii Cecha dla snopa* $\mathcal{O}^*$. *Tak więc, z punktu widzenia teorii kohomologii,* $Pic(X)$ *jest izomorficzna z grupą kohomologii* $\mathcal{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$. *Nie będziemy jednak korzystać z tego związku. Odsyłamy do* [De3] *lub* [GH], *gdzie ta relacja została dokładnie omówiona.*

Powróćmy do dywizorów. Przypominamy, że dywizor D o całkowitych współczynnikach posiada lokalną meromorficzną funkcję definiującą f_α w każdej (odpowiednio małej) kuli U_α, taką, że $f_\alpha(z) \neq 0$ o ile $z \in U_\alpha \setminus \{ D \}$ ($\{ D \}$ to geometryczny nośnik D) oraz f_α znika (bądź posiada biegun) z krotnością równą współczynnikowi w rozwinięciu dywizora. W takim razie funkcje $\frac{f_\alpha}{f_\beta}$ zdefiniowane na $U_\alpha \cap U_\beta$ są holomorficzne, niezerowe oraz spełniają relację kocykli. Definiują więc pewną wiązkę (tak zwaną wiązkę stowarzyszoną), którą oznaczamy przez $[D]$.

Można pokazać, że

$$[D + D'] = [D] \otimes [D']$$
$$[-D] = [D]^*.$$

Tak więc odwzorowanie

$$Div(X) \ni D \to [D] \in Pic(X)$$

jest homomorphizmem grup.

Można też udowodnić (patrz np. [GH]), że w przypadku rozmaitości *rzutowych* ten homomorfizm jest izomorfizmem. Tak więc w tym przypadku teoria dywizorów jest analogiczna z teorią wiązek liniowych. Odnotujmy jednak, że w ogólnym przypadku nie dostaniemy izomorfizmu - dla przykładu nie dostaniemy epimorfizmu dla pewnych zespolonych torusów.

Poniżej omówimy centralny temat w teorii dywizorów - krotność przecięcia.

Zakładamy dla uproszczenia iż X jest powierzchnią zespoloną (innymi słowy $dim X = 2$). Niech D oraz E będą dwoma hiperpłaszczyznami przecinającymi się transwersalnie w każdym punkcie $x \in D \cap E$ oraz dodatkowo obie krzywe D i E są gładkie w otoczeniu każdego takiego punktu x. Zdefiniujmy w tym przypadku krotność przecięcia dywizorów odpowiadających krzywym (które też oznaczamy jako D i E) za pomocą wzoru

$$D.E := \sharp \{ x | \ x \in D \cap E \} .$$

Za pomocą liniowości pojęcie to łatwo się przenosi na ogólne dywizory, o ile je zdefiniujemy dla *dowolnych* dwóch hiperpowierzchni.

Aby to zrobić potrzebujemy dwóch faktów, które podajemy bez dowodu (dowody te można znaleźć np. w [GH]). Na początek jednak przypomnijmy pojęcie homologiczności hiperpowierzchni:

Definicja 2.2.18. *Dwie hiperpowierzchnie C_1 oraz C_2 (niekoniecznie zespolone) są homologiczne jeżeli $C_1 - C_2$ jest brzegiem cyklu o rzeczwyistym wymiarze o jeden większym. Innymi słowy C_1 i C_2 są homologiczne jeżeli istnieje skończony układ (kawałkami gładkich) rozmaitości D_i wymiaru rzeczywistego o jeden większy niż wymiar C_1 i C_2, taki, że (w sensie teorii homologii) $\sum_i \partial D_i = C_1 - C_2$.*

Twierdzenie 2.2.19. *Dla dowolnych dwóch hiperpowierzchni D oraz E można znaleźć hiperpowierzchnie D' i E' homologiczne odpowiednio do D i E, takie, że D' i E' przecinają się transwersalnie i są gładkie w otoczeniu każdego punktu przecięcia.*

Twierdzenie 2.2.20. *Jeżeli D jest homologiczny z D' oraz oba spełniają warunki transwersalności w stosunku do E, to zachodzi równość*

$$D.E = D'.E.$$

Wyniki te pokazują, że w ogólnym przypadku wystarczy znaleźć elementy transwersalne w klasach homologii i zdefiniować przecięcie za ich pomocą.

Obserwacja 2.2.21. *Jeżeli dywizory D, E mają rozłączne nośniki geometryczne, to $D.E = 0$.*

Uwaga 2.2.22. *Definicja intuicyjnie wskazuje, że liczba przecięcia dwóch dywizorów efektywnych powinna być nieujemna. Jest to prawda, o ile dodatkowo dywizory te nie mają wspólnej hiperpowierzchni w rozkładzie na sumy formalne. Na niektórych powierzchniach istnieją jednak krzywe C, takie, że $C.C < 0$. Takie krzywe i odpowiadające im dywizory nazywamy dywizorami wyjątkowymi. Ich geometryczne własności są bardzo ważne w geometrii algebraicznej - odsyłamy do* [GH] *i* [La]*, gdzie można znaleźć więcej szczegółów na ten temat.*

Na rozmaitości o wymiarze n przecięcie definiuje się analogicznie za pomocą n-liniowego odwzorowania

$$Div(X)^n \ni (D_1, \cdots, D_n) \to D_1. \cdots .D_n.$$

Ogólniej, można też zdefiniować przecięcie dla dowolnych podrozmaitości o ile ich wymiary dobierzemy tak, aby generycznie ich geometryczne przecięcie było dyskretne. Ważnym przypadkiem szczególnym jest przecięcie dywizora z krzywą.

Więcej informacji o dywizorach można znaleźć w [GH] oraz [La].

2.2.3. *Dywizory specjalne: szerokie, nef i duże dywizory.* W poprzednich podrozdziałach wprowadziliśmy pojęcie dywizora efektywnego. W poszukiwaniu subtelniejszych pojęć mierzących dodatniość dywizora geometrzy rozpatrywali różne specjalne klasy. Odnotujmy, że tematyka ta jest jedną z centralnych we współczesnej geometrii algebraicznej.

W pracy tej jednak pojęcia te posłużą wyłącznie do wyjaśnienia rozważanych geometrycznych założeń w następnych rozdziałach. Dlatego też, aby nie odbiegać zanadto od głównego tematu, naszkicujemy tylko główne idee. Odsyłamy więc do [La] i [GH], gdzie można znaleźć obszerne omówienie tych pojęć, wraz z wieloma ilustrującymi przykładami. W tym podrozdziale zakładamy, że rozważane rozmaitości są *rzutowe* - w przeciwnym przypadku niektóre z pojęć (np. nef dywizor) musielibyśmy zdefiniować w inny (bardziej zawiły) sposób.

Definicja 2.2.23 (Zupełny system liniowy). *Niech D będzie dywizorem na rozmaitości X. System liniowy skojarzony z D (oznaczany przez $|D|$) to zbiór wszystkich dywizorów efektywnych D' postaci $D' = D + (f)$, gdzie f jest (globalną) funkcją meromorficzną.*

Dalej, dla prostoty, obiekt ten będziemy nazywać systemem liniowym.

Uwaga 2.2.24. *Odnotujmy, że $[D'] = [D]$ dla dowolnych dwóch takich dywizorów D' i D. Jeżeli $D = \sum a_i V_i$, to alternatywnie system liniowy jest określony przez wszystkie funkcje meromorficzne g, takie, że $ord_{V_i}(g) \geq -a_i$ dla każdej hiperpowierzchni V_i.*

Zaznaczmy wyraźnie, że rozmiar systemu liniowego (tzn. ilość jego elementów) zależy od rozmaitości X jak też i od wyboru D - intuicyjnie im bardziej "dodatni" (w sensie współczyników a_i) jest dywizor D, tym więcej elementów może mieć system $|D|$.

Pojęcie to jest ściśle związane z globalnymi (holomorficznymi) sekcjami stowarzyszonej wiązki $[D]$. Istotnie, każdy dywizor efektywny D' jest postaci (g) dla jakiejś *holomorficznej* sekcji g wiązki $[D'] = [D]$ ((g) oznacza tu, nadużywając nieco oznaczenia, dywizor generowany przez zera lokalnych funkcji holomorficznych, które definiują sekcję g).

Odnotujmy, że wiązka liniowa może nie posiadać (niezerowych) sekcji holomorficznych. Odtąd, aby uniknąć komplikacji teorio - mnogościowych, będziemy jednak zakładać, że takie globalne sekcje istnieją dla rozważanej wiązki $[D]$. Oczywiście zbiór tych sekcji ma strukturę (zespolonej) przestrzeni wektorowej. Dzięki klasycznym wynikom geometrii algebraicznej wiadomo iż zawsze jest to przestrzeń skończenie wymiarowa. Możemy więc wybrać bazę postaci $s_1, \cdots, s_k$, gdzie k jest wymiarem przestrzeni. W ten sposób dochodzimy do pojęcia *odwzorowania stowarzyszonego*:

Definicja 2.2.25 (Odwzorowanie stowarzyszone). *Niech D będzie dywizorem na X. Meromorficzne odwzorowanie*

$$\phi_{|D|} : X \ni z \dashrightarrow [s_1(z) : \cdots : s_k(z)] \in \mathbb{P}^{k-1}$$

nazywamy odwzorowaniem stowarzyszonym z D (lub z wiązką liniową $[D]$). $[Z_1 : \cdots : Z_k]$ oznaczają tu współrzędne jednorodne na $\mathbb{P}^{k-1}$. Symbol $\dashrightarrow$ podkreśla fakt iż odwzorowanie jest meromorficzne (w szczególności nie musi być ono wszędzie określone).

Zauważmy, że odwzorowanie to zależy od wyboru bazy. Jednak dwie ustalone bazy różnią się wyłącznie o (izomorficzną) mapę przejścia, tak więc obrazy rozmaitości za pomocą dwóch różnych odwzorowań stowarzyszonych będą tożsame z dokładnością do izomorfizmu.

Uzyskaliśmy w ten sposób kanoniczne odwzorowanie w przestrzeń rzutową. W związku z tym pojawia się pytanie przy jakich dodatkowych warunkach możemy dostać lepsze własności dla ϕ. W szczególności interesujące są następujące własności:

- kiedy $\phi_{|D|}$ jest odwzorowaniem holomorficznym,
- jeżeli spełniony jest pierwszy warunek, to kiedy $\phi_{|D|}$ jest zanurzeniem?

Jest to główna motywacja prowadząca do pojęcia *(bardzo) szerokiego dywizora*:

Definicja 2.2.26 ((**Bardzo**) **szeroki dywizor**). *Dywizor D nazywamy bardzo szerokim jeżeli jego odwzorowanie stowarzyszone $\phi_{|D|}$ jest zanurzeniem holomorficznym. Dywizor D nazywamy szerokim, jeżeli mD jest bardzo szeroki dla pewnego $m \in \mathbb{N}$.*

Uwaga 2.2.27. *Aby wyjaśnić nieco motywację wprowadzenia takich pojęć, zauważmy, że jeżeli s jest sekcją $[D]$, to s^m jest sekcją $[D]^m$. Tak więc liczba globalnych sekcji szerokiej wiązki liniowej nie maleje wraz z braniem wielokrotności. Co więcej, można sie spodziewać, że nowe sekcje powstają wraz z tym procesem oraz te nowe sekcje będą zawierały więcej geometrycznej informacji, co powinno doprowadzić do lepszych własności odwzorowania ϕ.*

Odnotujmy, że szerokie dywizory były centralnym obiektem badań w klasycznej geometrii algebraicznej.

Definicje te są czysto geometryczne. Istnieją jednak ważne związki pomiędzy "szerokością" i dodatniością. Nie będziemy wchodzić w szczegóły teorii (zamiast tego odsyłamy do [De3], [La] lub [GH]). Poniżej podamy tylko przykład takiego związku, który rozjaśni nieco motywację wprowadzenia dalszych pojęć w tym podrozdziale:

Twierdzenie 2.2.28 (**Kryterium Grauerta**). *Niech X będzie powierzchnią zespoloną (tzn. $dimX = 2$). Dywizor D na X jest szeroki wtedy i tylko wtedy gdy $D^2 > 0$ oraz dla dowolnego efektywnego dywizora (alternatywnie: dla dowolnej nierozkładalnej krzywej zespolonej) C zachodzi nierówność $D.C > 0$. Odnotujmy, że w wyższych wymiarach także istnieje podobne kryterium (zwane kryterium Nakai).*

Omówimy teraz pojęcie *nef* dywizora. Jest to fundamentalne pojęcie w teorii klasyfikacyjnej w geometrii algebraicznej (patrz np. [La]).

Definicja 2.2.29 (**Nef dywizor**). *Niech X będzie rozmaitością rzutową. Dywizor D na X nazywamy nef jeżeli dla dowolnej nierozkładalnej krzywej C mamy $D.C \geq 0$.*

Obserwacja 2.2.30. *Nef dywizory tworzą stożek w $Div(X)$.*

Uwaga 2.2.31. *Odnotujmy, że (nieco sprzecznie z intuicją) efektywny dywizor nie musi być nef - jest to spowodowane podobnymi przyczynami do omówionych w Uwadze 2.2.22.*

Uwaga 2.2.32. *W wymiarze dwa definicja ta jest równoważna z następującą: D jest nef, jeżeli dla każdego efektywnego dywizora C zachodzi $D.C \geq 0$. Tak więc, w pewnym sensie nef stożek jest dualny do stożka dywizorów efektywnych.*

Obserwacja 2.2.33. *Każdy szeroki dywizor jest nef. Również granica (w $Div(X)$) szerokich dywizorów jest nef. Zachodzi też własność odwrotna - stożek nef równa się domknięciu stożka dywizorów szerokich.*

Innym podstawowym pojęciem są *duże* dywizory. Aby uniknąć definiowania zbyt wielu pomocniczych geometrycznych pojęć podamy nieco opisową definicję:

Definicja 2.2.34 (**Duży dywizor**). *Niech D będzie dywizorem na X. Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ rozważmy system liniowy generujący $|mD|$. Tak jak w przypadku dywizora szerokiego generuje on (meromorficzne) odwzorowanie $\phi_{|mD|} X \dashrightarrow \mathbb{P}^{N(m)}$. D nazywamy dużym dywizorem, jeżeli obraz X dla pewnego m ma (maksymalny) wymiar, równy $dimX$.*

Obserwacja 2.2.35. *Pojęcie to jest w pewnym sensie modelowane na własnościach zanurzania za pomocą (bardzo) szerokich dywizorów. W odróżnieniu od tego przypadku, stowarzyszone odwzorowanie jest tylko meromorficzne. W szczególności, mogą istnieć punkty nieokreśloności (nazywane miejscem bazowym), gdzie odwzorowanie nie jest określone.*

Poniżej podajemy dwa ważne wyniki dotyczące dużych dywizorów (dowody można znaleźć w [La]):

Twierdzenie 2.2.36. *Jeżeli D jest nef dywizorem, to D jest duży wtedy i tylko wtedy gdy $D^n > 0$.*

Drugim wynikiem jest szczególna wersja ważnego twierdzenia Iitaki, które daje nam więcej informacji o odwzorowaniu z definicji dużego dywizora:

Twierdzenie 2.2.37 (Twierdzenie Iitaki o fibracji). *Dla dużego dywizora D stowarzyszone odwzorowanie $\phi_{|mD|}X \dashrightarrow \mathbb{P}^{N(m)}$ jest biwymierne (czyli bimeromorficzne) na swój obraz dla pewnego $m \in \mathbb{N}$.*

2.2.4. *Wiązka kanoniczna.* Przypomnijmy iż pojęcie wiązki wektorowej było oparte na szczególnym modelowym przypadku wiązki stycznej. Okazuje się, że wiązka styczna ma wiele ciekawych własności. Być może najważniejsza z nich jest jej *naturalność* tzn. możliwość jej zdefiniwania na dowolnej rozmaitości.

Naszym głównym obiektem zainteresowań są wiązki liniowe, wobec czego pojawia się pytanie czy istnieje podobna uniwersalna konstrukcja wiązki liniowej. W ten oto sposób dochodzimy do definicji *wiązki kanonicznej*:

Definicja 2.2.38 (Wiązka kanoniczna). *Niech X będzie zespoloną rozmaitością wymiaru n. Wiązkę liniową*

$$K_X := \Lambda^n T_X^*$$

nazywamy wiązką kanoniczną. Stosujemy tu oznaczenie T_X^* na wiązkę dualną do stycznej, a Λ^n to n-ta potęga zewnętrzna (operację tą dokonujemy na każdym włóknie z osobna).

Własności wiązki kanonicznej są istotne w procesie klasyfikacji rozmaitości. Poniżej istotne dla nas będą następujace przypadki:

- K_X jest szeroka (dokładniej, dywizor stowarzyszony z tą wiązką jest szeroki).
- K_X jest trywialna.
- $-K_X$ jest szeroka.
- K_X jest duża i/lub nef.

2.2.5. *Klasy Cherna.* W tym podrozdziale naszkicujemy jeden z podstawowych zespolonych kohomologicznych niezmienników rozmaitości zespolonych - pierwszą klasę Cherna.

Ustalmy dywizor $D = \sum a_i V_i$. Z pomocą D można zdefiniować odpowiadający mu prąd całkowania zadany przez wzór

$$\eta_D(\phi) := \sum a_i \int_{V_i} \phi$$

(ϕ to forma testująca dwustopnia $(n-1, n-1)$). Tak więc η_D jest $(1,1)$-(rzeczywistym) prądem (dodatnim, jeżeli dywizor D jest efektywny). Niech $\{\eta_D\}$ oznacza klasę kohomologii De Rhama tego prądu. Z ogólnej teorii wynika (patrz np. [De3]) iż ta klasa kohomologii jest reprezentowana (na rozmaitości kählerowskiej) przez gładką $(1,1)$-formę.

Definicja 2.2.39 (Pierwsza klasa Cherna). *Niech X będzie rozmaitością rzutową. Pierwsza klasa Cherna to klasa kohomologii należąca do $H^2_{DR}(X, \mathbb{R})$ reprezentowana przez prąd zadany za pomocą dywizora odpowiadajacego antykanonicznej wiązce $-K_X$. Klasę tą będziemy oznaczać przez $c_1(X)$.*

Mówimy iż pierwsza klasa Cherna jest *dodatnia* (co oznaczamy przez $c_1(X) > 0$) jeżeli znajdziemy reprezentanta $c_1(X)$ będącego formą kählerowską. Jeżeli z kolei można znaleźć kählerowskiego reprezentanta dla klasy $-c_1(X)$ to mówimy iż klasa Cherna jest *ujemna* (oznaczamy to przez $c_1(X) < 0$). Gdy $c_1(X)$ jest zerową klasą kohomologii piszemy po prostu $c_1(X) = 0$.

W przypadkach opisanych powyżej mówimy iż klasa Cherna jest *określona*. Jest to w pewnym sensie sytuacja dość specjalna (przypominamy tu iż współczynniki dywizora niekoniecznie muszą mieć taki sam znak). W wymiarze 2 rozmaitości o określonej klasie Cherna zostały sklasyfikowane (patrz [T] gdzie podano na ten temat więcej szczegółów). Intuicyjnie generyczna rozmaitość będzie jednak posiadać nieokreśloną pierwszą klasę Cherna.

Odnotujmy, iż klasę Cherna można wprowadzić w inny, bardziej analityczny sposób jako ślad operatora krzywizny (patrz np. [T]), jednak dla naszych celów algebraiczna definicja jest wystarczająca.

3. Operator Monge'a-Ampère'a na rozmaitościach kählerowskich

3.1. Definicje i pojęcia.

3.1.1. *Funkcje ω-plurisubharmoniczne i związane z nimi pojęcia (pojemności, oszacowania zbiorów podpoziomicowych, zasada porównawcza etc.)* Z zasady maksimum wynika, że na zwartej rozmaitości zespolonej wszystkie funkcje plurisubharmoniczne musza być stałe. Równocześnie na takich rozmaitościach może istnieć wiele dodatnich $(1,1)$-prądów. Dlatego też wprowadzimy klasę funkcji które są "prawie" plurisubharmoniczne (lokalnie wyglądają jak funkcje plurisubharmoniczne minus pewna funkcja gładka). W literaturze funkcje te nazywane są w różnoraki sposób (np. funkcje quasiplurisubharmoniczne lub dopuszczalne). W pracy będziemy je nazywać ω-plurisubharmoniczne (lub, skrótowo, ω-psh).

Niech X będzie zwartą n-wymiarową rozmaitością kählerowską wraz z formą kählerowską ω wyrażoną w lokalnych współrzędnych jako

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{k,j=1}^{n} g_{k\bar{j}} dz^k \wedge d\bar{z}^j.$$

Dla ustalenia uwagi będziemy dalej zawsze zakładać (o ile wyraźnie nie zaznaczymy co innego), że ω jest znormalizowana tak aby

$$\int_X \omega^n = 1.$$

Definicja 3.1.1 (Funkcje ω-plurisubharmoniczne). *Klasą funkcji ω-plurisubharmonicznych nazywamy zbiór*

$$PSH(X,\omega) := \{\phi \in L^1(X,\omega) : dd^c\phi \geq -\omega,\ \phi \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X)\},$$

gdzie, jak zwykle $d = \partial + \overline{\partial}$, $d^c = \frac{i}{2\pi}(\overline{\partial} - \partial)$ oraz $\mathcal{C}^{\uparrow}(X)$ oznacza przestrzeń funkcji półciągłych z góry.

Z klasą tą jest związany także operator Monge'a-Ampère'a.

Definicja 3.1.2 (Operator Monge'a-Ampère'a dla funkcji ω-psh). *Operator Monge'a-Ampère'a definiujemy przez*

$$(\omega_u)^n := \underbrace{\omega_u \wedge \cdots \wedge \omega_u}_{n-razy},$$

gdzie

$$\omega_u := \omega + dd^c u.$$

W pracy [K3] Kołodziej zdefiniował nową pojemność na rozmaitościach kählerowskich analogiczną do pojemności Bedforda-Taylora z teorii płaskiej.

Definicja 3.1.3 (Pojemność względna). *Liczbę*

$$cap_\omega(K) := \sup\{\int_K (\omega_\psi)^n | \psi \in PSH(X,\omega),\ 0 \leq \psi \leq 1\}$$

nazywamy pojemnością względną (borelowskiego) zbioru K.

Analogicznie do zbieżności względem pojemności w przypadku płaskim, także i na rozmaitości można rozpatrywać zbieżność względem (względnej) pojemności.

Definicja 3.1.4 ([K3])**.** *Mówimy, że ciąg $\phi_j \in PSH(X,\omega)$ zmieża względem pojemności do $\phi \in PSH(X,\omega)$ jeżeli*

$$\forall t > 0 \ \ cap_\omega(|\phi_j - \phi| > t) \to 0,\ j \to \infty.$$

Odsyłamy do prac [K3], [GZ1], gdzie można znaleźć podstawowe informacje dotyczące tego pojęcia. Hiep ([Hi]) wykazał następującą charakteryzację zbieżności względem pojemności w przypadku funkcji ograniczonych:

Twierdzenie 3.1.5. *Niech ϕ_j, ϕ będą jednostajnie ograniczonymi ω-psh funkcjami. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *ϕ_j zmierza do ϕ względem pojemności,*
(2) $\limsup_{j\to\infty} \phi_j \leq \phi$ *oraz* $\int_X (\phi_j - \phi)\,\omega_{\phi_j}^n \to 0$.

Poniżej podajemy twierdzenie pozwalajace oszacowac pojemność zbioru podpoziomicowego dla różnicy dwóch funkcji ω-plurisubharmonicznych za pomocą miary Monge'a-Ampère'a funkcji "mniejszej":

Twierdzenie 3.1.6 ([K3])**.** *Niech $\phi, \psi \in PSH(X,\omega)$ oraz ϕ spełnia nierówności $0 \leq \phi \leq C$. Wtedy dla $s < C+1$ zachodzi nierówność*

$$Cap_\omega(\{\psi + 2s < \phi\}) \leq \big(\frac{C+1}{s}\big)^n \int_{\{\psi+s<\phi\}} (\omega + dd^c\psi)^n.$$

Dowód. Zdefiniujmy zbiór $E(s) := \{\psi + s < \phi\}$. Weźmy dowolną funkcję $\rho \in PSH(X,\omega)$ o wartościach w $[-1,0]$. Niech $V := \{\psi < \frac{s}{C+1}\rho + (1 - \frac{s}{C+1})\phi - s\}$. Korzystając z oszacowań $-s \leq \frac{s}{C+1}\rho - \frac{s}{C+1}\phi \leq 0$ dostajemy ciąg inkluzji

$$E(2s) \subset V \subset E(s).$$

Otrzymujemy więc następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned}(\frac{s}{C+1})^n \int_{E(2s)} (\omega + dd^c\,\rho)^n &\leq \int_V (\frac{s}{C+1}\omega_\rho + (1 - \frac{s}{C+1})\omega_\phi)^n \\ &\leq \int_V {\omega_\psi}^n \leq \int_{E(s)} {\omega_\psi}^n,\end{aligned}$$

(korzystamy tu z powyższych inkluzji i zasady porównawczej). Teza twierdzenia teraz wynika wprost z definicji Cap_ω. □

Poniżej udowodnimy analogiczny wynik przy nieco zmodyfikowanych parametrach. Propozycję tą wykorzystamy w następnych rozdziałach.

Propozycja 3.1.7. *Niech $\phi, \psi \in PSH(X,\omega)$ spełniają nierówności $0 \le \phi \le a,\ 0 \le \psi \le a$. Wtedy dla dowolnych $m,\ n,\ t > 0$ zachodzi nierówność*

$$Cap_\omega(\{\psi + (m+n)t < \phi\}) \le \big(\frac{a+1}{nt}\big)^n \int_{\{\psi+mt<\phi\}} (\omega + dd^c\psi)^n.$$

Dowód. Jeżeli $nt \ge a+1$, to zbiór $\{\psi + (m+n)t < \phi\}$ jest pusty (korzystamy tu istotnie z dodatkowego założenia na ψ) i propozycja trywialnie zachodzi. Gdy z kolei $nt < a+1$ to dla dowolnej funkcji $\rho \in PSH(X,\omega), -1 \le \rho \le 0$ mamy nierówności

$$0 \le \frac{nt\phi}{1+a} - \frac{nt\rho}{a+1} \le \frac{nta}{a+1} + \frac{nt}{a+1} = nt.$$

Z tych nierówności dostajemy ciąg inkluzji

$$\{\psi + (m+n)t < \phi\} \subset \{\psi + mt < (1 - \frac{nt}{a+1})\phi + \frac{nt}{a+1}\rho\} \subset \{\psi + mt < \phi\}.$$

Dalej rozumowanie jest analogiczne to tego z Twierdzenia 3.1.6. □

3.1.2. *Klasy Cegrella.* Tak jak w omawianym już przypadku "płaskim" chcielibyśmy poszerzyć dziedzinę operatora Monge'a-Ampère'a, czyli znaleźć odpowiedniki klas Cegrella. Poniżej przedstawimy podstawowe pojęcia oraz trudności jakie nowa sytuacja stwarza. Odsyłamy do prac [GZ2], [Di1] gdzie problemy te zostały szczegółowo omówione.

Odnotujmy na początku, że dla dowolnej funkcji $u \in PSH(X,\omega)$ miara probabilistyczna $(\omega + dd^c\, max(u,-j))^n$ jest zawsze dobrze zdefiniowana. Wiadomo też (patrz np. [GZ2]), że ciąg miar $\chi_{\{u>-j\}}(\omega + dd^c\, max(u,-j))^n$ jest zawsze rosnący. W związku z tym zdefiniujmy klasę

$$\mathcal{E}(X,\omega) := \{u \in PSH(X,\omega) \mid \lim_{j\to\infty} \int_X \chi_{\{u>-j\}}(\omega + dd^c\, max(u,-j))^n = 1\}.$$

Funkcje, które należą do $\mathcal{E}(X,\omega)$ mogą być nieograniczone, ale warunek całkowy powoduje, że graniczna miara dla ciągu $\chi_{\{u>-j\}}(\omega + dd^c\, max(u,-j))^n$ (która jest poprawnie zdefiniowana, gdyż ciąg jest monotoniczny) zeruje się na zbiorze $\{u = -\infty\}$. Tak więc formalnie możemy zdefiniować

$$(\omega + dd^c\, u)^n := \lim_{j\to\infty} \chi_{\{u>-j\}}(\omega + dd^c\, max(u,-j))^n.$$

Można w szczególności wykazać, że tak zdefiniowane miary Monge'a-Ampère'a dla funkcji z $\mathcal{E}(X,\omega)$ zerują się na wszystkich (borelowskich) zbiorach pluripolarnych. Intuicyjnie warunek całkowy oznacza, że funkcja z $\mathcal{E}(X,\omega)$ ma "małe" osobliwości - nawet gdy jest nieograniczona to w pobliżu punktów zbioru pluripolarnego koncentruje się zbyt mało "energii" by mogły powstać patologie znane nam z Przykładu 2.1.40. Odnotujmy też istotną różnicę w definicji w porównaniu ze znaną nam klasą $\mathcal{E}(\Omega)$ w przypadku płaskim. Tak zdefinowana klasa została wprowadzona przez Guedja i Zeriahiego w [GZ2], którzy wzorowali sie na pomysłach z [BT4] (podobny pomysł wykorzystania ciągu aproksymującego $max\,\{\, u,\ -j\,\}$ został także wykorzystany w [Di1]). W pracy [GZ2] omówiono szczegółowo to nowe pojęcie.

Zdefiniujmy również klasy $\mathcal{E}^1(X,\omega)$, (lub ogólniej $\mathcal{E}^p(X,\omega), p > 0$) jako

$$\mathcal{E}^p(X,\omega) := \{\, \phi \in \mathcal{E}(X,\omega) \;\mid\; \int_X |\phi|^p \omega_\phi^n < \infty \,\}.$$

Funkcje ω-plurisubharmoniczne są półciągłe z góry, a więc organiczone z góry na (zwartej) rozmaitości kählerowskiej. Dlatego też zazwyczaj rozpatruje się tylko ujemne funkcje ω-plurisubharmoniczne w klasach $\mathcal{E}^p(X,\omega)$, co często ułatwia rachunki. Historycznie klasy

$\mathcal{E}^p$ były definiowane (analogicznie do klas Cegrella w przypadku "płaskim") za pomocą ciągu aproksymującego $\phi_j, \phi_j \searrow \phi$, takiego, że $\sup_j \int_X |\phi_j|^p \omega_{\phi_j}^n < \infty$. Jednak wyniki z [GZ2, Di1] pokazały, że wystarczy wziąć ciąg $\phi_j := \max(\phi, -j)$, tak więc obie definicje są równoważne.

Można również zdefiniować "lokalne" klasy naśladując podejście Błockiego z [Bl4, Bl2]. Zdefiniujmy klasę $\mathcal{D}(X, \omega)$ jako

$$\mathcal{D}(X,\omega) := \{\, \phi \in PSH(X,\omega) \mid \forall z \in X\ \exists U_z - \text{otwarty},\ z \in U_z,\ \rho + \phi \in \mathcal{D}(U_z) \,\},$$

gdzie ρ jest lokalnym potencjałem w U_z dla formy ω oraz $\mathcal{D}(U_z)$ jest maksymalną dziedziną operatora Monge'a-Ampère'a w obszarze U_z, (tak jak w [Bl4, Bl2]).

Bardzo istotną różnicą w porównaniu do teorii "płaskiej" jest niezgodność $\mathcal{D}(X, \omega)$ oraz $\mathcal{E}(X, \omega)$, co zostało udowodnione w [GZ2]. Guedj i Zeriahi pokazali, że dla dowolnej ujemnej funkcji ω-plurisubharmonicznej u oraz $0 < \alpha < 1$ mamy $-(-u)^\alpha \in \mathcal{E}(X, \omega)$ (dla $\alpha = 1$ własność ta nie zachodzi: innymi słowy $\mathcal{E}(X, \omega) \neq PSH(X, \omega)$), jednak na ogół $-(-u)^\alpha \in \mathcal{D}(X, \omega)$ tylko dla $0 < \alpha < \frac{1}{n}$.

Zdefiniujmy również $\mathcal{D}^a(X, \omega)$ jako

$$\mathcal{D}^a(X,\omega) := \{\, \phi \in \mathcal{D}(X,\omega) \ \mid\ \omega_\phi^n(A) = 0,\ \forall A \subset X,\ A - \text{pluripolarny} \,\}.$$

W pracy [GZ2] wykazano, że $\mathcal{D}^a(X, \omega) \subset \mathcal{E}(X, \omega)$, jednak $\mathcal{D}(X, \omega) \nsubseteq \mathcal{E}(X, \omega) \nsubseteq \mathcal{D}(X, \omega)$.

Częściowo z tego powodu terminologia dotycząca klas Cegrella nie jest jeszcze utrwalona. Tak więc klasa $\mathcal{D}(X, \omega)$ czasami oznaczana jest jako $\mathcal{E}(X, \omega)$ (np. w [HaKH] lub [Di2]). Klasa $\mathcal{E}(X, \omega)$ z kolei istotnie różni się od jej odpowiednika $\mathcal{E}(\Omega)$ z przypadku "płaskiego" (jedna z różnic polega na tym, że funkcje z klasy $\mathcal{E}(\Omega)$ mogą mieć miarę Monge'a-Ampère'a niezerującą się na skończonej liczbie punktów (będących oczywiście zbiorem pluripolarnym)).

Poniżej podajemy wynik z którego będziemy w dalszej części pracy korzystać. Jest to nierówność dla mieszanych miar Monge'a-Ampère'a.

Twierdzenie 3.1.8. *Niech $u,\ v \in \mathcal{E}(X, \omega)$ będą funkcjami ω-plurisubharmonicznymi, μ będzie dodatnią miarą zerującą się na zbiorach pluripolarnych oraz $f,\ g \in L^1(d\mu)$. Jeżeli*

$$(\omega + dd^c u)^n \geq f d\mu,\ (\omega + dd^c v)^n \geq g d\mu,$$

(nierówność w sensie miar), to

$$(\omega + dd^c u)^k \wedge (\omega + dd^c v)^{n-k} \geq f^{\frac{k}{n}} g^{\frac{n-k}{n}} d\mu,\ \forall k \in \{1, \cdots, n-1\}.$$

Fakt ten wynika z Twierdzenia 2.1.52, gdyż rozpatrywane miary zerują się na zbiorach pluripolarnych oraz z obserwacji, że nierówność we wspomnianym twierdzeniu ma charakter lokalny. Z powyższej nierówności wynika następujący wniosek:

Wniosek 3.1.9. *Jeżeli $\phi,\ \psi \in \mathcal{E}(X, \omega)$ oraz $\omega_\phi^n = \omega_\psi^n$, to dla dowolnego $t \in (0, 1)$ zachodzi równość*

$$\omega_{t\phi+(1-t)\psi}^n = \omega_\phi^n = \omega_\psi^n.$$

Następne twierdzenie które omówimy, to uogólnienie zasady porównawczej. Jest ono bardzo podobne do "zwykłej" zasady porównawczej, jest jednak w pewnym sensie nietypowe, dlatego też naszkicujemy jego dowód.

Twierdzenie 3.1.10 (Uogólniona zasada porównawcza). *Niech T będzie dodatnim, zamkniętym (k, k)- prądem na X postaci $\omega_{\phi_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\phi_k}$, $\phi_j \in \mathcal{E}(X, \omega)$ $\forall j \in \{1, \cdots, k\}$, gdzie $0 \leq k \leq n-1$. Niech dodatkowo $u,\ v \in \mathcal{E}(X, \omega)$. Wtedy zachodzą nierówności*

$$\int_{\{u<v\}} \omega_v^{n-k} \wedge T \leq \int_{\{u<v\}} \omega_u^{n-k} \wedge T.$$

Dowód. W przypadku $k = 0$ jest to zwykła zasada porównawcza w klasie $\mathcal{E}(X, \omega)$, której dowód można znaleźć w [GZ2], (historycznie, pierwszą wersję zasady porównaczej, dla ciągłych funkcji ograniczonych, udowodnił Kołodziej w pracy [K3]). Wystarczy pokazać nierówność dla $n - k = 1$, gdyż pozostałe przypadki łatwo można sprowadzić do tego poprzez iterację. Zakładamy więc, że $n - k = 1$.

W klasie $\mathcal{D}^a(X, \omega)$ wynik ten został udowodniony w [HaKH]. Nasz przypadek nie różni się istotnie od tego.

Możemy właściwie powtórzyć rozumowanie z Twierdzenia 1.5 z [GZ2], o ile wykażemy że dla ograniczonych $u,\ v$

$$\chi_{\{u<v\}}\omega_v \wedge T = \chi_{\{u<v\}}\omega_{\max(u,\ v)} \wedge T,$$

co odpowiada równości (1) z dowodu Guedja i Zeriahiego.

Zdefiniujmy funkcje pomocnicze

$$\phi_s^{(j)} := max(\phi_s, -j).$$

Niech $T^{(j)} := \omega_{\phi_1^{(j)}}, \wedge \cdots \wedge \omega_{\phi_{n-1}^{(j)}}$. W tym przypadku wszystkie rozważane funkcje należą do $\mathcal{D}^a(X, \omega)$, więc twierdzenie z [HaKH] zachodzi. Oznacza to, że dla ograniczonych $u,\ v$ dostaniemy

$$\int_{\{u<v\}} \omega_v \wedge T^{(j)} \leq \int_{\{u<v\}} \omega_u \wedge T^{(j)}.$$

Z własności klasy $\mathcal{E}(X, \omega)$ udowodnionych w [GZ2] wynika iż dla ograniczonych $u,\ v$ przechodząc do granicy $j \to \infty$ otrzymamy

$$\int_{\{u<v\}} \omega_v \wedge T \leq \int_{\{u<v\}} \omega_u \wedge T.$$

Przejście z przypadku $u,\ v$- ograniczonych do przypadku ogólnego można wykonać tak jak w Twierdzeniu 1.5 w [GZ2].

$\square$

3.2. **Teoria równania Monge'a-Ampère'a.**

3.2.1. *Twierdzenie Calabiego-Yau i jego uogólnienia.* Operator Monge'a-Ampère'a jest ważny w geometrii zespolonej gdyż z jego pomocą dostajemy wzór na krzywiznę Riciego.

Definicja 3.2.1 (Krzywizna Ricciego). *Jeżeli* $\omega = \frac{i}{2}\sum_{k,j=1}^n g_{k\bar{j}} dz^k \wedge d\bar{z}^j$ *jest formą kählerowską (ze skojarzoną metryką* $(g_{k\bar{j}})_{k\bar{j}}$*) definiujemy jej krzywiznę Ricciego jako formę* Ric_ω *za pomocą wzoru*

$$Ric_\omega := -i\partial\bar{\partial} log(det(g_{k\bar{j}})).$$

Zwróćmy uwagę iż taka definicja (a priori) zależy od wyboru lokalnych współrzędnych. Jednak wybierając inne współrzędne wyznacznik pod logarytmem zmieni się o kwadrat modułu Jakobianu holomorficznej zmiany zmiennych. Skoro $log(|F|^2)$ jest funkcją pluriharmoniczną dla holomorficznej (niezerującej się) funkcji F, nasza forma nie zmieni swoich wartości po zmianie znienny ch. Otrzymaliśmy więc globalnie zdefiniowaną $(1, 1)$- formę.

Można jednak pokazać więcej: forma Ric_ω w sensie kohomologicznym należy do pierwszej klasy Cherna $c_1(X)$ (w rzeczywistości należy do klasy $2\pi c_1(X)$, jednak zgodnie ze zwyczajem geometrów będziemy stałą 2π pomijać). Dowód tego faktu można znaleźć np. w [GH] lub [T]. Zainteresowanie geometrów krzywizną Ricciego zapoczątkowało dokładniejsze badania tych elementów z $c_1(X)$ które "powstają" jako formy Ricciego pewnej metryki. Dało to początek słynnej hipotezie Calabiego:

Ustalając klasę kohomologii $[\omega] \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ (reprezentowaną przez forme kählerowską) na zwartej rozmaitości kählerowskiej oraz formę $\theta \in c_1(X)$ czy można zawsze znaleźć kählerowskiego reprezentanta $\eta \in [\omega]$ którego krzywizna Ricciego spełnia równanie $Ric_\eta = \theta$?

Prawdziwość tej hipotezy pozwalałaby np. stwierdzić iż na rozmaitości kählerowskiej, takiej, że $c_1(X) = 0$ zawsze można znaleźć kählerowską metrykę płaską w sensie Ricciego (czyli formę η taką, że $Ric_\eta = 0$) w dowolnej klasie kählerowskiej. Ten fakt z kolei pozwala uzyskać wiele informacji o geometrii a nawet topologii takiej rozmaitości (szczegóły można znaleźć w [T]).

Z tak zwanego $\partial\bar{\partial}$ lematu (dowód można znaleźć w [De2] lub [T]) dowolna forma kohomologiczna do ω jest typu $\omega + i\partial\bar{\partial}u$ dla pewnej rzeczywistej funkcji u. Dostajemy więc dwa równania

$$Ric_{\omega+i\partial\bar{\partial}u} = -i\partial\bar{\partial}log((\omega + i\partial\bar{\partial}u)^n) = \theta + i\partial\bar{\partial}f,$$
$$Ric_\omega = -i\partial\bar{\partial}log((\omega)^n) = \theta$$

(stosujemy tu sugestywne oznaczenie wyznacznika $(g_{k\bar{j}})$ przez ω^n- przypominamy jednak, że ω^n jest formą, a nie funkcją). Odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymamy

$$-i\partial\bar{\partial}log(\frac{(\omega + i\partial\bar{\partial}u)^n}{\omega^n}) = i\partial\bar{\partial}f. \tag{3.1}$$

Skoro jednak na zwartej rozmaitości wszystkie funkcje pluriharmoniczne muszą być stałe z (3.1) otrzymujemy

$$log(\frac{(\omega + i\partial\bar{\partial}u)^n}{\omega^n}) = -f + c,$$

dla pewnej stałej c. Rozpisując to otrzymujemy równanie Monge'a-Ampère'a

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}u)^n = e^{-f+c}\omega^n.$$

Tak więc hipoteza Calabiego sprowadza się do rozwiązania równania typu Monge'a-Ampère'a. Zostało to zrobione przez Yau w jego fundamentalnej pracy [Y]:

Twierdzenie 3.2.2 (Twierdzenie Calabiego-Yau). *Równanie Monge'a-Ampère'a wynikające z (3.1) posiada gładkie rozwiązanie zawsze gdy funkcja f jest gładka.*

Dowód twierdzenia Calabiego-Yau jest zbyt długi by go umieścić w pracy w całości. Naszkicujemy tylko podstawowe elementy.

Dowód opiera się na tzw. *metodzie ciągłości.* Na początku rozwiązujemy prostsze równanie (np. dla $f \equiv 1$ oczywiście $u = 0$ jest rozwiązaniem), i próbujemy modyfikować funkcję f za pomocą ciągłej deformacji aż do naszego ustalonego problemu Dirichleta (prostą deformacją jest $[0, 1] \ni t \to f(t) = tf + (1 - t)$). Chcemy pokazać, że dla dowolnego czasu $t \in [0, 1]$ powstałe równanie ma rozwiązanie (w szczególności dla $t = 1$ rozwiążemy nasz problem początkowy). Wystarczy pokazać iż zbiór tych $t \in [0, 1]$ dla których problem $(\omega + i\partial\bar{\partial}u_t)^n = f(t)\omega^n$ posiada (gładkie) rozwiązanie jest równocześnie otwarty i domknięty. W dowodzie otwartości korzysta się z wersji twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym w przestrzeni Banacha $\mathcal{C}^\infty(X)$ (szczegóły można znaleźć w [T]) by pokazać, że rozwiązanie dla t_0 implikuje możliwość rozwiązania problemu dla t odpowiednio bliskich t_0.

Dużo trudniejsze jest wykazanie domkniętości. Wystarczy pokazać, że mając ciąg rozwiązań dla czasów t_i, takich iż $\lim_{i\to\infty} t_i = t_0$ możemy również rozwiązać problem dla t_0. Można w tym celu skorzystać z twierdzenia Arcela-Ascoli dla ciągu rozwiązań u_{t_i} dla czasów t_i (rozpatrując ten ciąg w przestrzeni Banacha $\mathcal{C}^{2,\alpha}(X)$) musimy jednak uzyskać

C^0, C^1, C^2 oraz $C^{2,\alpha}$ oszacowania a priori. Jest to właśnie główna (techniczna) część pracy [Y].

Historycznie C^3 oszacowania (zamiast $C^{2,\alpha}$) były wykorzystywane a dowód tychże był znany od dawna (odsyłamy do [Si1] gdzie można poznać historię problemu). Oszacowanie C^2 okazało się być niezależnym od oszacowania na C^1 normę (co jest niezwykle rzadkim przypadkiem w teorii nieliniowych równań różniczkowych), tak więc dowód sprowadza się do ograniczenia norm C^0 oraz C^2. O ile C^2 oszacowania uzyskano za pomocą metod znanych już z teorii rzeczywistego operatora Monge'a-Ampère'a w $\mathbb{R}^n$, to ograniczenie normy jednostajnej (niespodziewanie) okazało się najtrudniejsze. Przypomnijmy tu, że w przypadku "płaskim" kontrolę normy jednostajnej można uzyskać za pomocą zasady porównawczej. W swoim dowodzie Yau [Y] wykorzystał technikę iteracyjną Mosera połączoną z "odwrotnymi" nierównościami Höldera i nierównościami Sobolewa.

Połączenie tych metod nakłada jednak restrykcyjne warunki na f (np. oszacowanie zależy od $inf_X e^{-f}$) i po pewnym czasie nowe geometryczne problemy (związane np. z zachowaniem rozwiązań gdy pozwolimy formie kählerowskiej ewoluować) nie dały się rozwiazać tą metodą.

Z drugiej strony Kołodziej, używając metod torii pluripotencjału ([K2]) wykazał C^0 oszacowanie dla słabych rozwiązań równania

$$(\omega + dd^c\,\phi)^n = F\omega^n,\ \text{gdzie } F \geq 0,\ F \in L^p(\omega^n),\ p > 1,\ \int_X F\omega^n = \int_X \omega^n. \tag{3.2}$$

Głównym udoskonaleniem w wyniku Kołodzieja w porównaniu do metod Yau jest wykazanie, że oszacowanie nie zależy ani od $inf_X F$ ani od gładkości tej funkcji.

Poniżej naszkicujemy główne pomysły w dowodzie Kołodzieja. Oryginalny dowód opiera się na kilku faktach pozwalających zredukować zaganienie do problemu lokalnego z teorii "płaskiej".

Odnotujmy na początku, że jeżeli u jest ujemną funkcją ω-plurisubharmonczną, to całka $\int_X u\omega^n$ jest zawsze skończona. Co więcej można ją oszacować z dołu przez $-c_1$ dla pewnej stałej c_1 zależnej wyłącznie (X, ω) (będziemy numerować w tym szkicu dowodowym stałe niezależne c_i aby je odróżniać). Tak więc w dowolnej mapie U także otrzymamy oszacowanie $\int_U u\omega^n > -c_1$. Wybierając dowolne pokrycie otwarte (czyli skończony zbiór map $V_i,\ i = 1, \cdots, N$ takich, że $\cup_{i=1}^N V_i = X$) otrzymamy

$$sup_{V_i} u > -c_2, \tag{3.3}$$

gdzie stała c_2 zależy od X oraz od pokrycia lecz nie zależy od u.

Pokażemy teraz, że dla dowolnego $z \in X$ znajdziemy w otoczeniu z potencjał η dla metryki kählerowskiej, taki, że w punkcie z posiada on ściśle minimum.

W lokalnych współrzędnych w kuli B'' o środku w z każdy potencjał ρ formy ω jest (lokalną) funkcją ściśle plurisubharmoniczna. Ze wzoru Taylora otrzymujemy rozwinięcie

$$\begin{aligned}\rho(z+h) &= \rho(z) + 2\Re(\sum_{j=1}^n a_j h_j + \sum_{j,k=1}^n b_{jk} h_j h_k) + \sum_{j,k=1}^n c_{j\bar{k}} h_j \bar{h}_k + o(|h|^2)\\ &= \Re P(h) + H(h) + o(|h|^2),\end{aligned}$$

gdzie P jest holomorficznym wielomianem względem h, a funkcja H jest zespolonym hessjanem w punkcie z.

Powtarzając rozumowanie z [K2] (Lemat 2.3.1) nowa funkcja $\eta := \rho - \Re P(\cdot - z)$ jest także lokalnym potencjałem formy ω, osiągającym ściśle lokalne minimum w punkcie z (wykorzystujemy tu istotnie fakt iż w z hessjan H jest ściśle dodatnio określony). Oznacza to, że dla kul B oraz B' dla których zachodzą inkluzje $B \Subset B' \Subset B''$ oraz B i B'

są odpowiednio małe uzyskamy nierówność $\inf_{\partial B'}\eta > \sup_B \eta + c_3$ dla pewnej dodatniej stałej $c_3 > 0$ zależnej od dodatniości ω oraz modułu ciągłości funkcji η.

Korzystając ze zwartości można wybrać skończoną ilość takich trójek kul $B_z \Subset B'_z \Subset B''_z$, tak żeby B_z tworzyły pokrycie otwarte.

Ustalając punkt $c \in X$ gdzie funkcja u osiąga minimum (przypominamy tu, że dowodzimy oszacowanie a priori - zakładamy więc, że u jest ciągła, a więc minimum jest gdzieś osiągane) wybierzmy jedną z kul B_z, takich, że $c \in B_z$ (dalej, dla ułatwienia notacji, będziemy pomijać indeks z). Ustalmy też dowolną kulę B^* taką, że $B' \Subset B^* \Subset B''$. W takiej sytuacji otrzymamy nierówność $sup_{\bar{B}}u = u(x) > -c_2$ dla pewnego $x \in \bar{B} \Subset B'$. Z definicji wynika też, że funkcja $v := u + \eta$ ma następujące własności:

$$v \text{ jest plurisubharmoniczna w } B'', \tag{3.4}$$

$$v(x) > -c_4, \tag{3.5}$$

$$v(c) \leq inf_{\partial B'} - c_5, \tag{3.6}$$

dla pewnych stałych $c_4,\ c_5$ zależnych tylko od X. Tak więc dowód sprowadziliśmy do następującego problemu lokalnego (poniżej wprowadzamy notację identyczną do używanej wcześniej aby bardziej sugestywnie pokazać które obiekty są odpowiednikami swoich pierwowzorów):

Niech B'' będzie obszarem ściśle pseudowypukłym w $\mathbb{C}^n$ oraz niech ujemna funkcja plurisubharmoniczna v spełnia równanie $(dd^c v)^n = f d\lambda$ dla pewnej funkcji $f \neq 0,\ f \in L^p(d\lambda),\ p > 1$ (przypominamy iż $d\lambda$ to miara Lebesgue'a). Załóżmy dodatkowo, że w pewnym punkcie x zachodzi nierówność $v(x) > -c_4$ oraz zbiory $U(s) := \{\, z |\ v(z) < -s \,\} \cap B'$ są niepuste i relatywnie zwarte w obszarze $B' \Subset B^* \Subset B''$ dla dowolnej stałej s z odcinka o długości większej niż c_5. Wtedy

$$-inf_{B'} v \leq C(c_4,\ c_5,\ B',\ B^*,\ B'',\ p,\ ||f||_p),$$

dla pewnej stałej zależnej tylko od wymienionych obiektów.

Nierówność ta daje nam oszacowanie jednostajne dla v, a więc również dla funkcji u na X. Dowód (dość techniczny) tego faktu można znaleźć w [K2] (Lemat 2.3.1). Wspomnimy tylko, że dowód w bardzo istotny sposób opiera się na następującym lemacie:

Lemat 3.2.3 ([K2])**.** *Jeżeli $f \geq 0,\ f \in L^p(d\lambda, B''),\ p > 1$, to istnieje rosnąca funkcja $Q : (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ spełniająca warunki*

(1) $\int_1^\infty (yQ^{1/n}(y))^{-1} dy < +\infty$,
(2) *dla dowolnego zbioru zwartego K:* $\int_K f d\lambda \leq Acap(K, B'')][Q(cap(K, B'')^{-1/n}]^{-1}$, *gdzie A jest stałą zależną od B'', n i Q.*

Intuicyjnie oszacowanie to oznacza, że miara Monge'a-Ampère'a funkcji v maleje (dla małych kompaktów K) nieco szybciej od pojemności. Szybkość tego "zmniejszania się" jest mierzona za pomocą funkcji Q. W pracy [K2] w rzeczywistości wykazano, że można wybrać $Q(t) = c_m t^m$ dla dowolnego dodatniego wykładnika m (wraz ze wzrostem m stała c_m się zwiększa). W tym miejscu zdefiniujmy pomocniczą funkcję κ którą wykorzystamy w poźniejszych rozdziałach:

$$\kappa(s) := A^{1/n}[\int_{s^{-1/n}}^\infty y^{-1} Q^{-1/n}(y) dy + Q^{-1/n}(s^{-1/n})]. \tag{3.7}$$

Dla wyboru Q jak wyżej łatwo sprawdzić iż $\kappa(s) = c_{m,n,A} t^{\frac{m}{n^2}}$.

Po pracy [K2] powstało kilka zmodyfikowanych dowodów L^∞ oszacowania (np. [K3], [K4] oraz [EGZ]). W tych nowszych dowodach zamiast lokalizowania problemu analiza jest prowadzona globalnie na rozmaitości X. Z tego powodu w tychże dowodach zamiast pojemności $cap(K, B'')$ wykorzystuje się pojemność względną cap_ω. Dowodzi się, że odpowiednik Lematu 3.2.3 zachodzi także w tej sytuacji. Zdecydowaliśmy się przedstawić szkic oryginalnego dowodu, gdyż niektóre z wprowadzonych pojęć bedą wykorzystywane w następnych rozdziałach.

Następnym krokiem jest wykazanie lepszej regularności dla słabych rozwiązań. W pracy [K2] udowodniono ciągłość rozwiązań równania (3.2). Wynik ten wykażemy w następnym podrozdziale, gdzie zostanie on omówiony w ogólniejszej sytuacji.

3.2.2. *Przypadek dużej formy.* W analizie wielu problemów geometrycznych, często klasa kählerowska nie jest ustalona, np. ewoluuje wraz z potokiem geometrycznym. Fundamentalne znaczenie mają tu sytuacje graniczne, czyli co się dzieje gdy ciąg form kählerowskich zmierza do formy nie będącej kählerowską. Typowym przykładem jest zachowanie w nieskończonosci potoku Kählera-Ricciego w przypadku gdy dywizor kanoniczny jest duży i nef (patrz ostatni rozdział). Jedna z możliwych sytuacji granicznych sprowadza się do tzw. *dużych* form:

Definicja 3.2.4 (Duża forma). *Zamkniętą dodatnio półokreśloną $(1,1)$-formę ω na zwartej rozmaitości X nazywamy big formą jeżeli*
$$\int_X \omega^n > 0.$$

Różnica pomiędzy dużymi formami a formami kählerowskimi wynika z założenia o dodatniej półokreśloności zamiast ścisłej dodatniej określoności. Typowy przykład dużych form można uzyskać następująco:

Przykład 3.2.5. *Niech X i Y będą zespolonymi rozmaitościami oraz $\pi : X \to Y$ będzie odwzorowaniem holomorficznym, które jest generycznie skończone (przeciwobraz generycznego punktu $z \in Y$ jest zbiorem skończonym). Jeżeli ω jest formą kählerowską na Y to $\pi^*\omega$ jest dodatnio półokreśloną formą na X dla której oczywiście $\int_X(\pi^*\omega)^n > 0$, jednak nie musi być ona formą kählerowską. Lokalnie taki przykład można zilustrować za pomocą odwzorowania $\pi : \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \to (z_1, z_2^2) \in \mathbb{C}^2$. Wtedy $\pi^*\, dd^c\, ||z||^2$ nie jest ściśle dodatnio określona w punktach na prostej $\{\, z_2 = 0\,\}$.*

Z punktu widzenia geometrii ważne jest równanie Monge'a-Ampère'a także w przypadku dużych form:

$$(\omega + dd^c\,\phi)^n = F\omega^n,\ \phi \in PSH(X,\omega),\ F \geq 0,\ F \in L^p(\omega^n),\ p > 1. \tag{3.8}$$

W [EGZ] oraz [Z] (patrz także [BGZ]) wykazano, że analogicznie do przypadku kählerowskiego dostajemy L^∞ oszacowanie:

Twierdzenie 3.2.6. *Niech ω będzie dużą formą na zwartej rozmaitości kählerowskiej oraz niech $\phi \in PSH(X,\omega)$ będzie rozwiązaniem problemu*
$$(\omega + dd^c\,\phi)^n = F\omega^n,\ sup_X\phi = 0,\ F \geq 0,\ F \in L^p(\omega^n),\ p > 1.$$
Istnieje wtedy stała C zależna tylko od X, ω, p, $||F||_p$, taka, że
$$||\phi||_\infty \leq C.$$

W przypadku kählerowskim, jak już wspomnieliśmy, rozwiązanie jest ciągłe ([K2]). Można się więc spodziewać ciągłości także w przypadku dużych form. Jednak problem ten okazał się wysoce nietrywialny i pozostaje otwartym do dziś za wyjątkiem pewnego szczególnego przypadku który to przypadek omówimy poniżej.

Twierdzenie 3.2.7. *Niech ω będzie dużą formą. Wtedy rozwiązanie problemu Dirichleta (3.8) jest ciągłe, jeżeli ω jest postaci $\omega = F^*\omega_Z$, gdzie ω_Z jest formą kählerowską na (pewnej) rozmaitości kählerowskiej Z, a F jest holomorficznym odwzorowaniem z X do Z, które dodatkowo jest lokalnie biwymierne na swój obraz.*

Uwaga 3.2.8. *W zastosowaniach geometrycznych najczęściej rozmaitością Z jest przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}^N$ dla pewnego N. Z tego powodu dowód przeprowadzimy przy założeniu iż $Z = \mathbb{P}^N$, choć, jak się łatwo można przekonać, różnica pomiedzy tym przypadkiem szczególnym a sytuacją ogólną nie jest istotna.*

Wynik ten został uzyskany przez Zhanga w pracy [Z]. Jednak dowód Zhanga jest zbyt skrótowy i nieformalny. Precyzyjny dowód został podany w pracy [DZ]. Poniżej opieramy się na tej ostaniej pracy. Odnotujmy jednak, że większość argumentów wziętych jest z [K2] i w wielu punktach powtarzamy rozumowanie Kołodzieja.

Na początku ustalmy założenia geometryczne. Standardowo niech X będzie zwartą rozmaitością kählerowską na której będziemy pracować, oraz $F : X \to \mathbb{P}^N$, jest odwzorowaniem o tej własności, że obraz $F(X)$ ma ten sam wymiar co X oraz dodatkowo F jest lokalnie biwymierne, tzn. dla dostatecznie małego otoczenia U dowolnego punktu z $F(X)$ każda składowa $F^{-1}(U)$ jest biwymierna z U. Przykład takiego odwzorowania powstaje następująco: jeżeli na X można skonstruować dużą wiązkę L, to sekcje L^m generują (dla dużego $m \in \mathbb{N}$) biwymierny morfizm do $\mathbb{P}^N$ o żądanych własnościach. Odnotujmy wyraźnie, że lokalna i globalna biwymierność to różne pojęcia (co wskaże też przykład poniżej) więc w przypadku globalnej biwymierności trzeba będzie dołożyć pewne założenia by przeprowadzić analogiczny dowód.

Rozważmy $Y := F(X)$. Z twierdzenia o odwzorowaniu właściwym Y musi być (zazwyczaj osobliwym) podzbiorem analitycznym $\mathbb{P}^N$. Oczywiście Y jest nierozkładalnym i lokalnie nierozkładalnym zbiorem analitycznym (ostatni wniosek to przeformułowanie warunku na lokalną biwymierność). Przypomnijmy w tym miejscu, iż półciągła z góry funkcja u na zbiorze analitycznym D jest *słabo* plurisubharmoniczna, jeżeli dla dowolnego dysku holomorficznego $f : \Delta \to D$ funkcja $u \circ f$ jest subharmoniczna (patrz [FN]). W pracy tej udowodniono (w dużo ogólniejszej sytuacji tzw. przestrzeni Steina), że każda taka funkcja u lokalnie rozszerza się (na przestrzeni w której D jest zanurzony) do klasycznej funkcji plurisubharmonicznej tzn. w naszej sytuacji dla dowolnego $x \in Y$ istnieje mała euklidesowa kula B w $\mathbb{P}^N$, o środku w x oraz funkcja $v \in PSH(B)$, taka, że $v|_{B\cap Y} = u$.

Przypuśćmy niewprost, że ϕ jest dodatnią nieciągłą funkcją ω-plurisubharmoniczną rozwiązujacą rozważane równanie Monge'a-Ampère'a oraz niech $d := \sup(\phi - \phi_*) > 0$, gdzie ϕ_* oznacza dolną regularyzację ϕ. Supremum to jest osiągnięte w jakimś punkcie, i jeżeli E jest (domkniętym) zbiorem $\{\phi - \phi_* = d\}$, to istnieje punkt x_0 taki, że $\phi(x_0) = \min_E \phi$. Odnotujmy iż dodatniość ϕ jest założeniem technicznym, które zawsze można uzyskać dodając odpowiednią stałą, gdyż jak już wiemy ϕ jest ograniczona.

Z założeń wynika, że istnieją zbiory analityczne $Z \subset X$ oraz $W \subset Y = F(X)$, takie, że $F|_{X\setminus Z} \to Y \setminus W$ jest biholomorfizmem oraz $S := \{\omega^n = 0\} \subset Z$. W przypadku ogólnej dużej formy S nie musi być zawarty w zbiorze analitycznym - może się nawet zdarzyć iż S jest otwarty w X.

Możliwe są dwie sytuacje.

(1) $x_0 \in X \setminus S$. W tym przypadku ω jest ściśle dodatnia w małej kuli o środku x_0 i powtarzając argument z Rozdziału 2.4 z [K2] dostajemy sprzeczność.

(2) $x_0 \in S$. W tym przypadku znajdziemy zbiór otwarty V (nieeuklidesowy, czyli niekoniecznie zawarty w lokalnej mapie) oraz potencjał θ dla formy ω na V, taki, że $\inf_{\partial V} \theta > \theta(x_0) + b$, dla pewnej stałej $b > 0$.

Rozważmy $F(x_0) = z$ oraz otoczenie U punktu z (w $\mathbb{P}^N$), o własności jak w definicji lokalnej biwymierności - przeciwobrazy będą biwymierne z $U \cap Y$. Wybierzmy ten w którym leży x_0. Dalej zawężamy analizę do $F|_{F^{-1}(U)\ni x_0} \to U$. Zdefiniujmy

$$F_*\phi(z) := \begin{cases} \phi(w), & dla\ z \in Y \setminus W, w \in X \setminus Z,\ F(w) = z \\ \limsup_{X\setminus Z \ni \zeta \to z} F_*\phi(\zeta) & dla\ z \in W \end{cases}$$

oraz lokalny potencjał η dla formy kählerowskiej na U.

Fakt: $\eta + F_*\phi$ jest słabo plurisubharmoniczna na Y.

Dowód tego faktu wygląda następująco: słaba plurisubharmoniczność jest własnością lokalną, wystarczy sprawdzić ją więc w otoczeniu dowolnego punktu z Y. Dla punktów w których Y jest gładki jest to natychmiastowe. Jednak w punktach osobliwych mogą pojawić się problemy, jak pokazuje przykład *punktów podwójnych*: rozważmy (klasyczny) lokalny przykład:

Niech

$$F : \mathbb{C} \ni t \to (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \in \mathbb{C}^2.$$

Obraz $F(\mathbb{C})$ należy do zbioru analitycznego $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | z_1^2 + z_1^3 = z_2^2\}$. Dodatkowo F jest bijekcją na obraz, z wyjątkiem punktów 1 oraz -1, które przechodzą na $(0, 0)$. Ale w tym przykładzie F_*v dla subharmonicznej funkcji v na $\mathbb{C}$ nie może być słabo plurisubharmoniczna na obrazie jeżeli $v(1) \neq v(-1)$. Odnotujmy jednak, że tak skonstruowane odwzorowanie F nie jest lokalnie biwymierne.

Klasyczne twierdzenie (patrz [De1], Twierdzenie 1.7) mówi, że na lokalnie nierozkładalnym zbiorze analitycznym Y każda lokalnie ograniczona funkcja plurisubharmoniczna w określona na $\operatorname{Reg} Y$- części regularnej Y rozszerza się za pomocą techniki "limes superior" $v(z) := \limsup_{\zeta \to z,\ \zeta \in \operatorname{Reg} Y} v(\zeta)$ do funkcji słabo plurisubharmonicznej. Dodatkowo, jak wynika z dowodu przedstawionego w [De1] dla dowolnego $s \in Y$ oraz biwymiernej modyfikacji $G : Y' \to Y$ tak zwana *cofnięta* funkcja G^*w jest stała na włóknie $G^{-1}(s)$.

Jeżeli $\omega_{\mathbb{P}^N}$ jest metryką kählerowską określającą ω (tzn. $\omega = F^*\omega_{\mathbb{P}^N}$), ustalmy dla niej lokalny potencjał η w otoczeniu B punktu z (otoczenie w sensie $\mathbb{P}^n$, bez straty ogólności możemy przyjąć, że otoczenie to zawiera się w U). Modyfikując η tak jak w dowodzie jednostajnego oszacowania w poprzednim podrozdziale zakładamy, że η ma ścisłe minimum w z. Dostaniemy więc (zmniejszając nieco B jeżeli jest to konieczne) $\inf_{\partial B} \eta > \eta(z) + b$ dla pewnej dodatniej stałej b.

Dzięki twierdzeniu Fornaessa-Narasimhana ([FN], Twierdzenie 5.3.1) istnieje mała kula euklidesowa B' w $\mathbb{P}^n$ o środku w z oraz funkcja $\psi \in PSH(B')$, tak, że $\psi|_{Y \cap B'} = \eta + F_*\phi$. W otoczeniu jeszcze mniejszej kuli (zawartej w B', a także w U- bez straty ogólności możemy założyć, zmniejszając jeszcze bardziej B, jeżeli to konieczne iż ta nowa mała kula pokrywa się z B) ψ można aprokysymować ciągiem malejących gładkich plurisubharmonicznych funkcji ψ_j. Za pomocą F przenieśmy całą konstrukcję na X: niech $V := F^{-1}(B \cap Y)$ oraz $u_j(w) := \psi_j(F(w))$ (u_j są określone tylko w okolicy V, niekoniecznie na całym X). Dostaliśmy ciąg malejących ciągłych funkcji plurisubharmonicznych na V zbieżny do $u := \eta \circ F + F^*(F_*\phi) = \eta \circ F + \phi$ (równość wynika z faktu, że ϕ musi być stała na włóknach). Zaznaczmy wyraźnie, że V nie musi być obszarem euklidesowym (nie musi być zawarty w mapie), jednak $\eta \circ F$ jest potencjałem dla ω na całym tym obszarze. Oczywiście jest to istotna różnica pomiędzy tym szczególnym przypadkiem a sytuacją ogólną.

Poniżej wykorzystamy lemat, który pokrywa się z lematem z Rozdziału 2.4 z [K2].

Lemat 3.2.9. *Istnieją stałe $a_0 > 0,\ t > 1$, takie, że zbiory*

$$W(j,c) := \{tu + d - a_0 + c < u_j\}$$

są niepuste i relatywnie zwarte w V dla dowolnej stałej c zawartej w pewnym przedziale nie zależącym od $j > j_0$.

Dowód. Odnotujmy, że $E(0) := \{u - u_* = d\} \cap \overline{V} = E \cap \overline{V}$, (gdyż potencjał jest ciągły). Również zbiory $E(a) := \{u - u_* \geq d - a\} \cap \overline{V}$ są domknięte i maleją do $E(0)$. Zdefiniujmy $c(a) := \phi(x_0) - \min_{E_a} \phi$. Dostajemy w takim razie, że $\limsup_{a\to 0^+} c(a) \leq 0$, gdyż w przeciwnym razie dostalibyśmy sprzeczność z definicją d. Tak więc

$$c(a) < \frac{1}{3}b$$

dla $0 < a < a_0 < min(\frac{1}{3}b, d)$. Niech $A := u(x_0)$. Odnotujmy, że $A > d$, gdyż z konstrukcji potencjał jest większy niż 0 w x_0 oraz ϕ, jako funkcja dodatnia, musi być większa niż d w x_0. Wybierzmy $t > 1$ tak bliskie 1, że spełnione są nierówności

$$(t-1)(A-d) < a_0 < (t-1)(A - d + \frac{2}{3}b).$$

Dla dowolnego $y \in \partial V \cap E(a_0)$ dostajemy

$$u_*(y) \geq \eta(F(x_0)) + b + F^* F_* \phi(x_0) \geq A - d + \frac{2}{3}b.$$

Stąd $u(y) \leq u_*(y) + d < tu_*(y) + d - a_0$. Nierówność ta zachowuje się w pewnym otoczeniu $\partial V \cap E(a_0)$. Wybierając mniejsze otoczenie (relatywnie zwarte w poprzednim) z Lematu Hartogsa dostaniemy

$$u_j < tu(y) + d - a_0, \quad \forall j > j_1.$$

Na pozostałej części ∂V ta sama nierówność zachodzi o ile j_1 będzie wystarczająco duże. Dowód tego fakty jest prostszy, gdyż $u - u_*$ można tam oszacować przez $d - a_0$. Wynika stąd iż $W(j,c)$ jest relatywnie zwarty w V.

Z lewej nierówności definiującej t dostajemy $(t-1)u_*(x_0) < a_0$, czyli

$$tu_*(x_0) < u(x_0) - d - a_1 + a_0 < u_j(x_0) - d - a_1 + a_0$$

dla pewnej stałej $a_1 > 0$. Wynika stąd niepustość zbiorów $W(j,c),\ c \in (0, a_1)$. □

Stosując Lemat 2.3.1 z [K2] (pomimo iż V nie musi być obszarem euklidesowym, jednak powtarzając rozumowanie z [K2] można sie przekonać, że w tej sytuacji lemat pozostaje prawdziwy) dostaniemy oszacowanie na $cap(W(j,a_1), V)$ z dołu przez niezależną dodatnią stałą. Z drugiej strony $W(j,a_1) \subset \{u + (d - a_0 + a_1) < u_j\}$ co prowadzi do sprzeczności z twierdzeniem, że malejąca zbieżność pociąga za sobą zbieżność względem pojemności. Dowodzi to iż $d = 0$, więc ϕ jest ciągła.

Uwaga 3.2.10. *Rozumowanie to nie przechodzi w przypadku odwzorowania (globalnie) biwymiernego. W tej sytuacji trzeba dodatkowo coś założyć by dostać plurisubharmoniczność "po przeniesieniu na Y". Wystarczy założyć, że (wszystkie) włókna w przeciwobrazie są spójne. Wtedy funkcja musi być stała na każdym nietrywialnym włóknie co pozwala ją przenieść. Okazuje się, że założenie to często jest spełnione w konkretnych geometrycznych zastosowaniach.*

3.2.3. *Równanie w klasach Cegrella - istnienie.* Wyniki o istnieniu rozwiązań w klasach Cegrella dla problemu Dirichleta zostały uzyskane przez Guedja i Zeriahiego w pracy [GZ2]. Dowód ich wzoruje się na argumencie Cegrella z przypadku płaskiego z prac [Ce2], [Ce3]. Twierdzenie Guedja i Zeriahiego mówi:

Twierdzenie 3.2.11. *Niech μ będzie miarą probabilistyczną zerującą się na zbiorach pluripolarnych. Istnieje wtedy $\phi \in \mathcal{E}(X,\omega)$ taka, że*

$$(\omega + dd^c\phi)^n = \mu.$$

Poniżej naszkicujemy główne punkty dowodu tego ważnego twierdzenia (szczegółowy dowód można znaleźć w pracy [GZ2]).

Dowód podzielimy na dwie części.

W pierwszej pokażemy iż miara probabilistyczna μ posiada potencjał w klasie $\mathcal{E}^1(X,\omega)$ jeżeli $\mathcal{E}^1(X,\omega) \subset L^1(\mu)$ (prawdziwa jest też implikacja odwrotna). Aby to uzyskać aproksymujemy miarę μ (w słabej topologii) specjalnym ciągiem gładkich ściśle dodatnich miar μ_j. W pracy [GZ2] zostało to zrobione za pomocą lokalnych splotów μ z gładkim jądrem oraz dodaniem małej wielokrotności formy objętości by zapewnić sobie ścisłą dodatniość. Dla każdej miary μ_j znajdujemy (dzięki twierdzeniu Calabiego-Yau) gładki potencjał ϕ_j znormalizowany za pomocą np. $sup_X\phi_j = -1$. Wybierając podciąg, jeżeli to konieczne, możemy znaleźć $\phi \in PSH(X,\omega)$, tak, że $\phi_j \to \phi$ w $L^1(\omega^n)$ oraz $sup_X\phi = -1$. Dzięki założeniu o całkowalności dostaniemy $\phi \in \mathcal{E}^1(X,\omega)$.

Najtrudniejszym elementem dowodu jest wykazanie, że

$$lim_{j\to\infty} \int_X |\phi_j - \phi| d\mu_j = 0. \tag{3.9}$$

By to udowodnić autorzy w [GZ2] bardzo istotnie korzystają ze szczególnego wyboru ciągu aproksymującego. Powyższy fakt wygląda bardzo podobnie do założenia w kryterium Hiepa na zbieżność względem pojemności w przypadku ograniczonym (Twierdzenie 3.1.5). Okazuje się, że w istocie (3.9) wystarczy by wykazać iż

$$\omega_\phi^n = \mu,$$

co kończy nasz szkic dowodu pierwszej części.

Drugim elementem będzie rozwiązanie problemu Dirichleta dla dowolnej miary probabilistycznej znikającej na zbiorach pluripolarnych. Dla takiej miary μ, stosując argument podobny do twierdzenia Cegrella o dekompozycji (patrz Lemat 4.5 w [GZ2]) znajdziemy $u \in PSH(X,\omega) \cap L^\infty(X,\omega)$ oraz funkcję $f \geq 0,\ f \in L^1(\omega_u^n)$, takie, że $\mu = f\omega_u^n$. Zdefiniujmy ciąg miar $\mu_j := c_j min(f,j)\omega_u^n$ ($c_j \geq 1$ jest stałą normalizacyjną, tak aby μ_j była miarą probabilistyczną). Jest to oczywiście ciąg aproksymujący μ. Odonotujmy, że bez straty ogólności można założyć iż $c_j \leq 2$, gdyż nierówność ta musi zachodzić dla dużych j. Z pierwszej części dowodu wynika istnienie potencjałów $\psi_j \in \mathcal{E}^1(X,\omega)$, $sup_X\psi_j = -1$ dla każdej z miar μ_j (jak łatwo wykazać nie tylko $\mathcal{E}^1(X,\omega)$, lecz cała klasa $PSH(X,\omega)$ zawiera się w $L^1(\mu_j)$). Znów wybierając podciąg, znajdziemy $\psi \in PSH(X,\omega)$, $sup_X\psi = -1$, takie, że $\lim_{j\to\infty}\psi_j = \psi$. W rzeczywistości można "wycisnąć" trochę więcej informacji o ψ (patrz dowód Twierdzenia 4.6 w [GZ2]) co, jak się okazuje, wystarczy by pokazać iż $\psi \in \mathcal{E}(X,\omega)$ oraz $\omega_\psi^n = f\omega_u^n = \mu$.

3.2.4. *Równanie w klasach Cegrella - jedyność.* Ponieważ dodając stałą do funkcji nie zmieniamy jej miary Monge'a-Ampère'a, problem klasyfikacji wszystkich rozwiązań równania

$$(\omega + dd^c\,u)^n = d\mu,$$

zazwyczaj jest stawiany wraz z dodatkowym (liniowym) warunkiem normalizacyjnym typu $sup_X u = 0$ lub $\int_X u\omega^n = 0$. Jednakże wtedy, przeciwnie niż w analogicznym zagadnieniu w przypadku "płaskim", problem okazuje się być wysoce nietrywialny.

Zanim zaczniemy rozważania, przedstawmy przykład który wskazuje, że jedyności (znormalizowanych) rozwiązań nie można się spodziewać bez dodatkowych założeń:

Przykład 3.2.12 ([Bl5]). *Niech $X = \mathbb{P}^n, \omega = \omega_{FS}$ będzie formą Fubiniego-Studiego. Niech*

$$\phi := \log(\frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}}{\sqrt{|z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}}),\ \psi := \max_{\{k=1,\cdots,n\}} \log(\frac{|z_k|}{\sqrt{|z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}}),$$

($z = [z_0, z_1, \cdots, z_n]$ są tu współrzędnymi jednorodnymi na $\mathbb{P}^n$).

Wtedy funkcja $\phi - \psi$ nie jest stała, obie funkcje mają biegun logarytmiczny w punkcie $c = [1 : 0, \cdots, : 0]$, jednak można pokazać, że

$$(\omega + dd^c\,\phi)^n = (\omega + dd^c\,\psi)^n = \delta_c,$$

gdzie δ_c jest deltą Diraca w punkcie c.

Poniżej przedstawiamy historię wyników dotyczących tego zagadnienia:

Pierwszym wynikiem jest Twierdzenie E. Calabiego ([Ca]). Autor udowodnił, że jeżeli ϕ, ψ są gładkie oraz ω_ϕ, ω_ψ są kählerowskie (tzn. ściśle dodatnie) to jedyność (czyli $\phi - \psi = const$) zachodzi. Z punktu widzenia geometrii powyższe założenia są naturalne i dowód jest w rzeczywistości dość łatwy. Jednak gładkość i ścisła dodatniość są kluczowe w metodzie Calabiego, a więc dowód nie przenosi się na przypadki ogólniejsze.

Następnym krokiem był wynik Bedforda i Taylora [BT5] którzy udowodnili jedyność dla ograniczonych ϕ, ψ, o ile rozważaną rozmaitością jest $\mathbb{P}^n$. Ich głównym pomysłem było oszacowanie L^2-normy gradientu różnicy ϕ i ψ. Gdy gradient ten jest zerem w L^2 różnica musi być funkcją stałą.

Korzystając z innych metod Kołodziej [K3] pokazał jedyność dla ograniczonych funkcji na dowolnej zwartej rozmaitości kählerowskiej modulo pewne słabe założenia o mierze μ.

Przypadek "ograniczony" został ostatecznie rozwiązany przez Błockiego w pracy [Bl5]. Jego dowód ma pewne cechy wspólne z metodą z pracy [BT5], lecz jest krótszy i prostszy. Dodatkowo dowód Błockiego daje nam pewne wyniki dotyczące stabilności rozwiązań.

W przypadku klas Cegrella Guedj i Zeriahi w [GZ2] zaobserwowali, że pomysł Błockiego (z odpowiednimi modyfikacjami), można wykorzystać do udowodnienia jedyności w $\mathcal{E}^1(X, \omega)$. Niedawno Demailly oraz Pali w pracy [DP] pokazali jedyność w tej samej klasie przy założeniu, że ω jest dużą formą. Najbardziej ogólny wynik dotychczas został uzyskany przez Błockiego w [Bl6], gdzie pokazana jest jedyność w klasie $\mathcal{E}^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}(X, \omega)$, $n = dimX$.

Sytuacja dla klas Cegrella w przypadku "płaskim" została wyjaśniona przez samego Cegrella, który pokazał w pracy [Ce3], że jedyność zachodzi o ile miara μ zeruje się na zbiorach pluripolarnych. Dowód jednak wykorzystywał w kluczowych momentach idee które nie da się przenieść na przypadek kählerowski. Mimo to jest rzeczą naturalną spodziewać się jedyności właśnie w klasie $\mathcal{E}(X, \omega)$ (zauważmy, że w kontrprzykładzie powyżej obie funkcje są spoza $\mathcal{E}(X, \omega)$).

Poniżej pokażemy dowód jedyności w $\mathcal{E}(X, \omega)$ z pracy [Di3]. Dowód opiera się na innych pomysłach niż wykorzystywane w pracach cytowanych, gdyż funkcje z $\mathcal{E}(X, \omega)$ nie muszą mieć skończonej L^2-normy gradientu, a więc metody z [Bl5] i [GZ2] nie da się wykorzystać (odnotujmy jednak, że w pracy [Bl6] pokazano pewne sposoby jak problem rozbieżności L^2 normy pominąć). Zamiast tego wykorzystamy narzędzia, które dotychczas rozwinęliśmy w tej pracy.

Twierdzenie 3.2.13. *Niech $\phi,\ \psi \in \mathcal{E}(X,\omega)$, będą takie, że $\omega_\phi^n = \omega_\psi^n$. Wtedy $\phi - \psi$ jest stałą.*

Dowód. Przypuśćmy niewprost, że $\phi - \psi \neq const.$

Na początek rozważmy zbiory poziomicowe

$$A_t := \{\,\phi - \psi = t\,\},\ t \in \mathbb{R} \cup \{\,+\infty\,\} \cup \{\,-\infty\,\}\,.$$

Są to zbiory borelowskie które są domknięte w topologii pluri-cienkiej (lecz niekoniecznie w topologii standardowej). Główną trudnością w dowodzie będzie pokazanie, że miara $\mu := \omega_\phi^n = \omega_\psi^n$ jest skupiona na dokładnie **jednym** zbiorze A_t.

Aby to osiągnąć, odnotujmy na początku, że co najwyżej przeliczalnie wiele zbiorów spośród A_t może mieć niezerową miarę μ, oraz oba zbiory $A_{+\infty}$ i $A_{-\infty}$ są miary μ zero (pierwszy wniosek wynika z podstawowych własności miar, a drugi wynika z faktu, że $A_{+\infty}$ oraz $A_{-\infty}$ są pluripolarne). Jeżeli zbiór borelowski A ma niezerową miarę μ, to mówimy że μ *skupia masę* na A.

Udowodnimy, że cała masa μ skupiona jest na jednym zbiorze spośród A_t. Załóżmy niewprost, że tak nie jest. Wtedy znajdziemy $t_0 \in \mathbb{R}$ oraz stałą $1/2 < q < 1$, takie, że:

(1) $\int_{A_{t_0}} d\mu = 0$,
(2) $\int_{\{\,\phi<\psi+t_0\,\}} d\mu < q$,
(3) $\int_{\{\,\phi>\psi+t_0\,\}} d\mu < q$.

Wynika to z następującego rozumowania. Istnieje $t_1 \in \mathbb{R}$, takie, że

$$0 < \int_{\{\,\phi<\psi+t_1\,\}} d\mu < 1,$$

(w przeciwnym przypadku cała miara byłaby skupiona na jednym zbiorze A_t). Gdyby $\int_{A_{t_1}} d\mu = 0$, można wybrać $t_0 := t_1,\ q = \max\{\,\int_{\{\,\phi<\psi+t_1\,\}} d\mu,\ 1 - \int_{\{\,\phi<\psi+t_1\,\}} d\mu\,\} + \epsilon$, gdzie $\epsilon > 0$ jest tak małe aby zachodziło $q < 1$. Jeżeli na A_{t_1} jest skupiona pewna masa, to dla prawie każdego $t < t_1$ A_t jest już bez masy i ze zbieżności monotonicznej można wybrać $t_2 < t_1$ wystarczająco blisko t_1 tak, by A_{t_2} było już bez masy oraz $0 < \int_{\{\,\phi<\psi+t_1\,\}} d\mu < 1$. Wybierzmy $t_0 := t_2,\ q$ jak powyżej i znowu dostaniemy żądane własności.

Dodanie stałej do ϕ lub ψ nie zmienia nic w rozumowaniu więc bez straty ogólności zakładamy, że $t_0 = 0$.

Zdefiniujmy nową miarę

$$\widehat{\mu} := \begin{cases} (1/q)\mu, & na\,\{\,\phi < \psi\,\} \\ c\mu, & na\,\{\,\phi \geq \psi\,\}, \end{cases}$$

gdzie c jest nieujemną stałą, taką, że $\widehat{\mu}$ jest miarą probabilistyczną (takie c można wybrać, gdyż zgodnie z założeniem, miara μ nie zeruje się na zbiorze $\{\,\phi \geq \psi\,\}$).

Oczywiście $\widehat{\mu}$ także zeruje się na zbiorach pluripolarnych (i jest miarą borelowską, gdyż zbiór $\{\,\phi \geq \psi\,\}$ jest borelowski). Stosując twierdzenie Guedja i Zeriahiego o istnieniu rozwiązań można znaleźć funkcję $\rho \in \mathcal{E}(X,\omega)$ będącą rozwiązaniem następującego równania Monge'a-Ampère'a:

$$\omega_\rho^n = \widehat{\mu},\ \rho \in \mathcal{E}(X,\omega),\ sup_X\rho = 0.$$

Zaznaczmy wyraźnie, że na tym etapie nie wiemy czy ρ jest jednoznacznie określona: wybieramy więc jedną spośród możliwych funkcji.

Zauważmy, że dla dowolnego $t \in (0,1)$ zachodzi inkluzja zbiorów

$$U_t := \{(1-t)\phi < (1-t)\psi + t\rho\,\} \subset \{\,\phi < \psi\,\}\,.$$

Wynika stąd, że na zbiorze U_t zachodzi nierówność

$$\omega_\phi{}^{n-1} \wedge \omega_{(1-t)\psi+t\rho} = (1-t)\mu + t\,\omega_\phi^{n\text{-}1} \wedge \omega_\rho \geq [1 + t((1/q)^{1/n} - 1)]\,\omega_\phi^n,$$

(korzystamy tu z Twierdzenia 3.1.8 i Wniosku 3.1.9).

Z zasady porównawczej wynika, że

$$[1 + t((1/q)^{1/n} - 1)] \int_{U_t} \omega_\phi^n \leq \int_{U_t} \omega_\phi^{n\text{-}1} \wedge \omega_{(1-t)\psi+t\rho} \leq$$
$$\leq \int_{U_t} \omega_\phi^{n\text{-}1} \wedge \omega_{(1-t)\phi} = (1-t) \int_{U_t} \omega_\phi^n + t \int_{U_t} \omega_\phi^{n\text{-}1} \wedge \omega.$$

Dostajemy stąd następującą nierówność:

$$(1/q)^{1/n} \int_{U_t} \omega_\phi^n \leq \int_{U_t} \omega_\phi^{n\text{-}1} \wedge \omega. \tag{3.10}$$

Zauważmy, że zamieniając w powyższym rozumowaniu prąd $\omega_\phi^{n\text{-}1}$ przez prąd $\omega_\psi^{n\text{-}1}$ dostaniemy nierówność

$$(1/q)^{1/n} \int_{U_t} \omega_\psi^n \leq \int_{U_t} \omega_\psi^{n\text{-}1} \wedge \omega. \tag{3.11}$$

(znowu korzystamy tu z Wniosku 3.1.9). Niech teraz $t \searrow 0$. Zbiory U_t tworzą ciąg rosnący, oraz $U_t \nearrow \{ \phi < \psi \} \setminus \{ \rho = -\infty \}$. Ponieważ obie miary ω_ϕ^n i $\omega_\phi^{n\text{-}1} \wedge \omega$ zerują się na zbiorach pluripolarnych, dostaniemy nierówność

$$(1/q)^{1/n} \int_{\{ \phi<\psi \}} \omega_\phi^n \leq \int_{\{ \phi<\psi \}} \omega_\phi^{n\text{-}1} \wedge \omega. \tag{3.12}$$

Oczywiście rozumowanie można powtórzyć na zbiorze $\{ \phi > \psi \}$. Mianowicie konstruujemy nową miarę tak samo jak miarę $\widehat{\mu}$, lecz za pomocą zbioru $\{ \phi > \psi \}$. Ustalając $\omega_\phi^{n\text{-}1}$ (lub $\omega_\psi^{n\text{-}1}$) i powtarzając powyższe rozumowanie dostajemy

$$(1/q)^{1/n} \int_{\{ \phi>\psi \}} \omega_\phi^n \leq \int_{\{ \phi>\psi \}} \omega_\phi^{n\text{-}1} \wedge \omega. \tag{3.13}$$

Dodając stronami te nierówności i korzystając z założenia, że μ nie skupia masy na A_0 dostajemy

$$(1/q)^{1/n} = (1/q)^{1/n} \int_{\{ \phi>\psi \}} \omega_\phi^n + (1/q)^{1/n} \int_{\{ \phi<\psi \}} \omega_\phi^n \leq$$
$$\leq \int_{\{ \phi>\psi \}} \omega_\phi^{n\text{-}1} \wedge \omega + \int_{\{ \phi<\psi \}} \omega_\phi^{n\text{-}1} \wedge \omega \leq 1,$$

czyli sprzeczność.

Możemy więc założyć, że cała masa miary μ jest skupiona na zbiorze $\{ \phi = \psi \} \neq X$.

Następnie udowodnimy indukcyjnie, że to samo (czyli cała masa jest skupiona na A_0) zachodzi dla wszystkich miar

$$\omega_\phi^k \wedge \omega_\psi^s \wedge \omega^{n-k-s},\ k,\ s \in \{ 0, \cdots, n-1 \},\ 0 \leq k+s \leq n.$$

Przypadek $k + s = n$ wynika z tego co pokazaliśmy dotychczas i Wniosku 3.1.9.

Przypuśćmy, że teza zachodzi dla wszystkich k oraz s, takich że $k + s = r + 1$. Poniżej pokażemy, że teza jest prawdziwa we wszystkich przypadkach dla których $k + s = r$.

Niech $\phi_j := max\, \{ \phi, -j \}$. Ustalmy $t \in (0, 1)$. Rozważmy zbiory

$$V_{t,j} := \{ \phi + (t/j)\phi_j + (3/2)t < \psi \} \subset \{ \phi < \psi \}.$$

Z zasady porównawczej wynika, że

$$\int_{V_{t,j}} {\omega_\phi}^k \wedge {\omega_\psi}^s \wedge (\omega_\psi + (t/j)\omega) \wedge \omega^{n-r-1} \leq \int_{V_{t,j}} {\omega_\phi}^k \wedge {\omega_\psi}^s \wedge (\omega_\phi + (t/j)\omega_{\phi_j}) \wedge \omega^{n-r-1}.$$

Korzystając z założenia indukcyjnego (oraz inkluzji zbiorów) wnioskujemy, że pierwsze wyrazy po obu stronach zerują się i dostajemy nierówność

$$\int_{V_{t,j}} {\omega_\phi}^k \wedge {\omega_\psi}^s \wedge \omega^{n-r} \leq \int_{V_{t,j}} {\omega_\phi}^k \wedge {\omega_\psi}^s \wedge \omega_{\phi_j} \wedge \omega^{n-r-1}.$$

Zauważmy, że zbiory $V_{t,j}$ tworzą ciąg malejący ze względu na j. Przy $j \to \infty$ dostajemy (korzystając ze znikania miar na zbiorach pluripolarnych)

$$\int_{\{\phi+(3/2)t<\psi\}} {\omega_\phi}^k \wedge {\omega_\psi}^s \wedge \omega^{n-r} \leq \int_{\{\phi+(3/2)t<\psi\}} {\omega_\phi}^{k+1} \wedge {\omega_\psi}^s \wedge \omega^{n-r-1} = 0,$$

gdzie ostatnia równość znowu wynika z założenia indukcyjnego. Na koniec gdy $t \searrow 0$ otrzymujemy

$$\int_{\{\phi<\psi\}} {\omega_\phi}^k \wedge {\omega_\psi}^s \wedge \omega^{n-r} \leq \int_{\{\phi<\psi\}} {\omega_\phi}^{k+1} \wedge {\omega_\psi}^s \wedge \omega^{n-r-1} = 0.$$

Zamieniając rolami ϕ i ψ oraz $\{\phi < \psi\}$ i $\{\phi > \psi\}$ dostaniemy, że miary ${\omega_\phi}^k \wedge {\omega_\psi}^s \wedge \omega^{n-r}$ mają zerową masę na zbiorze $\{\phi \neq \psi\}$, co było do udowodnienia.

W szczególności, dla $k = s = 0$ dostajemy

$$\int_{\{\phi\neq\psi\}} \omega^n = 0.$$

Jednak $\{\phi \neq \psi\}$ jest zbiorem otwartym w topologii pluri-cienkiej, a ω^n jest miarą równociągłą z miarą Lebesgue'a. Tak więc (niepusty) zbiór otwarty w topologii pluri-cienkiej posiadałby zerową miarę Lebesgue'a, co przeczy Twierdzeniu 2.1.23 (oczywiście Twierdzenie to ma charakter lokalny, więc przenosi się na przypadek rozmaitości). Sprzczność ta pokazuje, że nasze początkowe założenie $\phi - \psi \neq const$ jest nieprawdziwe.

□

3.2.5. *Stabilność równania.* W teorii równań różniczkowych analiza stabilności to badanie jak zmienia się rozwiązanie danego równania przy małej perturbacji danych (np. warunków początkowych lub współczynników). Zazwyczaj jest to ważny krok przy badaniu regularności rozwiązań.

Podstawową obserwacją jest, że stabilności (nawet nie podając jej formalnej definicji) nie można się spodziewać w sytuacji gdy brak jednoznaczności rozwiązań, gdyż dwa różne rozwiązania przy tych samych danych początkowych powodują, że w tej sytuacji nie da się kontrolować odchylenia rozwiązania sperturbowanego problemu od rozwiązania "początkowego" za pomocą oszacowania na odchylenie parametrów.

Zaznaczmy przy tym, że nieformalna reguła w teorii równań cząstkowych głosi, że teoria regularności jest znacznie trudniejsza w przypadku braku jedyności. Jednak w przypadku równania Monge'a-Ampère'a na zwartej rozmaitości kählerowskiej wykazaliśmy jedyność dla bardzo ogólnej klasy rozwiązań. Tak więc sensowne jest pytanie o (odpowiednio rozumianą) stabilność.

Poniżej omówimy trzy różne wyniki dotyczące stabilności. Pierwsze twierdzenie pochodzi od Błockiego, drugie zostało udowodnione przez Eyssidieux, Guedja i Zeriahiego, a trzecie przez Kołodzieja. Odnotujmy, że jako pierwszy został wykazany wynik Kołodzieja. Omówimy go jednak jako ostatni, gdyż dalsza część rozdziału będzie poświęcona optymalizacji tego twierdzenia.

Twierdzenie 3.2.14 ([Bl5]). *Niech $u,\ v \in PSH(X,\omega) \cap L^\infty(X)$ będą rozwiązaniami równań*

$$(\omega + dd^c u)^n = f\omega^n,\ (\omega + dd^c v)^n = g\omega^n,$$

gdzie f i g są nieujemnymi funkcjami których całka po całej rozmaitości wynosi 1. Załóżmy, że rozwiązania są znormalizowane tak aby

$$\int_X u\omega^n = \int_X v\omega^n.$$

Wtedy istnieje stała C zależna od X, $sup_X u$, $sup_X v$, taka, że

$$||u - v||_{L^{\frac{2n}{n-1}}} \leq C||f - g||_{L^1},$$

(normy są brane ze względu na miarę ω^n).

Twierdzenie to pokazuje, że "mała" zmiana funkcji f (w sensie L^1) powoduje niewielką zmianę rozwiązań mierzoną w normie $L^{\frac{2n}{n-1}}$.

Twierdzenie 3.2.15 ([EGZ]). *Niech $u,\ v \in PSH(X,\omega)$ rozwiązują równania*

$$(\omega + dd^c \phi)^n = f\omega^n,\ (\omega + dd^c \psi)^n = g\omega^n,$$

gdzie f i g są nieujemnymi funkcjami spełniającymi warunek $\int_X f\omega^n = \int_X g\omega^n = 1$, oraz dodatkowo zakładamy, że $f,\ g \in L^p(\omega^n)$, $p > 1$. Wtedy istnieje stała C zależna od X, p, s, ϵ, $||f||_{L^p}$, $||g||_{L^p}$ taka, że

$$||\phi - \psi||_\infty \leq C||\phi - \psi||_{L^s(\omega^n)}^{\frac{s}{nq+s+\epsilon}}, \forall s > 0,\ \epsilon > 0,\ (q := \frac{p}{p-1}).$$

Zauważmy, że w tym twierdzeniu założenia są mocniejsze (miary Monge'a-Ampère'a są w L^p), lecz daje nam ono znacznie więcej informacji: tym razem rozwiązania są jednostajnie blisko siebie. Odnotujmy, że w pracy [EGZ] był wykazany tylko przypadek $s = 2$, jednak przypadek ogólny można udowodnić analogicznymi metodami.

Twierdzenie 3.2.16 ([K3]). *Przy założeniach jak w poprzednim twierdzeniu istnieje stała $c = c(X,\ p,\ \epsilon,\ ||f||_p,\ ||g||_p)$, taka, że*

$$||\phi - \psi||_\infty \leq c||f - g||_1^{\frac{1}{n+3+\epsilon}},$$

przy założeniu, że u i v są znormalizowane tak, aby zachodziła równość $\sup_X(\phi - \psi) = \sup_X(\psi - \phi)$.

Przypominamy, że z założenia $f,\ g \in L^p$, $p > 1$ wynika ograniczoność u oraz v.

Pomimo nieco dziwnej normalizacji wynik ten jest bardzo ważny, gdyż dostajemy kontrolę za pomocą miar Monge'a-Ampère'a funkcji u oraz v, co w konkretnych sytuacjach często jest jedyną informacją o funkcjach jaką posiadamy.

Poniżej podajemy dowód tego wyniku, opierając się na pracy [K3]. Przypomnijmy na początku, że z L^∞ oszacowania Kołodzieja wiemy iż istnieje stała $c(X, B)$ zależna jedynie od X i od oszacowania na normę $||f||_p \leq B$, taka, że $sup_X\phi - \inf_X \phi \leq c(X, B)$. Stabilność jest natychmiastową konsekwencją następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.2.17. *Niech ϕ, ψ, f, g będą jak wyżej. Ustalmy $A > 0$, takie, że $||f||_p \leq A$, $||g||_p \leq A$. Niech $a = c(X, \frac{3}{2}A)$, a funkcje $Q : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ i $\kappa : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ będą dodatnimi funkcjami z Lematu 3.2.3. Zdefiniujmy $\gamma(t) = D\kappa^{-1}(t)$ (D to pewna nieujemna stała - zdefiniujmy ją, zgodnie z [K3], jako $(\frac{2a}{a+1})^n \frac{(\frac{3}{2})^{\frac{1}{n}}-1}{3}$ choć odnotujmy wyraźnie iż jej dokładna wartość służy tylko jako warunek normalizacyjny). Funkcja $\kappa^{-1}(t)$ to funkcja odwrotna do funkcji κ.*

Jeżeli $\|f-g\|_{L^1} \le \gamma(t)t^{n+3}$ *to*

$$\|\phi-\psi\|_{L^\infty} \le Ct$$

dla $t < t_0$*, gdzie* $t_0 > 0$ *zależy od* γ*, a* C *zależy od* L^p*-norm* f *oraz* g*.*

Rzeczywiście załóżmy, że twierdzenie to zachodzi. Ustalmy $\epsilon > 0$. Wybierzmy $Q(t) = c_m t^m$ dla $m = \frac{n^2}{\epsilon}$ Wtedy $\gamma(t)t^{n+3} = ct^{n+3+\epsilon}$ jest funkcją rosnącą na $[0, t_0)$. Jeżeli istnieje $t_1 \in [0, t_0)$, takie, że $||f-g||_1 = \gamma(t_1)t_1^{n+3}$ to $||\phi-\psi||_\infty \le C_1 t_1 \le C_2||f-g||_1^{\frac{1}{n+3+\epsilon}}$. Gdyby zaś takie t_1 nie istniało (czyli $||f-g||_1 \ge \gamma(t_0)t_0^{n+3}$) to $||\phi-\psi||_\infty \le 2a(\frac{||f-g||_1}{\gamma(t_0)t_0^{n+3}})^{\frac{1}{n+3+\epsilon}} \le c(a,\epsilon)||f-g||_1^{\frac{1}{n+3+\epsilon}}$. Łącząc oba przypadki dostajmy tezę ze stałą $c = max\,\{\, C_2,\ c(a,\epsilon)\,\}$.

Poniżej przedstawiamy dowód Twierdzenia 3.2.17.

Bez straty ogólności załóżmy, że $\int_{\{\psi<\phi\}}(f+g)\omega^n \le 1$, (gdyby tak nie było to można zamienić rolami ψ i ϕ).

Dodając taką samą stałą do ϕ i ψ, (co nie zmienia parametrów w rozumowaniu), zakładamy dodatkowo, że $0 \le \phi \le a$.

Skoro $lim_{t\to 0}\gamma(t) = 0$, z definicji oraz własności funkcji κ, możemy ustalić $0 < t_0 < 1$ wystarczająco małe, tak aby $\gamma(t_0){t_0}^{n+3} < \frac{1}{3}$, (będzie to zachodzić również dla $0 < t < t_0$, gdyż γ jest funkcją rosnącą).

Ustalmy takie t i zdefiniujmy zbiór $E_k = \{\psi < \phi - kat\}$.

Oczywiście zachodzą nierówności

$$\int_{E_0} g\omega^n = \frac{1}{2}\int_{E_0}\big((f+g)+(g-f)\big)\omega^n \le \frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}.$$

Skonstruujmy funkcję g_1 równą $\frac{3g}{2}$ na zbiorze E_0 i równą pewnej nieujemnej stałej na dopełnieniu tego zbioru. Z powyższej nierówności wynika, że tą stałą można tak dobrać aby g_1 miała całkę równą 1 oraz L^p-normę ograniczoną poprzez $\frac{3A}{2}$.

Można więc znaleźć ciągłe rozwiązanie $\rho \in PSH_\omega(X)$ problemu

$${\omega_\rho}^n = g_1\omega^n, \quad max_X\rho = 0,$$

gdzie $||\rho||_\infty \le a$, gdyż $||g_1||_p \le \frac{3}{2}A$.

Zaobserwujmy, że $-2at \le -t\phi + t\rho \le 0$, skąd dostajemy ciąg inkluzji

$$E_2 \subset E := \{\psi < (1-t)\phi + t\rho\} \subset E_0.$$

Niech G będzie zbiorem $\{f < (1-t^2)g\}$. Wtedy na zbiorze $E_0 \setminus G$, mamy nierówność

$$\big((1-t^2)^{-\frac{1}{n}}\omega_\phi\big)^n \ge g\omega^n, \quad \big((\frac{3}{2})^{-\frac{1}{n}}\omega_\rho\big)^n = g\omega^n.$$

Z nierówności mieszanych miar Monge'a-Ampère'a (wystarczy tu wersja pochodząca z [K3]) wynika, że na $E_0 \setminus G$,

$$(\frac{3}{2})^{-\frac{n-k}{n}}(1-t^2)^{-\frac{k}{n}}{\omega_\phi}^k \wedge {\omega_\rho}^{n-k} \ge g\omega^n.$$

Niech $q = (\frac{3}{2})^{\frac{1}{n}} > 1$. Powyższą nierówność można zapisać jako:

$$\omega_\phi^k \wedge {\omega_\rho}^{n-k} \ge q^{n-k}(1-t^2)^{\frac{k}{n}}g\omega^n.$$

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned}
{\omega_{t\rho+(1-t)\phi}}^n &\geq \big((1-t)(1-t^2)^{\frac{1}{n}}+qt\big)^n g\omega^n \\
&\geq \big((1-t)(1-t^2)+qt\big)^n g\omega^n \\
&\geq \big(1+t(q-1)-t^2\big)g\omega^n \\
&\geq \big(1+\frac{t}{2}(q-1)\big)g\omega^n.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Z definicji zbioru G i założeń dostajemy oszacowanie

$$t^2\int_G g\omega^n \leq \int_G (g-f)\omega^n \leq \gamma(t)t^{n+3},$$

skąd po przegrupowaniu dostajemy:

$$\int_G g\omega^n \leq \gamma(t)t^{n+1}. \tag{3.15}$$

Wynika stąd nierówność:

$$\begin{aligned}
\big(1+\frac{t}{2}(q-1)\big)\int_{E\setminus G} g\omega^n &\leq \int_E {\omega_{t\rho+(1-t)\phi}}^n \\
&\leq \int_E {\omega_\psi}^n \\
&\leq \int_{E\setminus G} g\omega^n + \gamma(t)t^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

(korzystaliśmy tu z zasady porównawczej w drugiej nierówności). Otrzymujemy więc

$$\frac{q-1}{2}\int_{E\setminus G} g\omega^n \leq \gamma(t)t^n.$$

Mając inkluzję $E_2 \subset E$ dostajemy stąd

$$\frac{q-1}{2}(\int_{E_2} g\omega^n - \gamma(t)t^{n+1}) \leq \frac{q-1}{2}(\int_{E_2} g\omega^n - \int_G g\omega^n) \leq \frac{q-1}{2}\int_{E\setminus G} g\omega^n \leqslant \gamma(t)t^n,$$

co pociąga za sobą nierówność

$$\int_{E_2} g\omega^n \leq (t+\frac{2}{q-1})\gamma(t)t^n \leq \frac{3}{q-1}\gamma(t)t^n$$

dla małych t.

Z drugiej strony z Twierdzenia 3.1.6 wiemy, że:

$$Cap_\omega(E_4) \leq (\frac{a+1}{2at})^n\int_{E_2} g\omega^n.$$

Łącząc powyższe nierówności dostajemy

$$Cap_\omega(E_4) \leq (\frac{a+1}{2a})^n\frac{3}{q-1}\gamma(t).$$

Wynika stąd, że gdyby zbiór $E' := \{\psi < \phi - (4a+2)t\}$ był niepusty, otrzymalibyśmy:

$$2t \leq \kappa(Cap_\omega(E_4)) \leq \kappa((\frac{a+1}{2a})^n\frac{3}{q-1}\gamma(t)) = t,$$

sprzeczność dla $t > 0$. Mamy więc $\psi \geqslant \phi - (4a+2)t$ co wykazuje prawdziwość dowodzonego faktu.

Stabilność rozwiązań można wykorzystać przy badaniu regularności rozwiązań, istotne jest więc otrzymać *dokładne* oszacowania. W szczególności ważne jest wiedzieć, czy wykładniki w powyższych twierdzeniach są optymalne. Przykład 3.2.19 poniżej wskazuje, że wykładnik w twierdzeniu Eyssidieux, Guedja and Zeriahiego jest rzeczywiście optymalny w pewnych przypadkach. Jednak wykładnik w twierdzeniu Kołodzieja można poprawić na (optymalny) $\frac{1}{n+\epsilon}$. Dowód tego wyniku, wzięty z pracy [DZ] przedstawimy poniżej.

Dowód. Zanim przejdziemy do właściwej analizy problemu przedstawiamy małą poprawkę wykładnika z twierdzenia Kołodzieja którą otrzymujemy prawie "za darmo":

Zauważmy mianowicie, że w definicji zbioru $G = \{f < (1-t^2)g\}$ można zamienić t^2 na $\frac{t}{b}$ (b to odpowiednio duża stała niezależna od parametrów w rozumowaniu), i powtarzając rozumowanie (w przedostatnim kroku bierzemy zamiast zbioru E_4 zbiór E_{2+s} dla odpowiednio dużego s zależnego tylko od b, tak aby korzystając z Propozycji 3.1.7 "zabić" współczynnik przed $\gamma(t)t^n$) dostaniemy, że z $||f-g||_1 \leq \gamma(t)t^{n+2}$ wynika $||\phi-\psi||_\infty \leq Ct$. Otrzymujemy więc stabilność z wykładnikiem $\frac{1}{n+2+\epsilon}$.

Lepsze oszacowania są już nietrywialne, dlatego też najpierw naszkicujemy strategię dowodu a potem przedstawimy szczegóły techniczne.

Aby poprawić wynik, będziemy powtarzać oryginalne rozumowanie starając się wprowadzać modyfikacje w punktach gdzie następuje strata wykładnika. Tak więc będziemy iterować rozumowanie, definiując przy każdym kroku nową funkcję ρ i korzystając z poprzedniego kroku będziemy szacować $||\rho-\psi||_\infty$, co z kolei będziemy wykorzystywać do dobrania nowego zbioru E w coraz to "lepszy" sposób. Po każdym kroku wykładnik się poprawi, a wszystkie ważne parametry dalej pozostaną pod kontrolą. W granicy (gdy liczba kroków iteracyjnych zmierza do nieskończoności) otrzymamy optymalny wykładnik.

Pierwszym krokiem iteracji jest oryginalny dowód Kołodzieja (z poprawką dającą wykładnik $\frac{1}{n+2+\epsilon}$), co często będziemy oznaczać jako Krok 1.

Procedura iteracji z Kroku k do Kroku $k+1$ wygląda następująco:
Chcemy pokazać, że z oszacowania $||f-g||_1 \leq \gamma(t)t^{\beta_k}$ (czyli w Kroku pierwszym mamy tu $\beta_1 = n+2$) wynika $\int_{\{\psi+mat<\phi\}}(\omega+dd^c\psi)^n \leq c\gamma(t)t^n$ dla pewnych stałych m oraz c (aby wprowadzić rozróżnienie stałych w tym dowodzie c_i będą oznaczać (różne) stałe zależne tylko od parametrów z rozumowania). Dostalibyśmy stąd tak jak poprzednio (tym razem zamiast z Twierdzenia 3.1.6 skorzystamy z Propozycji 3.1.7), że zbiór $\{\psi+(m+n)at+2t<\phi\}$ jest pusty dla odpowiednio dobranego $n=n(c)$. Wynika stąd stabilność z wykładnikiem $\frac{1}{\beta_k+\epsilon}$. Staramy się wiec znaleźć minimalne β dla którego implikacja ta zachodzi jednocześnie kontrolując c i zwiększając w razie potrzeby (w sposób kontrolowany) stałą m.

Przypuśćmy więc, że wykonaliśmy Krok k i załóżmy nierówność

$$||f-g||_1 \leq \gamma(t)t^{\beta_{k+1}},\ t < \frac{1}{2}.$$

Jeżeli $l := t^{\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k}}$, $\beta_{k+1} < \beta_k$ (wynika stąd, że $l > t$), dostajemy $||f-g||_1 \leq \gamma(l)l^{\beta_k}$, a więc z Kroku k wiemy, że

$$\int_{E_m} g\omega^n \leq c_0\gamma(l)l^n, \tag{3.17}$$

gdzie, jak w Kroku 1, $E_m := \{\psi < \phi - mat\}$, a $m = m(k)$ jest stałą pod kontrolą, (jej istnienie gwarantuje nam Krok k). Wynika stąd nierówność

$$\int_{E_m} g\omega^n \le c_1 t^{\frac{n\beta_{k+1}}{\beta_k}},\ t \le t_0 \tag{3.18}$$

(korzystamy tu z faktu, że $\gamma(t)$ jest ograniczona i maleje do 0, gdy $t \searrow 0$).

Ustalmy małą dodatnią liczbę δ_k którą dobierzemy później.

Rozważmy nową funkcję

$$g_1(z) = \begin{cases} (1 + \frac{t^{\delta_k}}{2})g(z), & z \in E_m \\ c_2 g(z), & z \in X \setminus E_m, \end{cases}$$

gdzie $0 \le c_2 \le 1$ jest dobrana tak, aby $\int_X g_1\omega^n = 1$. (Stała $\frac{1}{2}$ przed t^{δ_k} jest tu wprowadzona by zagwarantować, że całka po E_m jest mniejsza od 1. Zauważmy, że pomimo faktu, że interesują nas wyłącznie małe wartości t, gdy δ_k jest także małe wyrażenia t^{δ_k} nie można oszacować przez stałą mniejszą niż 1). Tak jak w Kroku 1 znajdujemy rozwiązanie ρ (zależne od k) równania $(\omega_\rho)^n = g_1\omega^n$, $max_X\rho = 0$. Znowu $\rho \ge -a$ (gdyż L^p norma miary ω_ρ^n jest ograniczona przez $\frac{3}{2}A$ niezależnie od k) i po renormalizacji ρ, poprzez dodanie odpowiedniej stałej, uzyskamy $max_X(\psi - \rho) = max_X(\rho - \psi)$ (można to zrobić w sposób kontrolowany).

Z Kroku k dostajemy dla ustalonego małego ϵ (niezależnego od k)

$$\begin{aligned}
||\rho - \psi||_\infty &\le c_3||g - g_1||_1^{\frac{1}{\beta_k+\epsilon}} = c_3\Big(\int_{E_m} |g - g_1|\omega^n + \int_{X\setminus E_m} |g - g_1|\omega^n\Big)^{\frac{1}{\beta_k+\epsilon}} \\
&\le c_3\Big(\frac{t^{\delta_k}}{2}\int_{E_m} g\omega^n + (1 - c_2)\int_{X\setminus E_m} g\omega^n\Big)^{\frac{1}{\beta_k+\epsilon}} \\
&= c_3\Big(\frac{t^{\delta_k}}{2}\int_{E_m} g\omega^n + \int_{X\setminus E_m} g\omega^n - \int_X g\omega^n + (1 + \frac{t^{\delta_k}}{2})\int_{E_m} g\omega^n)\Big)^{\frac{1}{\beta_k+\epsilon}} \\
&= c_3\Big(t^{\delta_k}\int_{E_m} g\omega^n\Big)^{\frac{1}{\beta_k+\epsilon}} \le c_4 t^{\frac{\delta_k + \frac{n\beta_{k+1}}{\beta_k}}{\beta_k+\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Jeżeli δ_k jest wystraczająco małe ostatni wykładnik jest mniejszy niż 1, o ile $\beta_k \ge n$ (gdyby β_k było mniejsze niż n dowód byłby zakończony). Zdefiniujmy $\alpha_k := 1 - \frac{\delta_k + \frac{n\beta_{k+1}}{\beta_k}}{\beta_k+\epsilon}$.

Z oszacowań powyżej mamy dla $s = 2\frac{c_4}{a} + m$

$$\begin{aligned}
E_s &= \{\,\psi + sat < \phi\,\} = \{(1 - \frac{1}{2}t^{\alpha_k})(\psi + sat) < (1 - \frac{1}{2}t^{\alpha_k})\phi\,\} \\
&\subset \{\,\psi < (1 - \frac{1}{2}t^{\alpha_k})\phi + \frac{1}{2}t^{\alpha_k}\rho + \frac{1}{2}c_4 t - sat(1 - \frac{1}{2}t^{\alpha_k})\,\} =: E \\
&\subset \{\,\psi < (1 - \frac{1}{2}t^{\alpha_k})\phi + \frac{1}{2}t^{\alpha_k}\psi + c_4 t - sat(1 - \frac{1}{2}t^{\alpha_k})\,\} \\
&= \{\,\psi + (s - \frac{c_4}{a(1 - \frac{1}{2}t^{\alpha_k})})at < \phi\,\} \subset E_m.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Stała $\frac{1}{2}$, tak jak poprzednio, została wprowadzona aby można było oszacować wyrażenie $1 - \frac{1}{2}t^{\alpha_k}$ z dołu - inaczej wyrażenie $1 - t^{\alpha_k}$, dla małych t oraz α_k może a priori być dowolnie bliskie 0). Nowym m_{k+1} będzie właśnie stała s. Odnotujmy, że znów jest ona pod kontrolą.

Zdefiniujmy "nowy" zbiór

$$G = G(k) := \{ f < (1 - \frac{t^{\alpha_k+3\delta_k}}{8n2^{\frac{n-1}{n}}})g \} .$$

Dalej dla uproszczenia zapisu połóżmy $j := \frac{1}{8n2^{\frac{n-1}{n}}}$.

Z faktu, że $h(t) = (1+\frac{t^{\delta_k}}{2})^{\frac{1}{n}} - 1 - 2jt^{2\delta_k}$ jest funkcją rosnącą w $[0,1]$ i $h(0) = 0$, wnioskujemy jak w Kroku 1, że na zbiorze $E_m \setminus G$ mamy oszacowanie

$$(3.20) \qquad (\omega_{\frac{1}{2}t^{\alpha_k}\rho+(1-\frac{1}{2}t^{\alpha_k})\phi})^n \geq ((1-\frac{1}{2}t^{\alpha_k})(1-jt^{\alpha_k+3\delta_k})^{\frac{1}{n}} + (1+\frac{t^{\delta_k}}{2})^{\frac{1}{n}}\frac{1}{2}t^{\alpha_k})^n g\omega^n \geq$$

$$\geq ((1-\frac{1}{2}t^{\alpha_k})(1-jt^{\alpha_k+3\delta_k}) + (1+2jt^{2\delta_k})\frac{1}{2}t^{\alpha_k})^n g\omega^n \geq (1+\frac{1}{2}jt^{\alpha_k+2\delta_k})g\omega^n.$$

(W powyższych rachunkach oszacowaliśmy wyraz $-\frac{1}{2}jt^{\alpha_k+3\delta_k}$ z dołu przez $-\frac{1}{2}jt^{\alpha_k+2\delta_k}$).

Tak jak w Kroku 1 na zbiorze G dostajemy

$$(3.21) \qquad jt^{\alpha_k+3\delta_k}\int_G g\omega^n \leq \int_G (g-f)\omega^n \leq \gamma(t)t^{\beta_{k+1}}.$$

Korzystając z (3.20), oraz z inkluzji $E \subset E_m$ otrzymamy

$$(3.22) \qquad (1+\frac{1}{2}jt^{\alpha_k+2\delta_k})\int_{E\setminus G} g\omega^n \leq \int_E (\omega_{(1-\frac{1}{2}t^{\alpha_k})\phi+\frac{1}{2}t^{\alpha_k}\rho})^n.$$

Z pomocą zasady porównawczej oraz (3.21) na zbiorze E szacujemy dalej

$$\int_E (\omega_{(1-\frac{1}{2}t^{\alpha_k})\phi+\frac{1}{2}t^{\alpha_k}\rho})^n \leq \int_E g\omega^n \leq \int_{E\setminus G} g\omega^n + c_5\gamma(t)t^{\beta_{k+1}-\alpha_k-3\delta_k}.$$

Na końcu otrzymamy więc

$$\int_{E_s\setminus G} g\omega^n \leq \int_{E\setminus G} g\omega^n \leq c_6\gamma(t)t^{\beta_{k+1}-2\alpha_k-5\delta_k}$$

oraz

$$\int_{E_s} g\omega^n \leq c_7\gamma(t)t^{\beta_{k+1}-2\alpha_k-5\delta_k}.$$

Jeżeli $\beta_{k+1}-2\alpha_k-5\delta_k = n$, to rozumując analogicznie jak w Kroku 1 otrzymamy $\max(\phi-\psi) = \max(\psi-\phi) \leq ((s+s')a+2)t$, gdzie $s' = s'(c_7)$ jest wystarczająco dużą stałą pod kontrolą, taką aby za pomocą Propozycji 3.1.7 "zabić" współczynnik przed $\gamma(t)t^n$. Dostajemy więc w analogiczny sposób oszacowanie $||\phi-\psi||_\infty \leq C(\epsilon)||f-g||_1^{\frac{1}{\beta_{k+1}+\epsilon}}$, $\forall\epsilon > 0$. Zauważmy, że równość $\beta_{k+1}-2\alpha_k-5\delta_k = n$ sprowadza się do rekurencji

$$(3.23) \qquad \beta_{k+1}(1+\frac{2n}{\beta_k(\beta_k+\epsilon)}) = n+2+5\delta_k - 2\frac{\delta_k}{\beta_k+\epsilon}.$$

Z tej rekurencji wnioskujemy (o ile δ_k jest wystarczająco małe i $\beta_k > n+\epsilon_0$ dla ustalonego $\epsilon_0 >> \epsilon$), że $\beta_{k+1} < \beta_k$ tak więc wykładnik się poprawia.

Reasumując, zdefiniowaliśmy w Kroku $k+1$ nowe stałe $\delta_k,\ m_{k+1},\ \beta_{k+1}$, takie, że:

(1) δ_k jest wystarczajaco małą stałą, by z rekurencji (3.23) wychodziły zależności $n < \beta_{k+1} < \beta_k$ oraz $\alpha_k < 1$,

(2) stała m_{k+1} (czyli s z naszego rozumowania) jest pod kontrolą i zachodzi nierówność $\int_{\{\psi+m_{k+1}at<\phi\}}(\omega+dd^c\psi)^n \leq c_0t^n$.

To kończy Krok $k+1$.

Wiemy więc, że β_k jest ciągiem zbieżnym. Można też założyć, że $\delta_k \searrow 0$. Jeżeli więc A będzie granicą ciągu $\{\beta_k\}$, to po przejściu do granicy uzyskamy

$$A(1+\frac{2n}{A(A+\epsilon)}) = n+2 \Rightarrow A = \frac{n+2-\epsilon+\sqrt{(n-2+\epsilon)^2+8\epsilon}}{2}.$$

Gdy $\epsilon \to 0^+ \Rightarrow A \to n$, a więc β_k można wybrać dowolnie blisko n gdy k jest odpowiednio duże oraz dobierzemy (niezależnie od kroków iteracyjnych) małe ϵ.

$\square$

Uwaga 3.2.18. *Powyższe rozumowanie przenosi się bez żadnej istotnej różnicy na przypadek dużych form. Tak więc również w tym przypadku równanie Monge'a-Ampère'a jest stabilne.*

Przykład, który przedstawimy poniżej (wzięty z [DZ]), wskazuje iż jest to wykładnik optymalny:

Przykład 3.2.19. *Dobierzmy dodatnie stałe B, D, takie, że $D < B$ oraz $B2^{2\alpha} < \log 2 + D$, dla ustalonego $\alpha \in (0,1)$ (oczywiście takie stałe istnieją). Rozważmy funkcję*

$$\widehat{\rho}(z) := \begin{cases} B||z||^{2\alpha}, & ||z|| \leq 1, \\ \max\{B||z||^{2\alpha}, \log(||z||) + D\}, & 1 \leq ||z|| \leq 2, \\ \log(||z||) + D, & ||z|| \geq 2. \end{cases}$$

Jest ona poprawnie zdefiniowana, plurisubharmoniczna w $\mathbb{C}^n$ i ma wzrost logarytmiczny. Wygładzając $\widehat{\rho}$ można uzyskać funkcję ρ, tak aby nowa funkcja miała znów wzrost logarytmiczny, a także była radialna, gładka poza zerem oraz $\rho(z) = B||z||^{2\alpha}$ dla $||z|| \leq \frac{3}{4}$.

Wygładzanie to można określić na wiele sposobów. Wystarczy zauważyć, że funkcję

$$m(x,y) = max(x,y),$$

można aproksymować malejącym ciągiem funkcji wypukłych i gładkich m_ϵ, takich, że $m_\epsilon(x,y) = x$ jeżeli $x-y \geq \epsilon$ oraz $m_\epsilon(x,y) = y$ jeżeli $y-x \geq \epsilon$. O ile ϵ bedzie wystarczająco małe, to zamieniając w definicji $\widehat{\rho}$ maksimum na m_ϵ dostaniemy funkcję o żądanych własnościach. Więcej szczegółów na temat tej konstrukcji można znaleźć w pracy [Si2] *lub w* [De3].

Za pomocą inkluzji

$$\mathbb{C}^n \ni z \longrightarrow [1:z] \in \mathbb{P}^n$$

można funkcji $\rho(z)$ przypisać funkcję

$$\overline{\rho}([z_0 : z_1 :, \cdots, : z_n]) := \rho(\frac{z_1}{z_0}, \cdots, \frac{z_n}{z_0}) - \frac{1}{2}\log(1+\frac{||z||^2}{|z_0|^2}) \in PSH(\mathbb{P}^n, \omega_{FS})$$

(tu ω_{FS} to forma Fubiniego-Studiego na $\mathbb{P}^n$, a wartości $\overline{\rho}$ na hiperpłaszczyźnie $\{z_0 = 0\}$ dookreślamy jako granicę wartości $\overline{\rho}$ gdy z_0 zmierza do 0.) Z konstrukcji wynika, że $\omega_{\overline{\rho}}^n = (dd^c\rho)^n$ w mapie $z_0 \neq 0$, a z gładkości wynika, że możemy pominąć zachowanie funkcji na hiperpłaszczyźnie w nieskończoności, gdyż ta hiperpłaszczyzna jest miary $\omega_{\overline{\rho}}^n$ zero.

Ustalając wektor $h \in \mathbb{C}^n$ zdefiniujmy $\rho_h(z) := \rho(z+h)$ oraz analogicznie $\overline{\rho}_h$. Gdy $||h|| \to 0$, $\overline{\rho}_h \rightrightarrows \overline{\rho}$.

Dla $z = 0$ dostajemy nierówność

$$B||h||^{2\alpha} \leq ||\overline{\rho}_h - \overline{\rho}||_\infty. \tag{3.24}$$

Miary Monge'a-Ampère'a $\overline{\rho}$ oraz $\overline{\rho}_h$ są gładkimi funkcjami poza 0 *i, odpowiednio,* $-h$ *oraz należą do* $L^p(\omega_{FS}^n)$ *dla pewnego* $p > 1$ *zależnego od* α.

Mamy więc $\int_{\mathbb{P}^n} |\omega_{\overline{\rho}}^n - \omega_{\overline{\rho}_h}^n| = \int_{\mathbb{C}^n} |(dd^c\rho)^n - (dd^c\rho_h)^n|$. *By oszacować ostatnie wyrażenie dzielimy* $\mathbb{C}^n$ *na trzy części (zakładamy, że* $||h||$ *jest małe):*

$$\int_{\mathbb{C}^n} |(dd^c\rho)^n - (dd^c\rho_h)^n| = \int_{\{||z||\le 2||h||\}} \cdots + \int_{\{2||h||<||z||\le\frac{1}{2}\}} \cdots + \int_{\{||z||>\frac{1}{2}\}} \cdots .$$

Skoro ρ *i* ρ_h *są gładkimi funkcjami w otoczeniu* $\{||z|| > \frac{1}{2}\}$ *ostatni wyraz łatwo oszacować poprzez* $||h||C_0$ *dla pewnej stałej* C_0 *niezależnej od* h. *Analizując pierwszy z wyrazów zauważmy iż na zbiorze po którym całkujemy zachodzą wzory* $(dd^c\rho)^n = C_1B^n||z||^{2n(\alpha-1)}$, $(dd^c\rho_h)^n = C_1B^n||z+h||^{2n(\alpha-1)}$ *(*C_1 *jest stałą zależną tylko od wymiaru* n*). Skorzystajmy teraz z metody szacowania, którą można znaleźć w* [KW].

$$\begin{aligned}
&\int_{\{||z||\le 2||h||\}} |(dd^c\rho)^n - (dd^c\rho_h)^n| = \\
&= B^nC_1 \int_{\{||z||\le 2||h||\}} |||z||^{2n(\alpha-1)} - ||z+h||^{2n(\alpha-1)}| \le \\
&\le 2B^nC_1 \int_{\{||z||\le 3||h||\}} ||z||^{2n(\alpha-1)} = C_2||h||^{2n\alpha}.
\end{aligned}$$

Dla drugiego wyrazu zachodzi z kolei oszacowanie

$$\begin{aligned}
&\int_{\{2||h||\le||z||\le\frac{1}{2}\}} |(dd^c\rho)^n - (dd^c\rho_h)^n| = \\
&= B^nC_1 \int_{\{2||h||\le||z||\le\frac{1}{2}\}} |||z||^{2n(\alpha-1)} - ||z+h||^{2n(\alpha-1)}| \le \\
&\le B^nC_1 \int_{2||h||<||z||} |\int_0^1 < \nabla||z+th||^{2n(\alpha-1)}, h > dt| \le \\
&\le C_3||h|| \int_{||h||<||z||} ||z||^{2n(\alpha-1)-1} \le C_4||h||^{2n\alpha},
\end{aligned}$$

zakładając, że $\alpha < \frac{1}{2n}$, *a więc całka jest określona. Ostatecznie dla małych* $||h||$

$$\int_{\mathbb{P}^n} |\omega_{\overline{\rho}}^n - \omega_{\overline{\rho}_h}^n| \le (C_2 + C_4)||h||^{2n\alpha} + C_0||h|| \le C_5||h||^{2n\alpha}. \tag{3.25}$$

Załóżmy iż mamy oszacowanie stabilności typu $||\phi - \psi||_\infty \le C_6||f-g||_1^{\frac{1}{m}}$. *Łącząc (3.24) z (3.25) otrzymujemy*

$$||h||^{2\alpha} \le C_7(||h||^{2n\alpha})^{\frac{1}{m}},\ \alpha \in (0, \frac{1}{2n}).$$

Gdy $||h|| \to 0$ *nierówność ta może pozostać prawdziwa tylko w przypadku gdy* $m \ge n$.

Korzystajac z tego samego przykładu i podobnych rachunków można pokazać że wykładnik w twierdzeniu Eyssidieux, Guedja i Zeriahiego także jest optymalny, o ile $p < 2$ *oraz* $s > \frac{2np}{2-p}$ *(założenia te wynikają z faktu, że druga całka którą szacujemy w tym przykładzie byłaby rozbieżna bez tych warunków). Jest jednak wysoce prawdopodobne, że wykładniki są optymalne bez tych technicznych warunków.*

3.2.6. *Regularność rozwiązań.* Jak już wcześniej wspomnieliśmy, stabilność rozwiązań zazwyczaj wykorzystuje się w dowodzeniu wyższej regularności rozwiązań równań różniczkowych. Tak więc wyniki z poprzednich podrozdziałów sugerują iż taka lepsza regularność może mieć miejsce w przypadku równania Monge'a-Ampère'a. Nowy wynik, uzyskany przez Kołodzieja, potwierdza te przypuszczenia:

Twierdzenie 3.2.20 ([K5])**.** *Niech $\phi \in PSH(X,\omega)$ będzie rozwiązaniem problemu Dirichleta*

$$(\omega + dd^c\phi)^n = f\omega^n,\ sup_X\phi = 0,\ \phi \in PSH(X,\omega),$$

gdzie $f \geq 0$ jest funkcją należąca do przestrzeni $L^p(\omega^n)$, $p > 1$. Wtedy funkcja ϕ jest hölderowsko ciągła, przy czym wykładnik Höldera zależy od p, wymiaru rozmaitości X oraz od jej geometrii.

Poniżej naszkicujemy główne idee w dowodzie tego twierdzenia.

Odnotujmy iż lokalnie (w odpowiedniej mapie) funkcje ϕ można aproksymować za pomocą splotów. Korzystając z ciągłości ϕ (udowodnionej we wcześniejszych podrozdziałach) można za pomocą (skomplikowanej) techniki Richberga sklejać te lokalne przybliżenia, tak aby dostać ciąg globalnych funkcji ω-plurisubharmonicznych aproksymujących ϕ. W tym procesie klejenia istotnie ingeruje geometria rozmaitości i w tym momencie wpływa ona na tempo aproksymacji. Z kolei tempo aproskymacji względem lokalnych L^1 norm zależy od laplasjanu ϕ (dzięki znanemu z teorii potencjału wzorowi Jensena). Korzystając z tych wyników dostajemy oszacowanie w normie L^∞ poza zbiorem o małej mierze Lebesgue'a.

Z drugiej strony, dzięki Twierdzeniu 3.2.16 (lub jego uogólnieniu) rozwiązanie problemu Dirichleta

$$\psi \in PSH(X,\omega),\ (\omega + dd^c\psi)^n = g\omega^n,\ sup_X(\phi - \psi) = sup_X(\psi - \phi),$$

gdzie

$$g(z) = \begin{cases} 0, & dla\ z \in E, \\ cf & dla\ z \in X \setminus E \end{cases}$$

(stałą c dobieramy tak, aby $\int_X g\omega^n = \int_X \omega^n$) będzie dla zbiorów E o małej objętości bliskie ϕ.

Łącząc te dwa sposoby aproksymowania ϕ można wykazać iż zbyt wolne tempo przybliżania się ciągu w normie jednostajnej prowadzi do sprzeczności z zerowaniem się funkcji g na (odpowiednio dobranym) małym zbiorze E. Szczegóły dowodu można znaleźć w [K5].

W szczególnym przypadku gdy X jest *jednorodna* tzn. grupa automorfizmów X zachowujących formę ω działa tranzytywnie (tak jest na przykład w przypadku $\mathbb{P}^n$ wraz z forma Fubiniego-Studiego) Eyssidieux, Guedj i Zeriachi w pracy [EGZ] wykazali, że wykładnik Höldera nie zależy od geometrii rozmaitości X, a jedynie od $n = dimX$ oraz p (można wziąć dowolny wykładnik mniejszy niż $\frac{2}{2+\frac{np}{p-1}}$). Ich dowód opiera się na przybliżaniu funkcji ϕ za pomocą ϕ_h- złożenia ϕ z automorfizmem (zachowującym ω) bliskim identyczności (odpowiednikiem translacji o krótki wektor w $\mathbb{C}^n$), Twierdzeniu 3.2.15 o stabilności oraz na prostym szacowaniu L^2 normy różnicy $\phi_h - \phi$. Szczegóły dowodowe można znaleźć w [EGZ].

W związku z tymi wynikami rodzi się naturalne pytanie o dokładną zależność pomiędzy geometrią X a wykładnikiem Höldera (o ile taka zależność istnieje). Jeszcze ciekawszy jest problem przeniesienia wyniku Kołodzieja na przypadek dużych form (oczywiście o ile zachodzić będzie w tym przypadku twierdzenie o ciągłości rozwiązań). Jak się przekonamy w następnym rozdziale rozwiązanie tych problemów może mieć bardzo interesujące zastosowania w geometrii.

4. Zastosowania w geometrii zespolonej

4.1. Potok Kählera-Ricciego i jego zachowanie w przypadkach granicznych. Potok Kählera-Ricciego to paraboliczny potok będący zespolonym odpowiednikiem potoku Ricciego. Ten ostatni stał się w ostatniej dekadzie jednym z głównych obiektów badań w geometrii riemannowskiej i, dzięki pracom Hamiltona, Perelmana i innych autorów, znalazł spektakularne zastosowania (między innymi rozwiązanie hipotezy Poincarego).

Definicja 4.1.1 (Potok Kählera-Ricciego (znormalizowany)). *Niech X będzie rozmaitością kählerowską z ustaloną formą Kählera ω. Potok Kählera-Ricciego (z danymi początkowymi ω) to potok generowany przez równanie*

$$\frac{\partial \omega_t}{\partial t} = -Ric_{\omega_t} + \mu\omega_t,\ \omega_0 = \omega, \tag{4.1}$$

gdzie ω_t to zależna od czasu t forma kählerowska, a Ric_{ω_t} to jej forma Ricciego. Stała μ jest pewną stałą topologiczną zależną od (X, ω), której dokładne znaczenie i wartość omówimy poniżej.

Przedstawmy tu pewną heurezę dotyczącą tego potoku. Z ogólnej teorii nieliniowych parabolicznych równań różniczkowych wynika istnienie potoku dla *małych* wartości czasu (tzn. dla t bliskich zeru). Przypuśćmy jednak, że potok da się przedłużyć do nieskończoności oraz dodatkowo istnieje jakaś graniczna forma ω_∞. Człon $\frac{\partial \omega_t}{\partial t}$ powinien, przynajmniej na dyskretnym podciągu czasów, zmierzać do formy zerowej. Dostajemy więc w granicy równanie

$$Ric_{\omega_\infty} = \mu\omega_\infty. \tag{4.2}$$

Jednak lewa strona tego równania reprezentuje klasę kohomologii $c_1(X)$, a ω_∞ jest formą nieujemną (gdyż startując z formy kählerowskiej ω forma ω_t będzie formą kählerowską dla dowolnego $t > 0$ - inaczej Ric_{ω_t} nie byłaby poprawnie określona).

Tak więc z powyższego rozumowania heurystycznego wynika iż μ powinna być odpowiednio dobraną stałą normalizacyjną, tak aby równanie (4.2) mogło być spełnione, przynajmniej na poziomie kohomologicznym.

Geometrycznie interesujące są następujące przypadki:

- Jeżeli wiązka antykanoniczna $-K_X$ jest szeroka to można wykazać (wynika to z głębokiego geometrycznego twierdzenia Kodairy o zanurzeniu) iż odpowiadająca $-K_X$ klasa Cherna $c_1(X)$ jest klasą kählerowską. Innymi słowy $c_1(X) > 0$, a więc w tym przypadku $\mu > 0$. Tradycyjnie w geometrii rozważa się potok ze stałą $\mu = 1$, a przypadek ogólny sprowadza się do tego za pomocą odpowiedniego przeskalowania.
- Jeżeli z kolei K_X jest szeroka, to $c_1(X) < 0$ i odpowiednio $\mu < 0$. Tradycyjnie rozpatruje się potok ze stałą $\mu = -1$.
- Jeżeli $K_X = 0$ (czyli wiązka kanoniczna jest trywialna) to stała μ musi się zerować.
- Jeżeli K_X jest nef i duża to (w pewnym sensie) $c_1(X) \leq 0$. Okazuje się iż znów dobrym wyborem jest $\mu = -1$, jednak równanie (4.2) może być spełnione tylko w odpowiednio rozumianym słabym sensie.

Uwaga 4.1.2. *Odnotujmy iż gładkie rozwiązanie (o ile takie istnieje) równania*

$$Ric_\omega = \lambda\omega$$

z odpowiednio dobraną stałą λ jest bardzo szczególną formą kählerowską. Metryki pochodzące od takich form nazywaja się metrykami Kählera-Einsteina. Mają one fundamentalne znaczenie w geometrii zespolonej, podobnie jak metryki Einsteina w geometrii riemannowskiej.

Oczywiście aby taka metryka istniała klasa $c_1(X)$ musi być określona. W przypadkach $c_1(X) < 0$ i $c_1(X) = 0$ taka metryka istnieje zawsze. Stwarza to nadzieję na wypełnienie heurystycznych rozważań powyżej, w szczególności na istnienie potoku aż do nieskończoności i istnienia metryki granicznej. Istnienie w przypadku $c_1(X) > 0$ jest uwarunkowane dodatkowymi ograniczniami, jednak pełna charakteryzacja tych rozmaitości dla których istnieje metryka Kählera-Einsteina oraz $c_1(X) > 0$ pozostaje jednym z najważniejszych nierozwiązanych problemów geometrii zespolonej. Odsyłamy do [T]*, gdzie można znaleźć szczegółowe omówienie metryk Kählera-Einsteina i problemu ich istnienia.*

Powracając do analizy potoku Kählera-Ricciego zauważmy iż w odróżnieniu od potoku Ricciego równanie (4.1) można sprowadzić do równania parabolicznego dla potencjałów. Aby tego dokonać, odnotujmy najpierw iż z (4.1) wynika równanie klas kohomologii

$$[\frac{\partial\omega_t}{\partial t}] = -c_1(X) + \mu[\omega_t].$$

Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. Niech $\mu \neq 0$. Dla uproszczenia zapisu wybieramy reprezentanta $c_1(X)$ jako Ric_ω- w rzeczywistości tego reprezentanta można wybrać dowolnie. Wtedy z $\partial\bar{\partial}$-lematu (przypominamy tu podobne rozumowanie z podrozdziału o równaniu Calabiego-Yau) dostaniemy iż

$$\omega_t = \frac{Ric_\omega}{\mu} + e^{\mu t}(\omega - \frac{Ric_\omega}{\mu}) + i\partial\bar{\partial}\phi_t$$

dla pewnego potencjału ϕ_t zależnego od czasu t. Dostajemy więc ciąg równań

$$\mu\omega_t - Ric_{\omega_t} = \frac{\partial\omega_t}{\partial t} = \mu e^{\mu t}(\omega - \frac{Ric_\omega}{\mu}) + \mu\frac{Ric_\omega}{\mu} - Ric\omega + i\partial\bar{\partial}\frac{\partial\phi_t}{\partial t}$$
$$= \mu\omega_t - \mu i\partial\bar{\partial}\phi_t + i\partial\bar{\partial}\frac{\partial\phi_t}{\partial t}.$$

Wynika stąd iż

$$i\partial\bar{\partial}log(\frac{\omega_t^n}{\omega^n}) = i\partial\bar{\partial}\frac{\partial\phi_t}{\partial t} - \mu i\partial\bar{\partial}\phi_t.$$

Skoro jednak X jest rozmaitością zwartą, to wszystkie funkcje pluriharmoniczne na X muszą być stałe. Dostaniemy więc równość

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial t} = log(\frac{\omega_t^n}{\omega^n}) + \mu\phi_t + c_t,$$

gdzie c_t jest pewną stałą zależną tylko od t. Dobierając odpowiednią normalizację potencjału ϕ_t możemy założyć iż $c_t = 0$. Uzyskujemy więc następujący problem paraboliczny

$$\begin{cases} \omega_t^n = e^{\frac{\partial\phi_t}{\partial t} - \mu\phi_t}\omega^n \\ \phi_0 = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Przypadek 2. Niech $\mu = 0$. Z rozumowania heurystycznego powyżej wynika, że odpowiada temu sytuacja geometryczna gdy $c_1(X) = 0$. Tak więc $[\frac{\partial\omega_t}{\partial t}] = 0$, czyli klasa kohomologii ω_t nie powinna zależeć od t. Jeżeli $\omega_t = \omega + i\partial\bar{\partial}\phi_t$ (znów korzystamy tu z $\partial\bar{\partial}$ lematu), a $Ric_\omega = i\partial\bar{\partial}h_\omega$ (taki potencjał h_ω istnieje, gdyż $c_1(X) = 0$) to

$$-Ric_{\omega_t} + Ric_\omega - i\partial\bar{\partial}h_\omega = -Ric_{\omega_t} = i\partial\bar{\partial}\frac{\partial\phi_t}{\partial t}.$$

Rozumując jak w pierwszym przypadku dostajemy równoważność powyższego równania (po normalizacji ϕ_t) z problemem

$$\begin{cases} \omega_t^n = e^{\frac{\partial\phi_t}{\partial t} + h_\omega}\omega^n \\ \phi_0 = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Tak więc geometryczny potok Kählera-Ricciego został sprowadzony do parabolicznego odpowiednika równania Monge'a-Ampère'a na rozmaitości X (w przypadku $\mu \neq 0$ w równaniu zmienia się także forma kählerowska względem której rozpatrujemy funkcje ω-plurisubharmoniczne). Jak już wspomnieliśmy w przypadkach $c_1(X) < 0$ i $c_1(X) = 0$ możemy się spodziewać, że potok ten będzie istniał dla $t \in [0, \infty)$ oraz będzie zmierzał w nieskończoności do metryki Kählera-Einsteina na X. Fakt ten rzeczywiście zachodzi, co wykazał Cao.

Twierdzenie 4.1.3 ([Cao]). *Niech X będzie zwartą rozmaitością kählerowską o szerokiej lub trywialnej wiązce kanonicznej (w języku klas Cherna $c_1(X) < 0$ lub, odpowiednio $c_1(X) = 0$). Wtedy potok Kählera-Ricciego istnieje dla $t \in [0, +\infty)$ i zmierza w granicy do gładkiej formy ω_∞, takiej, że $Ric_{\omega_\infty} = \mu\omega_\infty$.*

Twierdzenie to można także potraktować jako alternatywny dowód istnienia metryk Kählera-Einsteina w tym przypadku. Dowód Cao jest nietrywialny, a metody opierają się na teorii równań różniczkowych cząstkowych, bez wykorzystania teorii pluripotencjału.

Ciekawszy jest jednak przypadek $c_1(X) > 0$. Jak już wspomnieliśmy nie zawsze metryka Kählera-Einsteina istnieje, tak więc nie można się spodziewać analogicznego zachowania potoku Kählera-Ricciego. Zamiast tego można postawić pytanie czy za pomocą tego potoku można scharakteryzować te rozmaitości, które spełniaja warunek $c_1(X) > 0$ i dopuszczają metryki Kählera-Einsteina. Problem ten jest obiektem bardzo intensywnych badań w ostatnich latach.

Istotne wyniki w tej dziedzinie zostały uzyskane przez Chena i Tiana ([ChT1] oraz [ChT2]). W pracach tych autorzy pokazali, że przy pewnych założeniach na formę początkową ω (gwarantujących istnienie metryki Kählera-Einsteina na X), potok Kählera-Ricciego rzeczywiście przedłuża się do nieskończoności i zmierza do metryki Kählera-Einsteina. Dowód Chena i Tiana znów opiera się na teorii równań różniczkowych i na głębokich faktach geometrycznych.

Nowszym wynikiem jest nieopublikowane twierdzenie Perelmana i jego uogólnienie przez Tiana i Zhu [TZh].

Twierdzenie 4.1.4 (Twierdzenie Perelmana, Tiana, Zhu). *Niech X będzie rozmaitością kählerowską, taką, że $c_1(X) > 0$. Jeżeli na X istnieje metryka Kählera-Einsteina, to potok Kählera-Ricciego startujący z dowolnej formy z klasy $c_1(X)$ przedłuża się do nieskończoności i zmierza w odpowiednim sensie do metryki Kählera-Einsteina.*

Intuicyjnie twierdzenie to rozwiązuje pierwszą część problemu charakteryzacji rozmaitości dopuszczających metryki Kählera-Einsteina. Druga część, czyli zagadnienie jak się potok zachowuje gdy na rozmaitości nie ma takich metryk nie została jeszcze do końca wyjaśniona. Warto tu odnotować, że istotnym elementem dodowdu Tiana i Zhu jest L^∞-oszacowanie Kołodzieja (patrz podrozdział o równaniu Calabiego-Yau i jego uogólnieniach).

W przypadku gdy wiązka kanoniczna jest duża ($\mu = -1$) Tian i Zhang wykazali [TZ], opierając sie na wcześniejszych wynikach Tsujiego [Ts], że potok Kählera-Ricciego istnieje w przedziale $[0, T)$ gdzie $T := sup\{\, t |\ (e^{-t}-1)c_1(X) + e^{-t}[\omega] > 0\,\}$. Oznacza to, że potok istnieje w maksymalnym możliwym czasie (dla $T' > T$ forma $Ric_{\omega_{T'}}$ nie ma sensu w punktach gdzie $\omega_{T'}^n < 0$). Gdy wiązka kanoniczna jest dodatkowo nef (oznacza to, że w słabym sensie $c_1(X) \leq 0$) dostajemy $T = +\infty$, czyli potok istnieje dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$.

W obu przypadkach ważne jest zidentyfikować obiekt ω_T będący (odpowiednio rozumianą) granicą ω_t gdy $t \to T^-$. Oczywiście nie może to być forma gładka gdyż w przypadku nef byłaby to metryka Kählera-Einsteina (co przeczyłoby nieokreśloności $c_1(X)$) zaś w przypadku skończonego T potok dałoby się przedłużyć dla czasów większych niż T (dzięki teorii parabolicznych równań różniczkowych), co jak wspomnieliśmy wyżej jest niemożliwe.

Łącząc metody geometryczne i różniczkowe Tian i Zhang [TZ] wykazali, że prąd ω_T jest gładką formą poza pewnym zbiorem analitycznym wzdłuż którego klasa $(e^{-T}-1)c_1(X) + e^{-T}[\omega]$ się degeneruje. Podobne wyniki można znaleźć w pracach [EGZ], [CasN], [ST1], [ST2], [Ts] oraz [To]. Metody różniczkowe nie dają jednak żadnej informacji co się dzieje właśnie na tym zbiorze analitycznym.

Z drugiej strony równanie w momencie T ma postać

$$\omega_T^n = e^{\frac{\partial u_T}{\partial t} + u_T}\omega^n.$$

Jeżeli przez $\widehat{\omega}_T$ oznaczymy formę $(e^{-T}-1)Ric_\omega + e^{-T}\omega$, to równanie sprowadza się do

$$(\widehat{\omega}_T + i\partial\bar{\partial}u_T)^n = e^{\frac{\partial u_T}{\partial t} + u_T} f(\widehat{\omega}_T)^n,$$

gdzie funkcja f (nadużywając nieco oznaczeń) równa się $\frac{\omega^n}{(\widehat{\omega}_T)^n}$. Forma $\widehat{\omega}_T$, jeżeli jest dodatnio półokreślona (co można często dostać - patrz [TZ]), jest typowym przykładem dużej formy (gdyż jest ściśle dodatnio określona poza wspomnianym zbiorem analitycznym) oraz $u_T \in PSH(X, \widehat{\omega}_T)$. Jako iż stosunkowo prosto można oszacować L^p normę prawej strony dla $p > 1$ (patrz [TZ]), z teorii rozwiniętej w rozdziale trzecim dostajemy następujący wniosek:

Wniosek 4.1.5 ([TZ], [EGZ])**.** *Potencjał u_T jest w tej sytuacji jednostajnie ograniczony.*

Dzięki teorii pluripotencjału dostajemy więc więcej informacji jak ω_T zachowuje się na rozmaitości X.

Kolejnym problemem jest pytanie o regularność potencjału u_T. Gdy K_X jest duża i nef ($T = \infty$) z ogólnych faktów geometrycznych (patrz [TZ], [Z]) wynika, że istnieje odwzorowanie holomorficzne $F : X \to \mathbb{P}^N$, (jest to odwzorowanie stowarzyszone do $|K_X|$, przypominamy iż obraz $F(X)$ może być osobliwy) takie, że $\widehat{\omega}_\infty = F^*\omega_{FS}$ (ω_{FS} to forma Fubiniego-Studiego na $\mathbb{P}^N$). Na mocy Twierdzenia 3.2.7 dostajemy kolejny wniosek:

Wniosek 4.1.6 ([Z], [DZ])**.** *Potencjał u_∞ jest ciągły na X i gładki poza pewnym zbiorem osobliwym.*

W przypadku $T < \infty$ (czyli gdy K_X jest tylko duża) ciągłość potencjału pozostaje problemem otwartym, gdyż brakuje odpowiednika twierdzenia o istnieniu odwzorowania stowarzyszonego (patrz [Z]). W obu przypadkach jednak spodziewana jest maksymalna możliwa regularność potencjału u_T, czyli że $u_T \in \mathcal{C}^{1,1} \setminus \mathcal{C}^2$. Dalsze zrozumienie osobliwości u_T (chociażby pokazanie hölderowskiej ciągłości) jest kluczowe dla lepszego zrozumienia geometrii przestrzeni (X, ω_T). W przypadku $T < \infty$ jest to przestrzeń (pseudo)metryczna niezupełna, i geometrzy spodziewają się (patrz np. [ST1], [ST2]), że jej uzupełnienie

$(\overline{X}, \overline{\omega}_T)$ będzie odpowiadało jakiejś bimeromorficznej modyfikacji X. Istnieje też przypuszczenie (poparte rachunkami w wymiarze 2 - patrz np. [CasN], [ST1]), że potok Kählera-Ricciego w przypadku gdy K_X jest duża po skończenie wielu takich operacjach uzupełnienia doprowadzi do rozmaitości (bądź niezbyt osobliwego zbioru analitycznego) X_{can} na którym $K_{X_{can}}$ będzie nef. Otrzymalibyśmy w ten sposób metryczną wersję słynnego programu modeli minimalnych w geometrii algebraicznej.

Na koniec chcielibyśmy odesłać do [T], [TZ], [TZh], [ST1], [ST2], [CasN], [To], [Ts], [EGZ] i [BEGZ], gdzie można znaleźć znacznie pełniejszy obraz rozwijanej teorii, oraz można się przekonać o powiązaniach pomiędzy geometrią i teorią pluripotencjału.

Literatura

[Al] A.D.Alexandrov, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen,* Akademie Verlag, Berlin, (1955).

[AT] H.Alexander i B.A.Taylor, *Comparison of two capacities in $\mathbb{C}^n$,* Math. Zeit. **186** (1984), 407-417.

[BEGZ] S.Boucksom, P.Eyssidieux, V.Guedj i A.Zeriahi, *Monge-Ampère equations in big cohomology classes,* Preprint, arXiv:0812.3674v1.

[BGZ] S.Benelkourchi, V.Guedj i A.Zeriahi *A priori estimates for weak solutions of complex Monge-Ampère equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. **5** vol. 7 (2008), 1-16.

[Bl1] Z.Błocki, *Estimates for the complex Monge-Ampère operator,* Bull. Polish Acad. Sci. Math. **41** (1993), 151-157.

[Bl2] Z.Błocki, *The complex Monge-Ampère operator in hypeconvex domains,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **23** (1996), 721-747.

[Bl3] Z.Błocki, *On the definition of the complex Monge-Ampère operator in $\mathbb{C}^2$,* Math. Ann. **328** (2004), 415-423.

[Bl4] Z.Błocki, *The domain of definition of the complex Monge-Ampère operator,* Amer. J. Math. **128** (2006), no. 2, 519-530.

[Bl5] Z.Błocki, *Uniqueness and stability for the Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds,* Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), no. 6, 1697-1701.

[Bl6] Z.Błocki, *On uniqueness of the complex Monge-Ampère equation on compact Kähler manifold,* preprint, dostępny na www.im.uj.edu.pl/ blocki.

[BT1] E.Bedford i B.A.Taylor, *Simple and Positive Vectors in the Exterior Algebra of $\mathbb{C}^n$,* preprint (1974) (nieopublikowany).

[BT2] E.Bedford i B.A.Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère operator,* Invent. Math., **37** (1976), 1-44.

[BT3] E.Bedford i B.A.Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions,* Acta Math. **149** (1982), 1-40.

[BT4] E.Bedford i B.A.Taylor, *Fine topology, Silov boundary and $(dd^c)^n$,* J. Funct. Anal. **72** (1987) no. 2, 225-251.

[BT5] E.Bedford i B.A.Taylor, *Uniqueness for the complex Monge-Ampère equation for functions of logarithmic growth,* Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 455-469.

[Ca] E.Calabi, On Kähler manifolds with vanishing canonical class. Symposium in honour of S. Lefschetz, pp. 78-89. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1957).

[Cao] H.D.Cao, *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds,* Invent. Math. **81** (1985), 359-372.

[CasN] P.Cascini i G.LaNave, *Kähler-Ricci flow and the Minimal model program for projective varieties,* Preprint, arXiv: math/0603064.

[Ce1] U.Cegrell, *Discontinuité de l'opérateur de Monge-Ampère complexe,* C. R. Acad. Sci. Paris, **296** (1983), 869-871.

[Ce2] U.Cegrell, *Pluricomplex energy,* Acta Math. **180** (1998), 187-217.

[Ce3] U.Cegrell, *The general definition of the complex Monge-Ampère operator,* Ann. Inst. Fourier, **54**, 1 (2004), 159-179.

[CeK1] U.Cegrell i S.Kołodziej, *The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator: Perron classes and rotation invariant measures,* Michigan Math. J. **41** (1994), 563-569.

[CeK2] U.Cegrell i S.Kołodziej, *Equation of complex Monge-Ampère type and stability of solutions,* Math. Ann. **334** (2006), 713-729.

[ChT1] X.X.Chen i G.Tian, *Ricci flow on Kähler-Einstein surfaces,* Invent. Math. **147** (2002), 487-544.

[ChT2] X.X.Chen i G.Tian, *Ricci flow on Kähler-Einstein manifolds,* Duke Math. J. **131** (2006), 17-73.
[CoGZ] D.Coman, V.Guedj i A. Zeriahi, *Domains of definition of Monge-Ampère operators on compact Kähler manifolds,* Math. Zeit. **259** (2) (2008), 393-418.
[De1] J.-P.Demailly, *Mesures de Monge-Ampère et caracterisation géométrique des variétés algébriques affines,* Mém. Soc. Math. France **19** (1985) 1-125.
[De2] J.-P.Demailly, *Regularization of closed positive currents and intersection theory,* J. Alg. Geom. **1** (1992), 361-409.
[De3] J.-P.Demailly, *Complex analytic and differential geometry,* książka internetowa dostępna na stronie internetowej autora http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/.
[DP] J-P.Demailly i N.Pali, *Degenerate complex Monge-Ampère equations over compact Kähler manifolds,* Preprint. ArXiv 0710.5109.
[Di1] S.Dinew, *Cegrell classes on compact Kähler manifolds,* Ann. Polon. Math. **91** 2-3 (2007), 179-195.
[Di2] S.Dinew, *An inequality for mixed Monge-Ampère measures,* Math. Zeit. **262** (2009), 1-15.
[Di3] S.Dinew, *Uniqueness in $\mathcal{E}(X,\omega)$,* J. Funct. Anal. **256** (2009), 2113-2122.
[Di4] S.Dinew, *On Positive $\mathbb{C}_{(2,2)}(\mathbb{C}^n)$ Forms,* preprint, (nieopublikowany).
[DZ] S.Dinew, Z.Zhang, *Stability of Bounded Solutions for Degenerate Complex Monge-Ampère Equations,* Preprint arXiv:0711.3643.
[DNS] T.C.Dinh, V.A.Nguyen and N.Sibony, *Exponential estimates for plurisubharmonic functions and stochastic dynamics,* Preprint, arXiv:0801.1983.
[EGZ] P.Eyssidieux, V.Guedj i A.Zeriahi, *Singular Kähler-Einstein metrics,* Journal AMS, w druku.
[FN] J.E.Fornaess i R.Narasimhan, *The Levi problem on complex spaces with singularities,* Math. Ann. **248** (1980), no. 1, 47–72.
[Ga] L Garding, *An inequality for hyperbolic polynomials,* J. Math. Mech. **8** (1959), 957-965.
[GH] P.Griffiths i A.Harris, *Principles of algebraic geometry,* Hohn Wiley and Sons, New York, (1978).
[GZ1] V.Guedj i A.Zeriahi, *Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds,* J. Geom. Anal. **15** (2005), no.4, 607-639.
[GZ2] V.Guedj i A.Zeriahi, *The weighted Monge-Ampère energy of quasiplurisubharmonic functions,* J. Funct. Anal. **250** (2007), 442-482.
[HaKH] L.M.Hai, N.V.Khue i P.H.Hiep, *ω-pluripolar sets and subextension of ω-plurisubharmonic functions on compact Kähler manifolds,* Ann. Polon. Math. **91** (2007), 25-41.
[HaK] R.Harvey i R.Knapp, *Postive (p,p)-forms, Wirtinger's inequality and currents,* Value Distribution Theory, Part A, Dekker, (1974), 43-62.
[Hi] P.H.Hiep, *On the convergence in capacity on compact Kähler manifolds and its applications,* Proc. AMS **136** (2008), 2007-2018.
[HJ] R.A.Horn i C.R.Johnson, *Matrix analysis,* Cambridge Univ. Press, (1985).
[Ho] L. Hörmander, *Notions of convexity,* Birkhäuser, (1994).
[KH] N.V.Khue i P.H.Hiep, *Some properties of the complex Monge-Ampère operator in Cegrell's classes and applications,* Trans AMS, w druku.
[Ki1] C.O.Kiselman, *Sur la definition de l'operatour de Monge - Ampère complexe,* Proc. Analyse Complexe, Toulouse (1983), Lecture Notes in Math., vol. 1094, Springer- Verlag, Berlin-Heidelberg- New- York, pp. 139- 150.
[Ki2] C.O.Kiselman, *Plurisubharmonic functions and potential theory in several complex variables,* Development of mathematics 1950-2000, J-P. Pier editor, Birkhäuser, (2000).
[Kli] M.Klimek, *Pluripotential theory,* Clarendon Press, (1991).
[K1] S.Kołodziej, *The range of the complex Monge-Ampère operator,* Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 1321-1338.
[K2] S.Kołodziej, *The complex Monge-Ampère equation,* Acta Math. **180** (1998), 69-117.
[K3] S.Kołodziej, *The Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds,* Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), no 3, 667-686.
[K4] S.Kołodziej, *The complex Monge-Ampère equation and pluripotential theory,* Memoirs of AMS 178/840 (2005), 1-64.
[K5] S.Kołodziej, *Hölder continuity of solutions to the complex Monge-Ampere equation with the right hand side in L^p,* Math. Ann. **342** (2008), 379-386.
[KW] H.Kozono i H.Wadade, *Remarks on Gagliardo-Nirenberg type inequality with critical Sobolev space and BMO,* Math. Zeit. **259** (2008), 935-950.

[La] R.Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry I,* A Series of Modern Surveys in Mathematics **48** Springer-Verlag, Berlin, (2004).

[LG] P.Lelong i L.Gruman, *Entire functions of several complex variables,* Springer-Verlag (1985).

[R1] A.Rashkovskii, *Newton numbers and residual measures of plurisubharmonic functions,* Ann. Polon. Math. **75** (2000), 213-231.

[R2] A.Rashkovskii, *Lelong numbers with respect to regular plurisubharmonic weights,* Results Math. **39** (2001) 320-332.

[S1] J.Siciak, *On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables,* Trans. AMS **105** (1962), 322-357.

[S2] J.Siciak, *Extremal plurisubharmonic functions in* $\mathbb{C}^n$*,* Ann. Polon. Math. **39** (1981), 175-211.

[Si1] Y.-T.Siu, *Lectures on Hermitian-Einstein Metrics for Stable Bundles and Kähler-Einstein mertics,* Birkhäuser Verlag, Basel, (1987).

[Si2] Y.-T.Siu, *Calculus inequalities derived from holomorphic Morse inequalities,* Math. Ann. **286** (1990), 549-558.

[ST1] J.Song i G.Tian, *Kähler-Ricci flow on surfaces of positive Kodaira dimension,* Invent. Math. **170** (2007), 609-653.

[ST2] J.Song i G.Tian, *Canonical measures and the Kähler-Ricci flow,* Preprint, arXiv:0802.2570.

[T] G.Tian, *Canonical metrics in Kähler geometry,* Birkhäuser (2000).

[TZ] G.Tian i Z.Zhang, *On the Kähler-Ricci flow on projective manifolds of general type,* Chinese Ann. of Math. (B), **27** (2006), 179-192.

[TZh] G.Tian i X.Zhu, *Convergence of Kähler-Ricci flow,* Journal AMS, **20** (2007), 675-699.

[To] V.Tosatti, Limits of Calabi-Yau metrics when the Kähler class degenerates, J.European Math. Soc. w druku.

[Ts] H.Tsuji, *Existence and degeneration of Kähler-Einstein metrics on minimal algebraic varieties of general type,* Math. Ann. **281** (1988), 123-133.

[W1] J.Wiklund, *Matrix inequalities and the complex Monge-Ampère operator,* Ann. Polon. Math. **83** (2004) 211-220.

[W2] J.Wiklund, *Pluricomplex charge at weak singularities,* preprint arXiv:math/0510671.

[X] Y.Xing, *Continuity of the complex Monge-Ampère operator,* Proc. AMS 124 (1996) 457-467.

[Y] S.T.Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation,* Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), (3), 339-411.

[Za] V.Zahariuta, *Transfinite diameter, Cebysev constants and capacity for a compactum in* $\mathbb{C}^n$*,* (w języku rosyjskim) Math. USSR Sb. (N.S.) **138** (1975), 374-389.

[Z] Z.Zhang, *On Degenerate Monge-Ampere Equations over Closed Kähler Manifolds,* Int. Math. Res. Not. (2006), 1-18.