Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki

Jacek Dymel

Analiza trudności zadań Olimpiady Matematycznej

Rozprawa doktorska

Promotor: dr hab. Michał Szurek

Kraków 2009

Spis treści

Wstęp. **3**

1 Problematyka pracy (szersze tło) **6**
1.1 Zagadnienia związane z rozwiązywaniem zadań 6
1.1.1 Klasyfikacja zadań 6
1.1.2 Proces rozwiązywania zadań 8
1.1.3 Sposoby rozwiązywania zadań. Strategie 10
1.1.4 Błędy 14
1.1.5 Matematycy i rozwiązywanie problemów 18
1.1.6 Badania na temat procesu rozwiązywania zadań olimpijskich 22
1.1.7 Cele i organizacja Olimpiady Matematycznej 23
1.1.8 Narzędzia statystyczne 25
1.2 Metodologia badań prezentowanych w pracy 32
1.2.1 Dobór materiału 32
1.2.2 Charakterystyka autorów badanych prac 35
1.2.3 Metody analizy zebranego materiału 35
1.2.4 Oznaczenia wykorzystane w tabelach 39

2 Analiza rozwiązań zadań na dowodzenie nierówności **40**
2.1 Zadanie 3 z II etapu 57 OM 40
2.1.1 Treść i rozwiązania zadania 40
2.1.2 Losy uczniów, którzy rozwiązali zadanie nietypowo 50
2.1.3 Przykłady błędów 54
2.1.4 Rozwiązania, które zawierały błędy 63
2.2 Zadanie 6 z II etapu 58 OM 70
2.2.1 Treść i rozwiązania zadania 70
2.2.2 Losy uczniów,którzy rozwiązali zadanie 73
2.2.3 Rozwiązania, które zawierały błędy 74
2.3 Zadanie 6 z III etapu 58 OM 82
2.3.1 Treść i rozwiązania zadania 82
2.4 Twierdzenia wykorzystane w rozwiązaniach zadań na dowodzenie nierówności . 85
2.4.1 Twierdzenia wykorzystane do dowodu zadania 3.2.57 90
2.4.2 Twierdzenia wykorzystane do dowodu zadania 6.2.58 96
2.4.3 Twierdzenia wykorzystane do dowodu zadania 6.3.58 99

3 Analiza rozwiązań zadań planimetrycznych **101**
3.1 Zadanie 2 z II etapu 57 OM 101
3.1.1 Treść i rozwiązania zadania 101
3.1.2 Rozwiązania, które zawierały błędy 117
3.1.3 Statystyka błędów 133
3.2 Zadanie 5 z II etapu 57 OM 138
3.2.1 Treść i rozwiązania zadania 138
3.2.2 Rozwiązania, które zawierały błędy 160
3.2.3 Statystyka błędów 175
3.3 Zadanie 3 z III etapu 57 OM 181
3.3.1 Treść i rozwiązania zadania 181
3.3.2 Rozwiązania, które zawierały błędy 189
3.4 Zadanie 5 z II etapu 58 OM 195
3.4.1 Treść i rozwiązania zadania 195
3.4.2 Rozwiązania, które zawierały błędy 199

3.4.3 Statystyka błędów . . . 205
3.5 Zadanie 1 z III etapu 58 OM . . . 210
3.5.1 Treść zadania i rozwiązania . . . 210
3.5.2 Rozwiązania, które zawierały błędy . . . 213
3.6 Twierdzenia wykorzystywane w rozwiązaniach zadań geometrycznych . . . 215
3.6.1 Stosowane twierdzenia . . . 215
3.6.2 Literatura do nauki geometrii płaskiej . . . 217
3.6.3 Twierdzenia wykorzystane do rozwiązywania zadań geometrii płaskiej . 217
3.6.4 Kanon metod i twierdzeń geometrii płaskiej . . . 218

4 Analiza rozwiązań zadań stereometrycznych 220
4.1 Zadanie 5 z III etapu 57 OM . . . 220
4.1.1 Treść i rozwiązania zadania . . . 220
4.1.2 Rozwiązania, które zawierały błędy . . . 223
4.2 Zadanie 5 z III etapu 58 OM . . . 226
4.2.1 Treść i rozwiązania zadania . . . 226
4.2.2 Rozwiązania, które zawierały błędy . . . 228

5 Analiza statystyczna 233
5.1 Informacje statystyczne o zadaniach z II i III etapu 57 OM . . . 233
5.2 Informacje statystyczne o zadaniach z II i III etapu 58 OM . . . 250
5.3 Analiza trudności zadań . . . 267
5.4 Klasyfikacja zadań w OM . . . 270
5.4.1 Zadania na dowodzenie nierówności . . . 270
5.4.2 Zadania z geometrii płaskiej . . . 272
5.4.3 Zadania z geometrii przestrzennej . . . 273
5.5 Analiza statystyczna szkół w OM . . . 274
5.6 Literatura . . . 295
5.7 Sformułowania zadań . . . 297
5.8 Galeria cytatu . . . 299

6 Synteza badań 301
6.1 Zadania na dowodzenie nierówności . . . 301
6.2 Zadania z geometrii płaskiej . . . 305
6.3 Zadania z geometrii przestrzennej . . . 310
6.4 Strategie rozwiązywania zadań . . . 312
6.5 Błędy w analizowanych zadaniach . . . 314
6.6 Propozycje zmian . . . 318
6.6.1 Alternatywna olimpiada . . . 318
6.6.2 Rozwiązania eleganckie . . . 321
6.7 Rola wiodących szkół w Olimpiadzie Matematycznej . . . 327
6.8 Dane statystyczne dla zadań 57 i 58 OM . . . 330
6.9 Propozycja materiału dla nauczycieli . . . 334
6.9.1 Stosowanie wzorów skróconego mnożenia w zadaniach olimpijskich . . . 335

7 Wnioski 344

Wstęp

W swojej sześćdziesięcioletniej historii Olimpiada Matematyczna nie doczekała się gruntownej analizy merytorycznej i dydaktycznej. W niniejszej rozprawie podejmuję taki trud, ze świadomością, że pełna analiza zagadnienia wymaga pracy sztabu ludzi i monitorowania sytuacji na bieżąco. O ile bowiem pewne dane statystyczne dotyczące uczestników (wiek, klasa, szkoła, miejsce w rankingu) są dostępne, o tyle same prace zawodników są po pewnym czasie niszczone i nie były one do tej pory analizowane zbiorczo w szerokim zakresie. Analiza taka jest zaś podstawowym źródłem wniosków, do jakich dochodzę.

W polskiej dydaktyce takich badań praktycznie nie było. Badania Ireneusza Białeckiego ([14]) miały charakter socjologiczny i dotyczyły uczestników 22 OM, a prace Marianny Ciosek ([29], [33]) dotyczyły opisu procesu rozwiązywania wybranych czterech zadań (1.3.16, 3.3.19, 1.3.20, 2.3.20 [1]) wyselekcjonowanej grupy uczestników III etapów 16, 19 oraz 20 OM i nie zawierały analizy statystycznej. Poza tym od tamtych czasów znacząco wzrosła trudność zadań na OM. Pewien impuls do badań dała praca J.F.Szurka *Przyczyny niepowodzeń uczniów klas jedenastych w rozwiązywaniu zadań matematycznych* ([130]).

Badania swoje oparłem na analizie rozwiązań dziesięciu zadań 57 i 58 OM, wybranych według klucza: 1) zadania o nierównościach (3 zadania), 2) zadania z geometrii płaskiej (5 zadań), 3) zadania z geometrii przestrzennej (2 zadania). Liczba badanych prac uczniów wynosiła 3421, z czego 1462 to prace puste tzn. takie, w których autor nie zostawił śladów w czystopisie. Każda praca była analizowana pod kątem stosowanych strategii i popełnianych przez uczniów błędów. Wyniki, jakie uzyskali uczniowie w drugim i trzecim etapie 57 i 58 OM zostały poddane także dokładnej analizie statystycznej z uwzględnieniem technik pomiaru dydaktycznego.
Nie analizowałem prac uczniów z I etapu. Były ku temu trzy zasadnicze powody. Po pierwsze: bardzo ograniczony dostęp do prac. Po drugie: konieczność skoncentrowania się na ważniejszych badaniach. Po trzecie i być może najważniejsze: specyfika zawodów I stopnia, w czasie których uczniowie rozwiązują w domu 12 zadań w przeciągu kilkunastu tygodni. Uczniowie mogą zatem w sposób nieograniczony korzystać z literatury oraz pomocy nauczycieli i kolegów. W regulaminie Olimpiady Matematycznej jest co prawda zapis o samodzielności rozwiązania, ale weryfikacja samodzielności może następować jedynie w oparciu o sposób zapisu rozwiązania.

Wybór zadań do analizy nie był przypadkowy.
Wśród uczniów panuje opinia, że zadania geometryczne na Olimpiadzie Matematycznej są trudne, gdyż nie poddają się łatwo sprowadzeniu rozwiązania do zastosowania *tricków* olimpijskich. Stąd w rozwiązaniach uczniowskich tych zadań, można znaleźć interesujące sposoby podejścia uczniów do zagadnień matematycznych, a na ich podstawie opisać proces rozwiązywania zadań. Bardzo ważną przyczyną zajęcia się zadaniami geometrycznymi było silne przekonanie, że geometria odgrywała i odgrywa bardzo istotną rolę w kształceniu wyobraźni i intuicji uczniów.
Z kolei zadania o nierównościach są stałym i ważnym składnikiem zestawów olimpijskich. Impulsem do badania rozwiązań zadań tego typu, było pojawienie wśród uczestników OM pewnej mody na nierówności, która związana była z wydaniem szeregu pozycji książkowych o tej tematyce.

Profesor Andrzej Schinzel, laureat drugiej OM, wyraził opinię, że *start w olimpiadzie do-*

[1] Przyjąłem następujący sposób notacji zadań: pierwsza cyfra oznacza numer zadania, druga - numer etapu, a liczba dwucyfrowa - numer Olimpiady Matematycznej.

brze przygotowuje do pewnego typu pracy naukowej, uczy bowiem stawiania i rozwiązywania zagadnień (poprzez trening w rozwiązywaniu zadań olimpijskich), jednakże selekcja olimpijska pomija inny typ uzdolnień, potrzebny w pracy naukowej, ważny również i w matematyce - umiejętność tworzenia teorii ([14], 1975).
Mówiąc nieco górnolotnie, analizując zadania z Olimpiad Matematycznych starałem się *zobaczyć* obraz matematyki, jaki chcemy przekazywać naszym najzdolniejszym uczniom. Trzeba pamiętać, że są oni w wieku, gdy chłonie się świat, nabywa wartości, gdy wykształcają się postawy na całe życie. Obraz matematyki, jaki zobaczą uczniowie, będzie determinował ich działania i odniesienia związane z matematyką.

Ważną częścią pracy było rozpoznanie strategii rozwiązywania zadania (wyboru właściwych strategii ze względu na prostotę, poprawność, skuteczność oraz powiązanie strategii z istotnymi problemami w jej realizacji). W trakcie badań obserwowałem związki między wyborem strategii rozwiązywania zadania i treningiem olimpijskim, jakiemu został poddany uczeń. Poddałem analizie także związki między stosowanymi metodami rozwiązywania zadań, znajomością literatury *olimpijskiej* i miejscem nauki. Wiadomo, że dostrzegalna jest wyraźna dominacja (gdy chodzi o liczbę uczestników II i III etapu Olimpiady Matematycznej) uczniów *stajni olimpijskich*, czyli szkół, w których kładzie się większy nacisk na kształcenie uczestników olimpiad (o czym świadczy między innymi program nauczania matematyki oraz bogata oferta dodatkowych zajęć).
Już w 1975 roku Ireneusz Białecki w pracy ([14]) pisał:
Wśród laureatów bardzo wielu kończyło renomowane szkoły, znane z dobrych nauczycieli, wychowawców wielu zwycięzców i wyróżnionych. Fakt ten, tylko częściowo można wyjaśniać tym, że do lepszych szkół przyjmowani są uczniowie zdolniejsi. Wskazuje on również na duże znaczenie poziomu szkoły, a co za tym idzie sposobu przygotowania do startu w olimpiadzie. (...) Mówi się nawet o pojawieniu się wśród startujących specjalnej kategorii „profesjonalistów", którzy przez długi czas trenują rozwiązywanie zadań, korzystając z wydawanego corocznie zbioru zadań olimpijskich.

Badałem także błędy, jakie popełniali uczniowie oraz przyczyny powstawania tych błędów. W związku z tym, że zadania OM nie są typowymi zadaniami szkolnymi, a uczestnicy OM - typowymi uczniami, pojawiła się potrzeba stworzenia nowej typologii błędów, bardziej użytecznej do opisu błędów uczestników OM niż tradycyjne typologie.
W swojej pracy analizowałem także trudności, które prowadziły do błędów. Rozpoznanie przyczyn błędów prowadzi do próby wskazania metod ich poprawienia oraz wskazania sposobów unikania określonych błędów w przyszłości. Chodzi tu zarówno o pomoc skierowaną do uczniów, jak i do nauczycieli, pracujących z młodzieżą uzdolnioną oraz osób układających i oceniających zadania OM. Szereg błędów, jakie pojawiały się w rozwiązaniach uczniów startujących w OM, mógł być spowodowany niewłaściwym podejściem nauczycieli do pracy z uczniem zdolnym. Wyrażam nadzieję, że moje spostrzeżenia pozwolą na opracowanie systemowych rozwiązań, których w tej chwili nie ma - każdy nauczyciel pracujący z uczniami uzdolnionymi opiera się głównie na swojej intuicji i własnych doświadczeniach.

Stąd wynikał inny, ważny cel pracy: stworzenie pewnego rodzaju materiału źródłowego dla nauczycieli. Przeczytałem starannie 1959 prac uczniowskich i opisałem – ze stosownymi komentarzami – wszystkie sposoby, jakimi uczniowie atakowali poszczególne zadania. Wyciągnąłem z tego konkretne wnioski dydaktyczne. Realizacja tego celu wpłynęła na znaczną objętość pracy. Jednak bez tego owe cenne pomysły uczniowskie uległyby zapomnieniu. Można też zrozumieć, co miałem na myśli pisząc w pierwszych zdaniach wstępu, że monitorowanie OM na bieżąco wymagałoby pracy całego sztabu ludzi.

Moja praca jest matematyczna i dotyczy matematyki. Nie zajmowałem się bardzo interesującym socjologicznie zagadnieniem późniejszych losów olimpijczyków oraz wpływu sukcesów olimpijskich na dokonania naukowe. Warto wspomnieć, że taką analizę na temat uczestników pierwszych 22 olimpiad przeprowadził Ireneusz Białecki w pracy *Funkcjonowanie olimpiad matematycznych* ([14]). Z kolei Andrzej Schinzel ([113]) opisał ogólnie tę kwestię w odniesieniu do pierwszych 50 edycji OM.

Spora objętość niniejszej rozprawy spowodowana została w znacznej części chęcią zachowania drobiazgowej analizy wszystkich rozumowań uczniów w kolejnych zadaniach. Temu poświęcone są rozdziały 2, 3 i 4 pracy (około 300 stron). Otrzymane stąd dane są analizowane w dalszej części pracy (rozdziały 5, 6 i 7). W pierwszej kolejności można czytać rozdziay 1, 6 i 7, gdyż pozostałe fragmenty stanowią uzupełnienie. Taki układ pracy został przyjęty przeze mnie świadomie.

W rozdziale 1 znajduje się opis problematyki, z jaką związana jest praca oraz metodologii przeprowadzonych badań. W rozdziale 2 zaprezentowana została analiza rozwiązań zadań na dowodzenie nierówności. W rozdziale 3 znajduje się analiza rozwiązań zadań planimetrycznych, a w rozdziale 4 - zadań stereometrycznych. W rozdziale 5 przedstawiam wyniki analiz statystycznych dotyczących zadań z II i III etapów 57 i 58 OM, analizę trudności zadań od 52 do 58 OM, analizę rodzajów zadań w całej historii OM oraz, szczególnie istotny, opis statystyczny uczestników OM z uwzględnieniem szkół, w których się uczyli. W rozdziale 6 przedstawiam syntezę badań oraz propozycje zmian w edukacji olimpijczyków. Rozdział 7 opisuje wnioski z moich badań.

Wyrażam nadzieję, że wykonane przeze mnie badania i sformułowane wnioski pozwolą udoskonalić funkcjonowanie Olimpiady Matematycznej, a także znacząco poprawić system pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie.

Chciałbym wyrazić gorące podziękowania promotorowi pracy, profesorowi Michałowi Szurkowi, za wszechstronną opiekę, cenne wskazówki oraz inspirację do podjęcia niniejszych badań.

Pragnę także podziękować:
panu dr. Krzysztofowi Ciesielskiemu za pomysł pisania doktoratu i wielką pomoc w realizacji tego pomysłu,
Danucie Ciesielskiej, Michałowi Niedźwiedziowi, Ani i Bartkowi Krężołkom oraz Ewie Wierdak za wielkie wsparcie, dzięki któremu możliwe było napisanie tej pracy.

1 Problematyka pracy (szersze tło)

1.1 Zagadnienia związane z rozwiązywaniem zadań

Podstawową czynnością dydaktyczną na zajęciach matematycznych zarówno w szkole podstawowej, gimnazjum, liceum, jak i w trakcie studiów wyższych, jest rozwiązywanie zadań. Każdy uczeń i student musi nauczyć się sposobów i metod rozwiązywania zadań, gdyż jest to niezbędne do pogłębiania wiedzy, która sprawdzana jest w czasie kartkówek, sprawdzianów, kolokwiów czy konkursów i olimpiad. Odpowiedź na pytanie *jak rozwiązać?* jest fundamentem sprawnego poruszania się po materii matematycznej. Istotne jest przy tym, jaką strategię przyjąć, aby poprawnie i efektywnie rozwiązać zadanie, jakie trudności można napotkać oraz jakie błędy są popełniane w trakcie poszukiwania rozwiązania.
Wiedzy na te tematy dostarczają badania psychologiczne, refleksje matematyków i adeptów wiedzy matematycznej oraz badania dydaktyczne.

Specyficznym polem do obserwacji jest Olimpiada Matematyczna. Uczestnikami OM są uczniowie o sprecyzowanych zainteresowaniach i uzdolnieniach, którzy jeszcze nie mogą być traktowani jako w pełni ukształtowani matematycy, z charakterystycznym aparatem pojęciowym, wiedzą i umiejętnościami. Ale ponieważ są to uczniowie, których potencjał intelektualny znacznie przekracza średnią populacji, obserwacja ich poczynań w trakcie rozwiązywania zadań jest szczególnie interesująca. Aby zbadać dokładnie, jak przebiega twórcze rozwiązywanie zadań i problemów potrzebne jest spojrzenie na to zagadnienie na różnych poziomach doświadczenia matematycznego, dokonanie analizy i porównanie różnych indywidualnych postaw i strategii.

1.1.1 Klasyfikacja zadań

W literaturze dydaktycznej można spotkać wiele prób opisania pojęć: zadanie matematyczne, problem matematyczny. Jednakże trudno dopatrzeć się w tych określeniach precyzyjnych definicji. Zwłaszcza, że psychologowie i dydaktycy w wielu sytuacjach stosują te pojęcia wymiennie.
Wielu matematyków jednakże używa tych pojęć w następujących znaczeniach: zadanie matematyczne, to zagadnienie, które zostało już rozwiązane i jest przedstawiane przez osoby znające rozwiązanie. Problem matematyczny to zagadnienie, któremu w danej chwili nie umiemy przypisać rozwiązania.
Poniżej przyglądam się różnym klasyfikacjom zadań, aby wyróżnić cechy charakterystyczne zadań olimpijskich.

W polskiej literaturze tematu jednym z pierwszych badaczy, który spojrzał ogólniej na interesujące nas zagadnienie, był Józef Kozielecki. W swojej pracy *Zagadnienia psychologii myślenia* ([70]) zaproponował podział problemów na proste i złożone. Podział ten dotyczył nie tylko zadań matematycznych, ale także wszystkich zadań, które człowiek spotyka w swojej działalności.
Proste problemy to te, w których człowiek ma wytworzyć albo hipotezy, albo metody. Złożone zadania charakteryzują się tym, że należy wytworzyć zarówno hipotezy jak i metody ich weryfikacji.
Problemy złożone dzieli Kozielecki z kolei na:

1. problemy otwarto-otwarte (nie jest znana ani hipoteza, ani metoda);
2. problemy otwarto-zamknięte (nieznana jest hipoteza a metodę należy dobrać z repertuaru znanych metod);

3. problemy zamknięto-otwarte (znana jest hipoteza, ale nieznana jest metoda weryfikacji);

4. problemy zamknięto-zamknięte (znane są hipotezy i metody ich weryfikacji).

Ten klasyczny, prosty i atrakcyjnie wyglądający schemat ma tylko relatywne odniesienie do zadań OM. Wśród zadań OM da się znaleźć problemy należące do każdego z tych typów, ale – i to jest ważne – dla jednego ucznia problem może być zamknięto-otwarty, dla innego zamknięto-zamknięty. Zadanie o nierównościach są zamknięto-zamknięte dla uczniów pewnych szkół w kraju, a zamknięto-otwarte dla większości zawodników. Rzadko występujące w OM problemy otwarte należą – w klasyfikacji Kozieleckiego – do problemów otwarto-zamkniętych. Wśród analizowanych przez mnie zadań występują tylko zadania zamknięto-otwarte (np. 3.3.57, 5.3.58) i zamknięto-zamknięte (np. 3.2.57, 5.2.58).

Zofia Krygowska w pracy *Zarys dydaktyki matematyki* ([72]) omawia tradycyjną klasyfikację zadań matematycznych:

1. zadanie rachunkowe (z charakterystycznymi poleceniami: oblicz, rozwiąż);

2. zadania na dowodzenie (z poleceniami: udowodnij, wykaż);

3. zadania konstrukcyjne (polecenie: skonstruuj).

Inny, tradycyjny podział, to wyróżnienie ze względu na dział matematyki (zadania arytmetyczne, algebraiczne, geometryczne). Ten podział nie jest oczywiście sztywny, gdyż rozwiązanie np. zadania geometrycznego może opierać się na rachunku algebraicznym; można jednakże przypisywać kategorię zależną od treści zadania, a nie od metody rozwiązania.
Zofia Krygowska ([72]) podaje także podział następujący:

1. zadanie - ćwiczenie – to zadanie na zastosowanie odpowiedniego wzoru, nie wymagające żadnego aktu twórczego;

2. zadanie - zwykłe zastosowanie teorii – to zadanie nie wymagające szczególnej pomysłowości, w którym kolejne czynności nasuwają się w sposób naturalny; uczeń zna w takiej sytuacji aparat matematyczny niezbędny do rozwiązania zadania;

3. zadanie - problem – to zadanie wymagające aktu twórczego, w którym metoda rozwiązania nie narzuca się w sposób naturalny i uczeń musi ją odkryć sam.

W tym ujęciu wszystkie zadania olimpijskie należą do kategorii 3). Przy pewnej dozie tolerancji zadania w starszych olimpiadach dziś można by zakwalifikować do typu 2). Takim zadaniem jest zadanie 1 z pierwszej OM (treść w rozdziale 1.2.1).

Z kolei George Polya ([105]) dzieli zadania na dwa typy:

1. zadania typu *znaleźć* (odpowiadające w klasyfikacji Kozieleckiego zadaniom otwarto-otwartym i otwarto-zamkniętym),

2. zadania typu *udowodnić* (odpowiadające w klasyfikacji Kozieleckiego zadaniom zamknięto-otwartym i zamknięto-zamkniętym).

Celem zadań typu *znaleźć* jest znalezienie pewnego obiektu, niewiadomej zadania. Zaś celem zadania typu *udowodnić* jest wykazanie w sposób niezawodny, że pewne twierdzenie jest prawdziwe.
Źródeł takiego podziału zadań można doszukiwać się w podziale twierdzeń, jakie występowały w *Elementach* Euklidesa: twierdzenia typu *problema*, które stawiają sobie za cel konstrukcję pewnego obiektu oraz twierdzenia typu *theorema*, w których należy ustalić pewne fakty przez

podanie ich dowodów. Terence Tao w książce *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective* ([137]) konstatuje, że zadania typu *znaleźć* są trudniejsze do rozwiązywania niż zadania typu *udowodnić*.

Nieco inne podejście zaprezentował Łukasz Pruski w artykule *O metodzie nauczania rozwiązywania zadań matematycznych* ([110]). Podaje on tam taką klasyfikację zadań:

1. zadania typowe - zadania standardowe, polegające na zastosowaniu schematu postępowania;
2. zadania z niespodzianką - zadania typowe, w których do uzyskania właściwego rozwiązania jest potrzebna pewna modyfikacja sposobu rozwiązania;
3. zadania trudne - zadania skomplikowane obliczeniowo, wymagające posługiwania się formalizmami czy wyobrażeniami przestrzennymi, których rozwiązania nie wymagają dokonywania odkryć;
4. zadania złożone - zadania, które w trakcie rozwiązywania dekomponują się na kilka zadań składowych;
5. zadania o charakterze subiektywnie twórczym - zadania, których rozwiązywanie z punktu widzenia pewnego ucznia, reprezentującego określony poziom umiejętności i wiedzy, ma charakter twórczy;
6. zadania absolutnie nietypowe - zadania o charakterze twórczym, których *przykładem, w zakresie szkoły średniej, może być większość zadań z Olimpiad Matematycznych;* są to zadania, w których *uczeń, aby je wykonać, musi wytworzyć (wymyślić, odkryć) metodę rozwiązania lub co najmniej pewien jej składnik.*

1.1.2 Proces rozwiązywania zadań

W swojej książce *Teorja dowodu* (1925) Jan Śleszyński pisał:

Obraz nauki powstającej jest całkiem inny niż nauki gotowej. Tworzenie bowiem nowych rzeczy nie odbywa się podług żadnych z góry określonych reguł i prawideł. Ars inventiva, tj. umiejętność tworzenia, jako nauka, wcale nie istnieje. Tworzy się więc przypadkowo i dorywczo, głównie za sprawą intuicji i fantazji. Główną metodą badania jest tutaj indukcja, mianowicie nie indukcja matematyczna, ale zwyczajna przyrodnicza indukcja, zwana także indukcją niezupełną.

Przez blisko 85 lat, jakie upłynęły od pierwszego wydania *Teorji dowodu*, nauki kognitywne rozwinęły się bardzo bujnie. W interesującym nas aspekcie jedną z fundamentalnych prac jest opublikowana w 1955 roku książka Woodwortha i Schlosberga [140]. Prawdopodobnie oni pierwsi wyróżnili dwa typy badań eksperymentalnych procesu rozwiązywania zadań.
Pierwszy typ to badanie procesu, który zachodzi między podaniem problemu a jego rozwiązaniem, ale bez wprowadzania zmian przez obserwatora w trakcie obserwacji. Ten typ badań został zastosowany przeze mnie w odniesieniu do analizy procesu rozwiązywania zadań olimpijskich. O ile się dało, badaniu podlegała także ta część rozwiązania, jaką uczeń wykonał w brudnopisie – na podstawie brudnopisów trudno było czynić regularne obserwacje, gdyż częstokroć brudnopisy były niekompletne lub w dużym stopniu nieczytelne. Wobec tego analiza tylko części brudnopisów mogła spowodować wyciąganie fałszywych wniosków. Ponadto olimpijczycy są nastawieni na prezentację gotowego do oceny rozwiązania zadania. Znane są też przypadki uczniów, którzy prawie wcale nie korzystają z brudnopisów - poprawne rozwiązanie

zapisują od razu w czystopisie.

Drugi typ badań procesu rozwiązania zadania polega na wprowadzaniu przez eksperymentatora zmian w trakcie procesu rozwiązywania zadania i obserwacji wpływu na stosowane przez obserwowanego próby rozwiązania zadania.
W trakcie badania zbierane są materiały, które dzieli się na dwie grupy:

1. zarejestrowane w różnej formie próby rozwiązania;

2. zarejestrowane wypowiedzi rozwiązującego.

Przy analizie rozwiązań zadań olimpijskich mamy do czynienia wyłącznie z rejestracją pisemną. Dotyczy ona zarówno treści merytorycznych, jak i opisu własnych wrażeń. Uczniowie, niekiedy, w trakcie zapisu rozwiązania opisują swoje emocje, jakie towarzyszyły im na poszczególnych etapach rozwiązania, a także zapisują komentarze na temat jakości swojego rozwiązania (często w formie żartobliwej). Takie przykłady pokażę w dalszej części pracy.

Obserwacja procesu myślowego może przebiegać zatem z bezpośrednim udziałem obserwatora lub bez jego udziału. W przypadku obserwacji procesu występującego u ucznia rozwiązującego zadanie olimpijskie zastosowałem ten drugi typ. Powodów jest kilka. Przede wszystkim w czasie zawodów Olimpiady Matematycznej nie ma możliwości obserwacji bezpośrednich - uczniowie skupieni są na rozwiązywaniu problemu, a obserwacja zaburzałaby ten proces i zmieniała jego wynik. Rozmowa po zawodach nie da także pełnego i rzeczywistego obrazu sposobu myślenia, gdyż uczeń może mieć trudność z odtworzeniem wszystkich pomysłów na rozwiązania, zwłaszcza tych, które okazały się nieprzydatne czy wręcz błędne. Nie bez znaczenia będzie także kwestia podświadomego prezentowania swojej osoby w korzystniejszym świetle. Jest to jedna z wad metody bezpośredniej obserwacji.
Inną jest swoista interpretacja *zasady Heisenberga* z fizyki. Uczeń obserwowany modyfikuje swoje zachowania. Co prawda, zawodnicy biorący udział w OM mają świadomość, że ich rozwiązanie będzie oceniane, ale tylko na podstawie końcowego efektu ich pracy, a nie dróg rozwiązywania pełnych błędów, fałszywych tropów a czasami także braków wiedzy czy umiejętności.

Proces rozwiązywania zadań matematycznych badało i opisywało wielu dydaktyków i matematyków. W tym miejscu omówię kilka z takich badań.

W pracy [24] Mohan Chinnappan wskazuje, że poziom wiedzy geometrycznej wpływa znacząco na sposób myślenia w trakcie rozwiązywania zadań. Badania zostały przeprowadzone na grupie 30 uczniów z 10 klas matematycznych o innowacyjnych programach nauczania matematyki.

W pracy [35] autorzy Pedro Cobo i Josep M. Fortuny opisali wyniki badań dotyczących efektów współpracy przy rozwiązywaniu zadań między parami uczniów w wieku 16-17 lat i jej wpływu na heurystyczne umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych.

Podobne badania, dotyczące rozwiązywania zadań geometrycznych w grupach, prowadził Bjuland ([16]). Badaniami było objętych ponad stu uczniów i studentów kierunku nauczycielskiego.

Victor V. Cifarelli i Jinfa Cai ([27]) badali proces rozwiązywania zadań otwartych przez dwóch uczniów szkoły średniej.

W pracy [18] autorzy opisali badanie 15 uczniów i 15 uczennic z dobrymi ocenami z matematyki w wieku 11-12 lat w celu znalezienia różnic i podobieństw w procesie rozwiązywania zadań. Podstawową obserwacją było zauważenie, że dostrzegalne były nie różnice w sposobach rozwiązywania zadań, ale różnice w podejściu emocjonalnym do nich. Przed rozwiązaniem

chłopcy pokazywali więcej pewności siebie, więcej chęci i pozytywnych emocji niż dziewczęta. Ponadto w trakcie rozwiązywania zadania chłopcy podchodzili bardziej ambicjonalnie i traktowali zadanie jak wyzwanie.

Badania nad procesem rozwiązywania zadań matematycznych prowadzili także (więcej o nich w dalszej części pracy): Maria Luz Callejo ([22]), Marylin P. Carlson i Irene Bloom ([23]), Marianna Ciosek ([29], [33], [32]), A.H. Schoenfeld ([114]), Kazuhiko Nunokawa ([91], [92], [93]).

1.1.3 Sposoby rozwiązywania zadań. Strategie

Wielu psychologów i matematyków opisywało proces rozwiązywania zadań i wyróżniało jego charakterystyczne etapy.

A.H. Schoenfeld w pracy *Mathematical problem solving* ([118]) na podstawie swoich badań wyróżnił cztery kategorie, przy pomocy których można analizować zachowanie osoby rozwiązującej zadanie matematyczne:

1. wiedza pojęciowa i proceduralna jednostki, związana z daną sytuacją zadaniową (*resources*);
2. heurystyka - strategie heurystyczne i techniki, które jednostka stosuje w trakcie rozwiązywania niestandardowych zadań (*heuristic*);
3. samoregulacja (panowanie nad sytuacją) - ogół decyzji jednostki, odnoszących się do wyboru wiedzy i strategii, które można zastosować w danej sytuacji, planowanie czynności, sprawdzanie stopnia ich wykonania oraz poprawności otrzymanych wyników na każdym etapie rozwiązania zadania (*control*);
4. system przekonań i poglądów na temat matematyki w ogóle oraz na temat własnych możliwości w zakresie tego przedmiotu (*belief system*).

Do opisu tworzenia rozwiązania używa się w literaturze dydaktycznej terminu *strategia heurystyczna* lub *heurystyka*. George Polya w pracy *Jak to rozwiązać* ([105]) określa *heurystyki* jako *operacje umysłowe typowo użyteczne do rozwiązania problemów*. A.H. Schoenfeld w pracy *Mathematical problem solving* ([118]) opisuje *heurystyki* jako *ogólne techniki rozwiązywania problemów*, z kolei Andrzej Góralski ([51]) opisuje metodę heurystyczną jako *metodę sprzyjającą odkryciu*.

Józef Kozielecki w pracy *Strategia psychologiczna. Psychologiczna strategia rozwiązywania problemów* ([69]) podaje definicje strategii podawane przez psychologów:

1. strategia to ściśle określone następstwo operacji;
2. strategia to pewien systematyczny sposób rozwiązywania problemów;
3. strategia to układ decyzji w czasie dążenia do celu, który cechuje się pewną trwałością i uporządkowaniem;
4. strategia to pewien dokładny plan działania;
5. strategia to zespół reguł określających wybór przez człowieka ciągu czynności myślowych i zewnętrznych ([69], str. 23);
6. strategia to prawidłowość w podejmowaniu decyzji (J.S. Bruner, 1962).

Kozielecki w [70] wyróżnił dwa procesy zachodzące w trakcie rozwiązywania zadania: pierwszy nazwał generatorem pomysłów (wytwarzanie różnych pomysłów rozwiązania), drugi - ewaluatorem pomysłów (weryfikacja pomysłów).

Alan Schoenfeld w artykule *Jak nauczać twórczego rozwiązywania zadań* ([115]) opisał warunki na to, by pomyślnie rozwiązać zadanie przy użyciu metody heurystycznej. A mianowicie:

1. rozwiązujący musi mieć pojęcie o tym, co znaczy stosowanie danej metody;
2. rozwiązujący musi znać temat, aby metodę poprawnie stosować;
3. rozwiązującemu musi przyjść na myśl stosowanie danej metody.

W tym samym artykule Schoenfeld opisał główne metody heurystyczne, których można użyć w toku pracy nad nowym zadaniem:

1. analiza - nabranie wyczucia zadania i wymyślenie potencjalnych dróg podejścia do rozwiązania;
2. projektowanie - opracowanie zarysu rozwiązania;
3. badanie - weryfikacja problemów, które są powiązane z rozwiązywanym zadaniem;
4. wykonanie - zastosowanie rozwiązania, które jest wynikiem analizy, projektowania i badania;
5. sprawdzanie.

Widoczny jest wyraźny wpływ Polyi, który w pracy [105] opisuje cztery fazy pracy nad rozwiązaniem zadania:

1. zrozumienie zadania;
2. ułożenie planu;
3. wykonanie planu;
4. rzut oka wstecz, czyli sprawdzenie.

Olśnienie, czy też nagłe pojawienie się pomysłu powoduje, że pewne fazy pracy zostaną przeskoczone. W przypadku zadań OM taki pomysł jest częstym zjawiskiem. Jednakże opuszczenie pewnych faz (szczególnie fazy rozumienia zadania) może powodować błędy i luki w rozwiązaniu.

Andrzej Góralski w książce *Twórcze rozwiązywanie zadań* ([51]) podzielił procedurę rozwiązywania zadań na etapy:

1. analiza zadania;
2. planowanie metody rozwiązania;
3. poszukiwanie i ustalanie rozwiązań;
4. wybór rozwiązań zadania;
5. sprawdzenie rozwiązań;
6. refleksja nad rozwiązaniem.

Bardzo ważna (zwłaszcza w kontekście analizowanych prac olimpijczyków) jest obserwacja Masona ([83]), który wskazuje w procesie sprawdzania w myśleniu matematycznym trzy poziomy:

1. przekonać siebie (intuicja),
2. przekonać przyjaciela (wymaga argumentów, uporządkowania),
3. przekonać wroga (argumenty muszą być sprawdzone, aby przetrzymały atak krytyki).

Procesu rozwiązywania zadań nie można oczywiście ująć w sztywne ramy schematów postępowania. Uwaga ta dotyczy zwłaszcza zadań olimpijskich. Kluczowy dla rozwiązania zadania olimpijskiego wydaje się być pomysł, który Zofia Krygowska opisuje jako *decyzję zmiany interpretacji danych i przejście do innego modelu zadania*. Wiąże się to z sięgnięciem do innych obszarów wiedzy i doświadczenia niż te bezpośrednio związane z tematem zadania. Czasami przybiera to strukturę błądzenia przypadkowego, które jednak przynosi efekt w postaci spojrzenia na zadanie z różnych punktów widzenia. Może to uruchomić skojarzenia, które nasuną pomysł rozwiązania.

Polya opisuje także strategie heurystyczne, jakie wykorzystywane są do rozwiązywania zadań i problemów.

1. Strategia zadania podobnego (pokrewnego). Strategia sprowadzenia zadania do znanej metody, znanego twierdzenia. Problemem jest to, że uczniowie ze stajni olimpijskich, wyuczeni metod i twierdzeń, starają się sprowadzić każde zadanie do jednego *tricku*, który od razu „sam" rozwiązuje zadanie. Czasami trudno się dopatrzeć śladów pomysłów, za to wyraźnie widoczna jest inspiracja konkretną metodą (więcej na ten temat piszę w kolejnych rozdziałach).
2. Strategia rozwiązywania zadania bardziej ogólnego lub rozważania przypadku szczególnego. Strategia szczególnego przypadku u niektórych zawodników OM przyjmuje karykaturalną postać: rozważenie przypadku szczególnego zastępuje rozwiązanie ogólne.
3. Strategia: odgadywać i sprawdzać. Polya stwierdza, że ten typ strategii jest charakterystyczny dla metody naukowej ([104], str. 349), a sposób jej stosowania zbliża ucznia szkoły ponadgimnazjalnej do naukowca.

Zbigniew Michalewicz i David B. Fogel napisali książkę *How to Solve It: Modern Heuristic* ([85]), w której podejmują dyskusję z Polyą z punktu widzenia matematyka wchodzącego w XXI wiek i nowoczesnego podejścia heurystycznego do rozwiązywania problemów. W pracy tej zwracają także uwagę, że zadanie matematyczne powinno być rozpatrywane z punktu widzenia tego zadania, a nie pasującej do niego metody rozwiązania.

J. Linhart ([82]) wyodrębnił następujące sposoby rozwiązywania zadań:

1. rozwiązywanie metodą prób i błędów;
2. rozwiązywanie przez wgląd, czyli nagłą, poznawczą reorganizację sytuacji, czemu często towarzyszy pobudzenie emocjonalne;
3. rozwiązanie drogą analizy logicznej, przy planowym, ukierunkowanym na cel poszukiwaniu.

Ostatni z wymienionych sposobów opisywany jest także jako *strategia*.

Jakimi strategiami może posługiwać się olimpijczyk? Można wskazać następujące:

1. zakwalifikowanie zadania do pewnego typu i zastosowanie metod charakterystycznych dla danego typu,

2. sformułowanie pytań pomocniczych, podzielenie problemu na fragmenty, które łatwiej udowodnić,

3. przeformułownie problemu do postaci bardziej intuicyjnej, tak aby możliwe było uchwycenie idei rozwiązania (chodzi także o przekraczanie ram poszczególnych działów matematyki).

Bardzo interesujące spojrzenie na strategie rozwiązywania zadań olimpijskich przedstawił Terence Tao w książce *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective* [137]. Jego książka jest tym bardziej interesująca, że Tao był trzykrotnym reprezentantem Australii na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej. W latach 1986-1988 zdobywał kolejno brązowy, srebrny i złoty medal, przy czym w 1988 roku miał dopiero 13 lat. Książkę napisał już jako piętnastolatek, zatem można ją potraktować jako przedstawienie własnego sposobu myślenia, wykorzystywanych strategii, które są charakterystyczne także dla innych wybitnie uzdolnionych uczestników olimpiad. Terenc Tao wskazał dyrektywy przydatne w trakcie rozwiązywania zadania :

1. zrozum problem,

2. zdaj sobie sprawę z tego, co jest dane,

3. zdaj sobie sprawę z tego, jaki jest twój cel,

4. wybierz właściwą notację,

5. zapisz wszystko, czego się dowiedziałeś w wybranej notacji; narysuj wykres,

6. zmodyfikuj nieznacznie zadanie, jeżeli zachodzi taka potrzeba,

7. zmodyfikuj znacząco zadanie, jeżeli zachodzi taka potrzeba,

8. uprość problem, wykorzystaj dane i osiągnij cel główny.

W trakcie rozwiązywania zadania istotny wpływ na dobór strategii ma wiedza rozwiązującego. W zależności od poziomu wiedzy rozwiązujący będzie stosował odmienne strategie; badania na ten temat opisała Marianna Ciosek w pracy *Proces rozwiązywania zadania na różnych poziomach wiedzy i doświadczenia matematycznego* ([32]).

Uczeń uzdolniony matematycznie, którego wiedza przekracza wiedzę przeciętnego ucznia i który ma bogate doświadczenie w rozwiązywaniu zadań nabyte w toku przygotowań do startu w Olimpiadzie Matematycznej, nie zawsze odkrywa drogę prowadząca do rozwiązania zadania, ale często ma intuicję, jaka strategia przyniesie sukces. Częstokroć od właściwego rozwiązania dzieli go jedna, nieoczywista obserwacja lub niebanalny pomysł. Podkreślić trzeba badawczą postawę olimpijczyka, który nie zraża się trudnościami i konsekwentnie dąży do celu. W ostatecznej redakcji rozwiązania nie ma na ogół śladów poszukiwań i badań, jakie przeprowadził uczeń. Ważne jest to, że najczęściej uczeń posiada wiedzę i umiejętności pozwalające rozwiązać zadanie.

Zofia Krygowska opisuje trzy zasadnicze typy wnioskowań.

1. Wnioskowanie empiryczne ma miejsce wtedy, gdy uczeń formułuje hipotezę matematyczną na podstawie ciągu prób (np. obliczeń) i dostrzegając pewną prawidłowość (tzw. indukcja przyrodnicza).

2. Wnioskowanie intuicyjne ma miejsce wtedy, gdy uczeń w toku rozwiązania posługuje się przede wszystkim wyobraźnią i przeprowadza skrótowe rozumowanie oparte na oczywistych dla niego przesłankach lub formułuje hipotezę matematyczną opartą na dostrzeżonych analogiach, bądź też uzasadnia swoje wnioski nie zanalizowaną dokładniej rekurencją.

3. Wnioskowanie formalne ma miejsce wtedy, gdy uczeń w toku rozwiązania uzasadnia precyzyjnie każdy wniosek wywodząc go z poprzednio uznanych już wniosków, twierdzeń i definicji oraz korzysta prawidłowo z definicji i twierdzeń niezbędnych do rozwiązania zadania.

Marianna Ciosek ([32]) pisze:
W literaturze dotyczącej procesu rozwiązywania zadań matematycznych używa się terminów: metoda, sposób oraz strategia. Wielu autorów wyróżnia trzy metody rozwiązywania zadań:

1. *metodę dedukcyjną,*

2. *metodę redukcyjną,*

3. *metodę redukcyjno-dedukcyjną.*

Polya nazywa te metody odpowiednio: synteza (praca od początku do końca), analiza (praca od końca do początku), praca raz od początku, raz od końca.

W Olimpiadzie Matematycznej pojawiają się zawodnicy, którzy niemal w każdym rozwiązaniu zadania geometrycznego postępują według zasad opisanych przez Kartezjusza i podanych w pracy *Prawidła kierowania umysłem* ([59]):

1. każde zadanie matematyczne sprowadzić do zadania algebraicznego;

2. każde zadanie algebraiczne sprowadzić do rozwiązania jednego jedynego równania.

Jednakże sam Kartezjusz dostrzegał niedostatki takiej strategii. W przypadku zadań geometrycznych występujących na Olimpiadzie Matematycznej można zaryzykować stwierdzenie, że mało które z nich nadaje się do rozwiązania według procedury Kartezjusza.
Warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym) jest duża biegłość w stosowaniu metody. Większość zadań OM jest układana tak, aby stosowanie metody algebraicznej (zarówno w zakresie geometrii analitycznej, jak i zastosowania liczb zespolonych) nie było łatwe i automatyczne. Można uznać zatem, że strategia Kartezjusza jest mało przydatna do rozwiązywania zadań z olimpiad matematycznych.

1.1.4 Błędy

Błąd jest w sposób naturalny związany z procesem uczenia się i tworzenia matematyki. Zdecydowanie częściej można się spotkać z błędami popełnianymi przez uczniów, studentów i nauczycieli; rzadziej można się dowiadzieć o błędach popełnianych przez twórczych matematyków - zwykle są one znajdowane na etapie weryfikacji i recenzji. Bardzo rzadko zdarza się, że prace zawierające błędy są publikowane i przez pewien czas uznawane przez społeczność naukowców za poprawne.

Zofia Krygowska na inauguracji konferencji zorganizowanej przez Międzynarodową Komisję do Studiowania i Ulepszania Nauczania Matematyki w Sherbrooke ([74]) mówiła:

Różne problemy związane z błędami jako istotnymi i nieuniknionymi składnikami ludzkiej działalności były od czasów starożytnych wszechstronnie analizowane w ramach filozofii, psychologii, pedagogiki, prakseologii, historii nauk. Zakres tych analiz i badań jest tak rozległy i ich wyniki tak bogate, że nie jest już możliwe opanowanie indywidualną wiedzą tego, co już zostało wypracowane. Mamy więc tu ogromną szansę wzbogacenia tej wiedzy. Wydaje mi się jednak, że równie ważne jest przyjęcie za punkt wyjścia naszych własnych doświadczeń i obserwacji dokonanych w toku osobistych kontaktów z uczniami i nauczycielami. I nie chodzi tu tylko o prace prowadzone z dokładnością i poprawnością metodologiczną. Mamy nadzieję, że skorzystamy wiele z prezentacji takich prac. Ale nie powinniśmy lekceważyć skromniejszych obserwacji. Czasem jeden fakt, jeden przykład, pozornie izolowany, nawet pozornie dziwaczny, odbija się nagłym błyskiem w naszej pedagogicznej intuicji i może nas skierować w stronę problemów istotnie ważnych.

Na popełnianie błędów istotny wpływ ma sytuacja psychofizyczna ucznia; uczeń rozwiązuje zadania w warunkach kontrolowanej samodzielności, w stresie związanym z ograniczoną ilością czasu, a także musi dokonać wyboru zadań do rozwiązania. Często coś, co nazywa się błędem, powstało w wyniku stosowania sensownych strategii czy reguł, z pełnym przekonaniem ucznia o poprawności postępowania. Wynikiem tego jest spory procent uczniów, którzy błędnie rozwiązali zadanie i są przekonani, że rozwiązanie jest poprawne.
Błędy informują o sposobie rozumienia pojęcia, twierdzenia, algorytmu, metody matematycznej (niekiedy poprawna odpowiedź jest wynikiem stosowania niewłaściwej reguły). Zrozumienie, dlaczego uczeń popełnił taki czy inny błąd, to połowa sukcesu dydaktycznego.

Bardzo ciekawie o swoim błędzie na finale 26 OM pisał Krzysztof Ciesielski ([25]):

W finale, niestety, potknąłem się na najprostszym zadaniu:
W rozwinięciu dziesiętnym pewnej liczby naturalnej występują cyfry 1, 3, 7 i 9. Udowodnić, że przez permutację cyfr tego rozwinięcia można otrzymać rozwinięcie dziesiętne liczby podzielnej przez 7
- otóż źle zrozumiałem temat. Sądziłem, że przez permutację cyfr rozwinięcia Autorzy mają na myśli zamianę - na przykład - każdej jedynki na czwórkę, czwórki na siódemkę... Według tego, co miałem na myśli, permutacją cyfr w liczbie 113479 byłoby np. 449712. Autorom chodziło natomiast o najzwyklejsze „pomieszanie" cyfr w liczbie; np. 131947. Zmodyfikowanego zadania, znacznie trudniejszego od oryginalnego nie zrobiłem.

W ogólnej literaturze dydaktycznej problem klasyfikacji i oceny błędu nie jest - wbrew pozorom - bardzo szeroko omawiany. Częściowo zapewne dlatego, że zagadnienie to jest szczegółowe - inne dla nauki języka polskiego, historii, biologii i matematyki. Na przykład, prawie nie pisze o tym Wincenty Okoń w swojej wielokrotnie wznawianej monografii *Proces nauczania*.
Ocena rozwiązania zadania matematycznego przez ucznia polega w przeważającej części na wskazaniu błędów i przeliczeniu tych błędów na *punkty ujemne*. Wyczuwamy intuicyjnie, jaki błąd nazwiemy drobnym czy wręcz usterką, za jaki odejmiemy dużo punktów, a jaki już dyskwalifikuje całe rozwiązanie. Rozstrzygającym kryterium oceny są więc popełnione błędy. Jak pisze Marianna Ciosek w *Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny* ([28]), błąd może być po prostu traktowany jako brak poprawnej odpowiedzi.

Rozwiązania bezbłędne są zawsze oceniane najwyżej, nawet jeżeli są zagmatwane, okrężne i *brzydkie*. Co najwyżej uczeń (zawodnik) dostanie niezbyt pochlebny komentarz od sprawdzających. Tak jest też w Olimpiadzie Matematycznej i innych konkursach. Inaczej jest przy ocenie prac naukowych. Są one już najczęściej wolne od błędów - ocenie podlega tylko wartość

pracy, mierzona między innymi oryginalnością, stopniem pokonywanych trudności, ważkością poruszanych zagadnień itp.

Nie ma jednej uniwersalnej odpowiedzi, jak traktować błędy w rozwiązaniach. Z jednej strony, należy uczniów przyzwyczajać do tego, że w dorosłym życiu efekty pracy ocenia się tylko wyłącznie na podstawie jej wyników. Ale z drugiej strony, cała działalność szkoły jest nastawiona na uczenie i wychowanie. Można powiedzieć obrazowo, że wszystko aż do matury jest próbą, a sama matura tylko próbą generalną. Dlatego błąd rachunkowy, który w pracy inżynierskiej spowodowałby zawalenie się mostu, budowanego według tego projektu, można w pracy uczniowskiej traktować łagodnie (o ile nie spowoduje zmiany sensu zadania lub nie uniemożliwi jego rozwiązanie).

Zofia Krygowska mówiła ([74]):

Od czasów starożytnych błąd traktowany jest nie tylko jako składnik naturalny, nieunikniony ludzkiej aktywności (errare humanum est), ale nawet jako składnik pozytywny, instruktywny rozwoju wiedzy, uczenia się, twórczości (errando discimus). Błąd nie powinien być więc uważany za nieszczęście, za katastrofę, ani dla tego, kto się uczy, ani dla tego, kto uczy.

Omawiam tu - bardzo wybiórczo - niektóre ogólnie znane z literatury podejścia do zjawiska *błędu*. Opiszę także pewne typologie błędów. Żadna z tych typologii nie odpowiada w pełni mojemu zadaniu: analizie błędów w rozwiązaniach zadań olimpijskich. Większość typologii odnosi się do błędów popełnianych w procesie dydaktycznym, czyli takich, które popełnili uczniowie, studenci, nauczyciele, a które były związane raczej z odtwarzaniem wiedzy niż działaniem twórczym. Rozwiązywanie zadań olimpijskich ma w większym stopniu charakter działania twórczego. Uczniowie biorący udział w OM są jednostkami o wyraźnie zarysowanych zdolnościach matematycznych i błędy jakie popełniają, mają przeważnie inny charakter niż błędy popełniane na sprawdzianach, kartkówkach, kolokwiach, w trakcie odpowiedzi ustnej w szkole czy na uczelni.

Jak zauważa Zofia Krygowska ([74]):

Stawia się nam w programie konferencji pytania, dotyczące klasyfikacji błędów. Nie są to tylko pytania akademickie. Należałoby zresztą mówić raczej o typologii niż o klasyfikacji błędów. Można próby takiej typologii podejmować z różnych punktów widzenia. Ale rozważając te zagadnienia z punktu widzenia profilaktyki i terapii błędów nie powinniśmy pominąć typologii najprostszej - moim zdaniem - ważnej. Nie można bowiem wrzucać do tego samego worka pojęciowego, z jednej strony postaw i zachowań ucznia, który mówi lub pisze byle co, bo nie interesuje go rozwiązanie problemu, chwilowych pomyłek, wywołanych brakiem uwagi, błędów wynikających z luk w wiedzy, które mogą być łatwo poprawione przez samego ucznia, gdy pozostawi mu się czas na refleksję lub uzupełnienie wiadomości, wniosków opartych na lekkomyślnym zgadywaniu itp., z drugiej zaś strony świadomego rozumowania logicznie niepoprawnego, oraz błędów ujawniających głęboko zakorzenione fałszywe koncepcje, których uczeń nawet z uporem broni, jeżeli mu na to pozwalamy.

Tadeusz Kotarbiński w swojej książce *Sprawność i błąd* ([64]) skupia się – zgodnie ze swoimi zainteresowaniami – na typologii błędów praktycznych. Wiele z jego uwag można odnieść i do błędów myślowych (rozwiązywanie zadań jest bowiem z punktu widzenia matematyka działalnością praktyczną). Warto zwrócić uwagę na kilka kategorii, wyodrębnionych przez Kotarbińskiego:

1. błędy polegające na wykonywaniu niewłaściwego ruchu (w naszej typologii odpowiada

to błędnemu wyborowi strategii),

2. błędy polegające na niewykonywaniu ruchu potrzebnego (ten błąd odpowiada brakowi strategii),

3. błędy mające źródło w takim czy innym automatyzmie (ten typ błędu to błąd powierzchownej wiedzy),

4. błędy spowodowane czynnikiem osłabiającym uwagę (można ten błąd potraktować jako błąd zmęczenia intelektualnego, braku kondycji lub walki o wynik).

Obszerną typologię błędów podaje Zdzisława Dybiec w pozycji *Błędy w procesie uczenia matematyki* ([44]). W ogólnym aspekcie nauczania i metod jego organizacji pisze ona o błędach matematycznych, dydaktycznych, psychologicznych, heurystycznych, diagnostycznych, prakseologicznych. W aspekcie dziedzin wiedzy matematycznej wyodrębnia błędy arytmetyczne, algebraiczne, geometryczne. W aspekcie metody matematycznej mówi o błędach definicji, twierdzeń, dowodów, błędach obliczeniowych i logicznych. W aspekcie czynności umysłowych pojawiających się w trakcie rozwiązywania określonego problemu wyróżnia błędy abstrahowania, uogólniania, specyfikowania, klasyfikowania, porównywania, porządkowania, kodowania, dekodowania. W aspekcie hipotetycznych przyczyn wyróżnia błędy spowodowane trudnościami językowymi, brakiem wiedzy, niepoprawnymi skojarzeniami, sztywnością myślenia; w aspekcie wykorzystania błędu w procesie uczenia - błędy kształcące, inspirujące, obojętne. W aspekcie częstości występowania wyróżnia błędy przypadkowe i błędy systematyczne. W aspekcie odtwarzania czy tworzenia reguł postępowania klasyfikuje błędy patologiczne i błędy normalne.

Na podstawowe typy błędów w rozumieniu twierdzenia zwracają uwagę Stefan Turnau w pracy *Wybrane zagadnienia metodyki matematyki* ([138]) i Bogdan Jan Nowecki w artykule *Badania nad efektywnością kształtowania pojęć twierdzenia i dedukcji u uczniów klas licealnych w zmodernizowanym nauczaniu matematyki* ([90]). Podstawowe błędy w ich ujęciu to utożsamienie twierdzenia z jego tezą, uznawanie twierdzenia za fałszywe, jeśli jego założenie jest fałszywe. Nowecki zwraca także uwagę na błędy w rozumieniu związków między twierdzeniem a jego dowodem np. uznawanie twierdzenia za fałszywe, mimo uznania poprawnosci jego dowodu.

George Booker w pracy *Rola błędów w konstrukcji matematycznej wiedzy* ([19]) dokonał podziału błędów o charakterze ogólnym:

1. błędy nieuwagi (mają tendencję do pojawiania się okazjonalnie),

2. błędy przypadkowe (mogą występować często, ale nie wynikają z ustalenia jakiejś procedury),

3. błędy systematyczne (ukazują ustalony wzór postępowania; u uczącego się ustalił się pewien szczególny sposób myślenia).

Hendrik Radatz w *Errors in Mathematical Education* ([111]) przedstawił typologię ze względu na przyczyny prowadzące do błędów, widzianych przez pryzmat procesu przetwarzania informacji zawartych w zadaniach matematycznych:

1. błędy spowodowane trudnościami językowymi,

2. błędy spowodowane trudnościami w odczytaniu informacji zadanej wizualnie,

3. błędy spowodowane niedostatecznym opanowaniem podstawowych, elementarnych umiejętności, faktów i pojęć,

4. błędy spowodowane niepoprawnymi asocjacjami lub sztywnością myślenia,

5. błędy spowodowane zastosowaniem nieodpowiedniej reguły lub strategii.

Szczególnie interesujące stanowisko w kwestii błędów matematycznych zajął Imre Lakatos, który twierdził, że błąd jest niezbędnym elementem twórczości matematycznej. W książce *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego* ([77]) podaje przykłady błędnych dowodów, które wymusiły doprecyzowanie pojęć i twierdzeń. Szczególnie charakterystyczny jest błąd zawarty w wydanej w 1821 roku pracy *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, w której Cauchy sformułował i udowodnił, że granicą ciągu zbieżnego funkcji ciągłych jest funkcja ciągła. Dopiero w 1847 roku P.L.Seidel znalazł ten błąd i zmodyfikował twierdzenie zastępując założenie ciągłości specjalnie wprowadzonym pojęciem ciągłości jednostajnej.
Ten błędny dowód funkcjonował przez 26 lat i to pomimo kontrprzykładów, jakie podali Fourier i Abel. Lakatos twierdzi, że dopiero po publikacji pracy Seidela pojawiła się nowa praktyka metodologiczna polegająca na dokładnej weryfikacji dowodów twierdzeń pod kątem występowania kontrprzykładów.
Moja praca pokaże, że owa praktyka metodologiczna często nie jest znana olimpijczykom popełniającym błędy.

1.1.5 Matematycy i rozwiązywanie problemów

Prześledzenie metodologii twórczego myślenia jest niezwykle trudne, prawie niemożliwe. Niewielu wybitnych matematyków odkryło tajemnicę swojego warsztatu: Polya, Hadamard, Poincare.

Co to znaczy udowodnić twierdzenie? Matematyk powie, że dowód twierdzenia to wykazanie, z wykorzystaniem reguł wnioskowania oraz znanych faktów matematycznych, że z założeń wynika teza. Uczeń dowodzący twierdzenie musi stanąć przed szeregiem pytań, które poprowadzą go w kierunku poprawnego dowodu twierdzenia. Przede wszystkim musi uświadomić sobie treść twierdzenia. Oprócz działań myślowych, prób poszukiwania i odkrywania, musi także wykonać konkretne operacje np. wykonać rysunek, dokonać przekształceń algebraicznych itp. Końcową fazą dowodu jest jego zapis, sporządzony według wymagań formalnych, a często zwyczajowych norm i wzorców np. symboliki powszechnie przyjętej i zrozumiałej dla czytelników.

Nieco nieuchwytnym, ale obecnym w rozważaniach matematyków zajmujących się procesem twórczym, jest zagadnienie roli intucyjnego postrzegania rozwiązań problemów, które wiążą się z niespodziewanymi, nowymi pomysłami, *olśnieniami*, o czym pisze Jacques Hadamard w swojej książce *Psychologia odkryć matematycznych* ([55]). Przypisuje on duże znaczenie podświadomej pracy umysłu, która może skutkować odkryciami matematycznymi.

Poincare w pracy *Mathematics and Science* pisał, że niemożliwe jest analizowanie pracy matematyków bez zauważania i rozróżniania dwóch przeciwstawnych rodzajów myślenia, z których pierwszy rodzaj jest powiązany z logiką, a drugi z intuicją. Jako przykład podawał Weierstrassa, który redukował analizę matematyczną do ciągu obliczeń (i właściwie nie korzystał z rysunków) oraz Riemmanna, który wszystko starał się umieszczać w kontekście geometrycznym. Tall ([136]) zauważa, że podobne różnice dostrzegał także w myśleniu studentów.

W przypadku zadań z Olimpiady Matematycznej nie bez znaczenia jest rozważanie elementu intucji i występowanie *olśnień*, gdyż praca uczniów rozwiązujących takie zadania bliższa

jest pracy naukowej matematyków, aniżeli pracy typowego ucznia na lekcji. W ocenie i analizie aspektów związanych z dowodzeniem twierdzeń będę się powoływać w większym stopniu na wypowiedzi twórczych matematyków, niż dydaktyków matematyki. Należy patrzeć na rozwiązywanie zadań olimpijskich jak na proces twórczy, podczas gdy rozwiązywanie zadań na lekcji, kartkówce, sprawdzianie ma zdecydowanie charakter odtwórczy. Elementem łączącym rozwiązywanie zadań olimpijskich z aspektem dydaktycznym jest ograniczony czas ich rozwiązywania. Z tego wynikać będzie prawdopodobnie chęć uczniów do stosowania schematów i metod znanych z literatury, kółek itp.

Ervynck ([48]) zwraca uwagę, że akt twórczy wymaga spełnienia przynajmniej jednego z warunków:

1. stworzenie nowego pożytecznego pomysłu (co oznacza, że pomysł ten przyda się później),
2. odkrycie wcześniej niezauważonej relacji, która prowadzi w pożądanym kierunku,
3. skonstruowanie pożytecznego porządku, czyli takie przeorganizowanie część teorii, aby ten porządek dedukcji stał się oczywisty.

Ervynck podaje także składniki matematycznej kreatywności:

1. studiowanie, zapoznawanie się z tematem,
2. głębokie, intuicyjne poznanie tematu,
3. wyobraźnia i inspiracja,
4. wyniki ujęte w formalną strukturę dedukcyjną.

Jan Konior w pracy *Poszukiwanie dowodu a jego redagowanie w nauczaniu matematyki* ([63]) pisze: *Przynajmniej niektóre stadia w procesie badawczym uczonego i działalności poszukiwawczej ucznia rozwiązującego szkolny problem mają zbliżoną naturę, mimo znaczej różnicy tak w zaawansowaniu umysłów jak i poziomie rozwiązywanych zadań.*
Można zadać sobie pytanie: jakie są elementy charakterystyczne procesu dowodzenia twierdzenia? Jan Konior podzielił ten proces na dwa podstawowe komponenty: *dowód myślowy* oraz *zapis dowodu*. Można przyjąć, że dowodzenie twierdzenia zawartego w zadaniu olimpijskim, również składa się z odpowiednich komponentów, chociaż zamiast określenia *dowód myślowy* można raczej użyć pojęcia *pomysł dowodu*. Etap ten charakteryzuje się tym, że pojawiają się nie tylko cząstkowe pomysły (pomysł na metodę adekwatną do zadania, twierdzenia użyteczne do dowodu), ale także ciąg logiczny łączący poszczególne elementy, który uprawdopodabnia poprawność dowodu. Oczywiście faza wstępna tego etapu jest niezwykle ważna dla dalszego toku dowodu (analiza założeń, analiza tezy, propozycje zastosowania metod i twierdzeń kojarzących się z podobnymi zadaniami).
Pierwsza faza charakteryzuje się supremacją metody prób i błędów oraz przypisania im prawdopodobieństwa, że są one dobrą drogą do dowodu. Ważną rzeczą w przypadku rozwiązywania zadania olimpijskiego jest presja czasu - na ogół uczniowie nie mają go na weryfikację rozwiązania i poprawę ewentualnych błędów. Ważne wydaje się także to, że często uczeń przystępuje do zapisu rozwiązania mając jedynie pomysł na metodę, nie wykonując przeliczeń przed przystąpieniem do zapisu dowodu, która to czynność jest działaniem równoległym do realizacji kolejnych etapów dowodu.
Uczeń bardzo często ma do wyboru szereg metod, które mogą mieć związek z dowodem danego twierdzenia. Są twierdzenia, których dowód może być oparty na jednej z tych metod. Niezwykle trudne jest dokonanie właściwego wyboru, w którym może pomóc intuicja, znajomość literatury, doświadczenie w dowodzeniu twierdzeń danego typu.

Druga faza dowodzenia, czyli zapis dowodu, jest zadaniem polegającym na przełożeniu pomysłu na dowód w zapis formalny, z wykorzystaniem zapisu logicznego i symbolicznego. Etap pierwszy, czyli dowód myślowy, stanowi bardzo ważny punkt wyjścia do etapu drugiego, czyli zapisu dowodu. Trzeba mieć świadomość, że zapis dowodu jest umiejętnością, której trzeba się nauczyć. Nie jest to umiejętność, która pojawia się samoistnie w toku rozwiązywania zadań na lekcjach matematyki. Tak jak odległa jest matematyka w szkole ponadgimnazjalnej od *matematyki olimpijskiej*, tak odległy jest zapis dowodów i rozwiązań zadań w szkole od redagowania rozwiązań zadań i dowodów na olimpiadzie. Skąd uczniowie czerpią swoją wiedzę dotyczącą takiego zapisu? Analizując dowody przeprowadzone przez uczniów można stwierdzić, że wielki wpływ ma literatura *olimpijska*, z którą mają styczność uczniowie oraz prowadzone zajęcia dodatkowe, na których omawiane są problemy olimpijskie.

Jan Konior pisze:

Do ostatecznego zapisu przechodzi się dopiero wówczas, gdy idea całego rozwiązania została już wykryta, a przebieg dowodu widoczny jest od początku do końca. Zdarza się oczywiście, że wcześniej odkryty zostanie cały tok rozumowania, zaś do redakcji zapisu przystępujemy w drugiej kolejności, by się już tylko tym problemem do końca zajmować. Często jednak redakcja, proces myślowego odkrywania oraz budowania dowodu przeplatają się, gdyż prowadzi się równolegle rozumowanie i zapis częściowych rezultatów.

Bardzo ciekawe badania na temat strategii rozwiązywania tego samego zadania opisali Alan Schoenfeld [114], Marianna Ciosek [32] i Michał Szurek [133]. Nie było to zadanie z olimpiady, ale miało charakter zadania olimpijskiego.

Zadanie miało następującą treść:

Niech a, b, c i d będą liczbami rzeczywistymi większymi od 0 i mniejszymi od 1. Udowodnić, że

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > 1-a-b-c-d$$

Alan Schoenfeld opisuje grupę, która składała się z pięciu zawodowych matematyków i siedmiu studentów pierwszych lat matematyki i nauk technicznych.
Wszyscy matematycy rozwiązali zadanie dowodząc najpierw, że

$$(1-a)(1-b) > 1-a-b,$$

a następnie

$$(1-a)(1-b)(1-c) > 1-a-b-c.$$

Trzech spośród matematyków stwierdziło po rozwiązaniu, że zadanie jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego twierdzenia, które można udowodnić indukcyjnie.
Tylko jeden student rozwiązał zadanie tą samą metodą. Trzech studentów wymnożyło elementy z lewej strony nierówności i wykazało, że

$$ab+bc+cd+da+ac+bd-abc-abd-acd-bcd+abcd > 0$$

Trzech studentów utknęło w skomplikowanych przekształceniach i nie otrzymało rozwiązania. Schoenfeld konstatuje:

Jasne jest, że świadomie bądź nieświadomie cała piątka matematyków użyła do rozwiązania zadania następującej ogólnej dyrektywy heurystycznej:

Żeby rozwiązać skomplikowane zadanie, często dobrze jest zbadać i rozwiązać analogiczne z nim łatwiejsze zadanie. Wówczas można zastosować metodę lub wynik do rozwiązania wyjściowego.

Marianna Ciosek przeprowadziła badania na grupie 60 osób: 3 uczniów II klasy gimnazjum, 25 uczniów szkoły średniej, 22 studentów i 10 matematyków.
Podobnie jak u Schoenfelda wszyscy matematycy poradzili sobie z zadaniem. Także w tej grupie stosowane były takie strategie, jak opisane powyżej, które Marianna Ciosek nazywa, odpowiednio, *strategią rozwiąż zadanie pokrewne* oraz *strategią regularnej drogi*. Ponadto wskazuje *strategię szacowania wartości wyrażeń algebraicznych*, która polega na wykorzystaniu warunku $a, b, c, d \in (0, 1)$ dla oszacowania lewej i prawej strony nierówności.
W pracy przedstawione są także poprawne rozwiązania dwóch uczniów, którzy korzystali ze strategii regularnej drogi, uczennicy, która rozwiązała zadanie za pomocą szacowania oraz jednego studenta, który wykorzystał strategię rozwiązywania zadania pokrewnego i jako jedyny uogólnił twierdzenie.

Michał Szurek, chcąc powtórzyć badania Schoenfelda, a także Marianny Ciosek, przeprowadził eksperyment na grupie kilkunastu matematyków, pracowników Uniwersytetu Jagiellońskiego, Uniwersytetu Warszawskiego i Uniwersytetu Zielonogórskiego ([133]). Odpowiedzi respondentów pokazały duże bogactwo metod dowodzenia tak z pozoru sztampowego zadania. I tak zaprezentowano:

1. strategię polegającą na wymnożeniu lewej strony i dowodzeniu zredukowanej nierówności;
2. rozwiązanie zadania dla dwóch liczb i uogólnienie dla n liczb;
3. rozwiązanie z wykorzystaniem interpretacji objętości odpowiednich hiperprostopadłościanów;
4. rozwiązanie z wykorzystaniem interpretacji probabilistycznej;
5. błędne rozwiązanie z wykorzystaniem badania ekstremów warunkowych;
6. rozwiązanie z wykorzystaniem *metody zbliżeń* opisanej w pracy [65];
7. bardzo ogólny sposób podejścia do zagadnienia, oparty *ideologicznie* na rachunkach dotyczących klas Cherna wiązek wektorowych.

Przykład zadania pokazuje, że sposób rozumowania zawodowego matematyka jest głęboko osadzony w jego wiedzy i doświadczeniu.

O podejściu zawodowych matematyków do rozwiązywania problemów pisze Michael Otte ([95]), sporo miejsca poświęcając ewolucji poglądów na filozofię dowodzenia, jaka nastąpiła od XVIII wieku do czasów współczesnych.

Marylin P. Carlson i Irene Bloom ([23]) przeprowadziły badania na 12 matematykach. Wyodrębniły etapy, jakie wystąpiły w trakcie rozwiązywania problemów:

1. przyglądanie się problemowi w celu zrozumienia zadania, wyodrębnienia założeń i polecenia,
2. planowanie i rozważanie różnych dróg rozwiązania,
3. wykonanie planu poprzez dopasowanie odpowiedniego podejścia heurystycznego;
4. sprawdzenie sensowności odpowiedzi i weryfikacja sposobu rozwiązania,

5. sprawdzenie efektywności różnych metod i strategii heurystycznych.

Autorki zauważyły także, że matematycy wykorzystywali dwa takie cykle w rozwiązaniu zadania. Analizowały każdą fazę rozwiązania z punktu widzenia czterech kryteriów: zasoby (resources), działania (affect), heurystyki (heuristic), kontrola (monitoring).

1.1.6 Badania na temat procesu rozwiązywania zadań olimpijskich

W 1974 roku ukazała się praca *Strategie rozwiązywania zadań matematycznych jako problem dydaktyki matematyki* ([33]), a w 1978 roku - *Dydaktyczne problemy związane ze strategiami stosowanymi w rozwiązywaniu zadań matematycznych* ([29]), w których Marianna Ciosek opisała proces rozwiązywania zadań wśród wyselekcjonowanej grupy uczestników III etapu OM.
Omówienie dotyczyło czterech zadań z zawodów finałowych OM: 1.3.16, 3.3.19, 1.3.20, 2.3.20. Zajęcie się rozwiązaniami zadań olimpijskich autorka uzasadnia tym, że uczniowie byli zainteresowani matematyką, a więc spełniony był warunek pozytywnego nastawienia, co powodowało podejmowanie prób rozwiązania. Ponadto wybór olimpijczyków eliminuje nieudolność, brak wiedzy i doświadczenia w samodzielnym rozwiązywaniu zadań, a prace tych uczniów zawierały rozmaite, oryginalne sposoby postępowania.
Autorka twierdzi, że wybrane do analizy zadania były zadaniami typu szkolnego, chociaż nie były typowe w tym sensie, że ich rozwiązania można sprowadzić tylko do znajomości gotowych schematów i bezpośredniego ich zastosowania. Analizując zadania z punktu widzenia współczesnego olimpijczyka trzeba przyjąć, że są to typowe zadania, które ocenić należy jako niezbyt trudne.

Marianna Ciosek pisze: *analiza prac z błędami pozwoliła zaklasyfikować każdy błąd do jednego z poniższych rodzajów: zastosowanie błędnego twierdzenia, błąd logiczny, błąd rachunkowy.* W swojej pracy znacznie rozszerzyłem tę klasyfikację, aby jak najdokładniej opisać prawdopodobną przyczynę jego powstania, zwłaszcza że olimpijczycy popełniają charakterystyczne błędy, które są z kolei mniej specyficzne dla całej populacji uczniów.

Marianna Ciosek przyjęła cztery kategorie opisu: ze względy na strategię, metodę, sposób realizacji strategii i metody, pomysł w rozwiązaniu.
Zwraca ona *uwagę na psychologiczny aspekt silnego dążenia do uzyskania rozwiązania zadania, który bywa w konflikcie z formalną dedukcją.* To w mojej typologii *walka o wynik.*
Na podstawie przeprowadzonej analizy autorka stwierdza, że próba stworzenia jednego schematu do opisu procesu rozwiązywania różnych zadań nie powiodła się, gdyż *przebieg rozwiązania zadania jest uzależniony dalece od tematu zadania.*
Autorka zwraca także uwagę, że bogactwo sposobów rozwiązania zadania było charakterystyczne dla zadania geometrycznego - uczniowie w rozwiązaniach stosowali bardzo różne elementy wiedzy geometrycznej. Z kolei w rozwiązaniach zadania typu algebraicznego było zaznaczone dążenie do algorytmizacji procesu.
Badania procesu rozwiązywania zadań Olimpiady Matematycznej, jakie zapoczątkowała Marianna Ciosek, przez następne 35 lat nie miały kontynuacji. Moje badania są próbą powrotu do tego typu badań, ale także stanowią ich bardzo dalekie pogłębienie i rozszerzenie. Dlatego nie można ich traktować jako prostej kontynuacji.

Z badań zagranicznych, pokrewnych z moimi, wymienię dwa.

Maria Luz Callejo ([22]) przedstawiła badania oparte na analizie rozwiązań uczniów startujących w Hiszpańskiej Olimpiadzie Matematycznej oraz uczniów uczestniczących w zajęciach Klubu Matematycznego. W artykule przedstawione są strategie, jakie stosowali uczniowie w

trakcie rozwiązywania czterech zadań (dwa z geometrii, jedno z teorii ciągów, jedno kombinatoryczne) z Hiszpańskiej Olimpiady Matematycznej z lat 1972-77. Autorka badała, jaki wpływ na wybór strategii oraz zmianę strategii miał wybór przedstawienia graficznego rozwiązywanego problemu.

Kazuhiko Nunokawa w artykule [93] opisał pracę studenta studiów uniwersyteckich ze specjalnością nauczanie matematyki. Badania zostały przeprowadzone na przykładzie zadania z Olimpiady Matematycznej USA:

Sfera wpisana w czworościan jest styczna do jego ścian w ich środkach ciężkości. Wykaż, że jest to czworościan foremny.

Widoczny jest związek z zadaniem 5.3.57:

Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Celem badania było określenie korelacji między rozwiązywaniem zadania za pomocą rozbijania go na problemy pośrednie, a rozumieniem problemu matematycznego. Nunokawa zauważył, że cele pośrednie redukowały przestrzeń poszukiwań i ograniczały drogi widzenia sytuacji problemowej. Autor w artykule pokazuje przewagę zastosowania strategii rozwiązywania krokami pośrednimi. W konkluzji stwierdza, że trudno ustalić czy wpływ celów pośrednich jest pozytywny czy negatywny.
Ten sam autor w pracy [91] pisze o zastosowaniu metody Lakatosa (dowodów i refutacji) do rozwiązywania zadań oraz uczenia rozwiązywania zadań. Odwołuje się przy tym do obserwacji ucznia, który rozwiązywał zadanie z Olimpiady Matematycznej USA:
Pięciokąt $ABCDE$ ma taką własność, że pola trójkątów: ABC, BCD, CDE, DEA, EAB są równe. Udowodnić, że wszystkie pięciokąty o podanej własności mają to samo pole i wyliczyć to pole. Wykazać, że jest nieskończenie wiele nieprzystających pięciokątów o tej własności.
Wykorzystując to samo zadanie ([92]) opisał badanie, jakie przeprowadził na dwóch studentach japońskiego uniwersytetu.

1.1.7 Cele i organizacja Olimpiady Matematycznej

W tym podrozdziale przypomnę fakty ogólnie znane, a także charakterystyczne ciekawostki dotyczące OM.

Olimpiada Matematyczna została powołana z dniem 1 listopada 1949 roku zarządzeniem Ministra Oświaty z dnia 31 października 1949 roku (Nr II-7340/49) o zorganizowaniu zawodów matematycznych w szkołach ([94]). W zarządzeniu można przeczytać:

Celem podniesienia poziomu wykształcenia uczniów w zakresie matematyki, rozbudzenia zamiłowania młodzieży w tym kierunku i wyszukania wśród uczniów jednostek o wybitnych zdolnościach matematycznych, a następnie ułatwienia im dalszych studiów (...) organizuje się każdego roku szkolnego dla uczniów klas licealnych na terenie całego Państwa zawody matematyczne pod nazwą „Olimpiada Matematyczna".

W 2009 roku Regulamin Olimpiady Matematycznej rozpoczyna punkt:

Celem zawodów Olimpiady Matematycznej jest rozbudzenie zamiłowania do matematyki wśród młodzieży szkół ponadgimnazjalnych, wyszukanie jednostek o wybitnych zdolnościach matematycznych, kształtowanie umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy oraz stymulowanie aktywności poznawczej młodzieży uzdolnionej. W zawodach Olimpiady Matematycznej mogą uczestniczyć również uczniowie szkół średnich będący obywatelami innych państw (...) oraz uczniowie szkół podstawowych, gimnazjów, zasadniczych szkół zawodowych i szkół zasadniczych.

Cele formalne OM są nadal zgodne z cytowanym powyżej akapitem z Zarządzenia Ministra Oświaty z 1949 roku. Zadawać sobie jednak będę pytanie: czy Olimpiada nadal służy *rozbudzeniu* zamiłowania młodzieży w kierunku matematyki oraz *wyszukiwaniu* jednostek wybitnie uzdolnionych. Wydaje się, że obecnie OM jest adresowana raczej do uczniów już bardzo zainteresowanych matematyką, a uczestnikami finału niekoniecznie są osoby o wybitnych zdolnościach - coraz częściej są to osoby poddane uprzednio szczególnemu typowi treningu, którego celem jest opanowanie repertuaru schematów olimpijskich, dającego niemal gwarancję dostania się do finału.

Organizacja zawodów.

Zawody każdego roku są trójstopniowe i polegają na pisemnym, samodzielnym rozwiązywaniu zadań konkursowych.
Zawody stopnia pierwszego polegają na rozwiązaniu 12 zadań w okresie od września do grudnia. Zadania z tego etapu uczniowie rozwiązują samodzielnie, przy czym mogą zwracać się z pytaniami do innych osób (także nauczycieli) w celu wyjaśnienia wątpliwości. Rozwiązania zadań z zawodów stopnia pierwszego uczeń przesyła sam lub za pośrednictwem szkoły do komitetu okręgowego właściwego dla adresu szkoły.
Zawody stopnia drugiego odbywają się w ciągu dwóch kolejnych dni. Każdego dnia uczestnicy rozwiązują trzy zadania pod nadzorem członków komitetu okręgowego.
Zawody stopnia trzeciego przebiegają analogicznie jak zawody stopnia drugiego z tym, że czynności komitetu okręgowego przejmuje Komitet Główny.
Na podstawie ustalonej w zawodach stopnia trzeciego kolejności Komitet Główny przyznaje tytuł laureata oraz wyróżnienia. Wszyscy uczestnicy zawodów stopnia trzeciego otrzymują tytuł finalisty. Laureaci oraz finaliści otrzymują zaświadczenia według wzoru ustalonego przez MEN.

W Programie Olimpiady Matematycznej zapisano:

Poziom trudności zadań poszczególnych stopni zawodów jest dostosowany do wymogów paragrafu 8 rozporządzenia Ministra Edukacji i Sportu z dnia 29 stycznia 2002 r. w sprawie organizacji oraz sposobu przeprowadzania konkursów, turniejów i olimpiad (Dz. U. nr 13 poz. 125).
Charakter zadań wyznacza ponadpięćdziesięcioletnia tradycja Olimpiady, obficie udokumentowana bibliograficznie w corocznie wydawanych broszurach sprawozdawczych oraz periodycznie wydawanych zbiorach zadań olimpijskich. Tematyka Olimpiady jest zgodna z tematyką międzynarodowych zawodów matematycznych.

Bardzo trafną charakterystykę zadań, jakie powinny znajdować się na zawodach Olimpiady Matematycznej podał Łukasz Pruski w pracy [110]:

Najwyższym poziomem hierarchii celów rozwiązywania zadań jest rozwijanie i kształtowanie u uczniów matematycznego myślenia twórczego, rozumianego m.in. jako zdolność generowania pomysłów, niezależność od schematów myślowych oraz umiejętność stosowania metod o wyso-

kim stopniu ogólności, a zwłaszcza reguł i chwytów heurystycznych.

Olimpiada Matematyczna teoretycznie nie wymaga od uczestników wiedzy pozaszkolnej. W praktyce jest ona niezbędna. W tym aspekcie może zaistnieć niebezpieczeństwo, że Olimpiada Matematyczna nie wyłapuje talentów, a premiuje uczniów bardziej nauczonych. W tym zatem sensie Olimpiada może oderwać się od swych *korzeni* - nie szuka już kamieni szlachetnych wśród wszystkich, lecz brylantów w zbiorze kamieni szlachetnych. Nie chcę tego wartościować, czy jest to dobre, czy złe, tylko zauważam dość powszechną zresztą opinię - potwierdzając ją badaniami statystycznymi.

W artykule *Bourbaki a sprawa Polska* ([15]) Andrzej Białynicki-Birula wspomina dyskusję sprzed 40 lat o kierunkach matematyki polskiej i światowej. Czy ważniejsza jest ogólność, czy perełkowe rozumowanie dotyczące szczególnego przypadku? Andrzej Białynicki-Birula opowiada się wyraźnie za ogólnością, zgodnie z duchem *bourbakizmu* i tendencjami matematyki światowej.
Jean Dieudonné nazwał polską matematykę *matematyką patologii*. Czy jednak w Olimpiadzie Matematycznej nie powinno być właśnie tak: premiowane winny być rozwiązania, które nie polegają na wykorzystaniu zaawansowanych metod, a na jednostkowym pomyśle? Zależy nam uczniach kreatywnych, bo tacy będą w przyszłości wytyczać kierunki rozwoju nauki. Znów powołam się na autorytet Andrzeja Białynickiego-Biruli, który w wywiadzie dla miesięcznika *Delta*[2] wyraźnie podkreślił, że nauka, a matematyka w szczególności, nie jest demokratyczna - o kierunkach rozwoju decydują najczęściej jednostki.

1.1.8 Narzędzia statystyczne

Podrozdział ten rozpocznę od omówienia systemu oceniania zadań przyjętego w zawodach Olimpiady Matematycznej (analogiczny obowiązuje w Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów).

Zgodnie z decyzją Komitetu Głównego z dnia 5.01.2001 r. począwszy od zawodów II stopnia 52. OM została wprowadzona następująca skala ocen (tabela 1):

Liczba punktów	Kryteria
6	zadanie rozwiązane bezbłędnie lub z mało istotnymi usterkami
5	rozwiązanie posiadające poważniejsze usterki, które jednak nie dyskwalifikują zadania jako rozwiązanego
2	*co najmniej pół zadania*, tzn. rozwiązanie zawierające usterki, przy których, według oceniającego, zadania nie można uznać za rozwiązane, jednak co najmniej połowa zadania została zrobiona
0	zadanie nierozwiązane lub zawierające drobne przyczynki, których nie można uznać nawet za pół zadania

Tabela 1: **Skala ocen stosowana w zawodach Olimpiady Matematycznej**

Oczywiście, powyższe opisy nie są precyzyjną definicją, pozwalają jednak przekazać ideę ustalania kryteriów punktowych przy ocenianiu zadań. Zwrócić należy uwagę, że w tej skali

[2] w roku 1983

nie występują oceny 1, 3 i 4.
O kolejności zawodników decyduje wyłącznie suma punktów.

W związku z tym, że skala 0-2-5-6 jest sztuczna i nie występują w niej niektóre oceny, w przedstawionych poniżej analizach w wielu miejscach obliczam różne parametry statystyczne po przeliczeniu ocen zadania na skalę 0-1 (0 - uczeń nie zrobił zadania; uzyskał ocenę 0 lub 2 punkty; 1 - uczeń rozwiązał zadanie; uzyskał ocenę 5 lub 6 punktów). Jednak, jak wykazują obliczenia, nawet przy potraktowaniu ocen 0-2-5-6 jako zmiennych ilościowych, a nie jakościowych, rezultaty analiz są bardzo zbliżone do tych, które uzyskuję badając zadania z ocenami 0-1.

Jak widać, przy ocenianiu rozwiązań olimpijskich obowiązuje zasada całościowa - ocenia się końcowy produkt, a nie - jak na maturze - poszczególne czynności. Z drugiej zaś strony - nie przyznaje się żadnych dodatkowych punktów ani wyróżnień za szczególnie ładne rozwiązania. Ponadto, skoro o wszystkim decyduje suma punktów, to jedno pełne rozwiązanie jest równe trzem *połówkom*. W 57 OM do III etapu awansowało się z 12 punktami, więc finalistą mógł zostać (przynajmniej teoretycznie) uczeń z sześcioma *połówkami*.
Każde rozwiązanie zadania z I etapu oceniają niezależnie dwaj recenzenci zaproponowani przez Komitet Okręgu. Jak przebiegała kwalifikacja do II etapu opisał Krzysztof Ciesielski ([25]):

Gdy kwalifikujemy uczestników do zawodów II stopnia, ustalamy limit punktowy, a potem dokładnie patrzymy na wyniki uczestników, którzy znaleźli się trochę „poniżej poprzeczki" i analizujemy każdego indywidualnie. Często kwalifikujemy dodatkowe osoby; bierzemy pod uwagę na przykład to, że z danej szkoły czy klasy startuje tylko jedna osoba (a więc nie ma możliwości przedyskutowania rozwiązań z kolegami).

Każde rozwiązanie zadania z II etapu jest oceniane niezależnie przez dwóch recenzentów spośród członków Komitetu Okręgowego, a następnie ponownie przez dwóch recenzentów spośród członków Komitetu Głównego i ocena jest wynikiem consensusu. Tak rozbudowana procedura oceniania minimalizuje możliwość popełnienia pomyłek. Ważne jest także to, że druga para recenzentów ocenia rozwiązania konkretnego zadania wszystkich uczestników II etapu, co gwarantuje porównywalność ocen. Rozwiązanie każdego zadania z III etapu oceniane jest niezależnie przez dwóch recenzentów, wyłonionych spośród członków Komitetu Głównego. Decyzje dotyczące awansu do III etapu oraz ustalenia listy laureatów i wyróżnionych są podejmowane przez Komitet Główny Olimpiady Matematycznej.

Ocenianie w OM odpowiada zatem cechom *pomiaru dydaktycznego*, który został zdefiniowany następująco przez Bolesława Niemierko w pracy *Pomiar wyników kształcenia* ([88], str. 50):

Pomiar dydaktyczny jest przyporządkowaniem symboli (ocen) uczniom w taki sposób, by relacje między symbolami odpowiadały relacjom między uczniami ze względu na określone osiągnięcia. Zasady przyporządkowania powinny być ustalone i możliwie dokładnie przestrzegane, a proces pomiarowy powinien podlegać obiektywnej kontroli.

W Olimpiadzie Matematycznej mamy do czynienia z sytuacją, gdy wyniki każdego ucznia są porównywane z wynikami innych uczniów. Taki wybór układu odniesienia powoduje, że pomiar ma charakter różnicujący. Z *pomiarem różnicującym* mamy do czynienia wtedy, gdy nie określamy wymagań programowych, lecz pragniemy przypisać wynikowi ucznia określoną rangę.
Jednym z celów zawodów II stopnia OM jest wyłonienie grupy finalistów, zaś celem zawo-

dów III stopnia jest wybranie laureatów oraz reprezentacji Polski za zawody międzynarodowe (Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich, Zawody Matematyczne Państw Europy Środkowej, Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna). Dlatego też w opisie i analizie statystycznej Olimpiady Matematycznej potrzebne są metody charakterystyczne dla procesu selekcji.

Analiza ilościowa zadań OM będzie obejmowała ich następujące właściwości:

1. opuszczanie zadań przez rozwiązujących,
2. trudność zadań,
3. moc różnicująca zadań.

B. Niemierko ([88], str. 152) przyjmuje, że *za zadanie opuszczone przez danego ucznia uważamy każde zadanie pozostawione bez odpowiedzi, jeżeli na którekolwiek z zadań o wyższej numeracji podał on odpowiedź prawidłową lub błędną, całkowitą lub częściową.* Ponieważ w trakcie zawodów II i III stopnia OM każdego dnia uczeń otrzymuje trzy zadania, na rozwiązanie których ma 5 godzin, będę przyjmował, że zadanie opuszczone to takie, na temat którego uczeń nie pozostawił żadnych notatek w czystopisie.
Frakcja opuszczeń zadania jest stosunkiem liczby uczniów, którzy je opuścili do liczby uczniów biorących udział w zawodach.

W moich analizach będę przyjmował, że *współczynnik trudności* q jest stosunkiem liczby uczniów, którzy nie rozwiązali zadania do liczby uczniów biorących udział w danych zawodach. B. Niemierko ([88], str. 154) przyjmuje, że zadanie jest:

$$\begin{gathered}\text{bardzo trudne, gdy } q > 0,8,\\ \text{trudne, gdy } 0,8 \geq q > 0,5,\\ \text{umiarkowanie trudne, gdy } 0,5 \geq q > 0,3,\\ \text{łatwe, gdy } 0,3 \geq q > 0,1,\\ \text{bardzo łatwe, gdy } 0,1 \geq q \geq 0.\end{gathered}$$

Podział ten nie odpowiada trudności zadań OM. Zwykle trudność zadań OM przekracza 0,4, a średnia trudność zadań Olimpiady Matematycznej kształtuje się na poziomie 0,75.
O tym, jak trudne są zadania OM, pisze anegdotycznie Krzysztof Ciesielski ([25]): prowadzący „herbatkę olimpijską" po drugim dniu zawodów II stopnia rozpoczął słowami:

Wczorajsze zadania były proste. Dopiero dzisiejsze pokazały, co to naprawdę jest Olimpiada. Na to siedzący przy mnie profesor matematyki (notabene były laureat Olimpiady) szepnął do mnie: Ja widziałem te wczorajsze zadania i teraz nie wiem, gdzie się ze wstydu schować.

Moc różnicująca zadania jest korelacją wyników zadania z wynikami testu, w którym umieszczone jest to zadanie. Obliczamy go ze wzoru na współczynnik korelacji *Pearsona*:

$$r_{ix} = \frac{n\sum_{k=1}^{n} i_k x_k - \sum_{k=1}^{n} i_k \sum_{k=1}^{n} x_k}{\sqrt{\left[n\sum_{k=1}^{n} i_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} i_k\right)^2\right]\left[n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right]}}$$

gdzie
r_{ix} - moc różnicująca zadania,
i_k - wynik zadania ucznia U_k,
x_k - wyniki testu ucznia U_k,

n - liczba uczniów testowanych.

W przypadku zadań ocenianych w skali zero-jeden wzór na obliczanie współczynnika sprowadza się do postaci *punktowo-dwuseryjnej.*
Wówczas moc różnicującą zadania (współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej) obliczamy ze wzoru:

$$r_{pb} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x}}{S} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}}$$

gdzie

$\overline{x_1}$ - średnia arytmetyczna wyników całego etapu dla grupy uczniów, którzy poprawnie rozwiązali dane zadanie;

$\overline{x}$ - średnia arytmetyczna wyników całego etapu dla wszystkich uczniów;

S - odchylenie standardowe wyników całego etapu dla wszystkich uczniów;

p - współczynnik łatwości danego zadania (czyli proporcja między liczbą poprawnych rozwiązań danego zadania a liczbą wszystkich piszących;

q - współczynnik trudności $(1 - p)$.

Moc różnicująca zadania jest korelacją wyników zadania z wynikami całego testu i ma zasadnicze znaczenie dla pomiaru różnicującego, jakim są zawody OM.
B. Niemierko ([89]) pisze: *Tylko zadania trudne i bardzo trudne mogą dobrze różnicować uczniów. Zadania łatwe i bardzo łatwe mają niskie wskaźniki korelacyjne. Wskutek tej zależności musimy interpretować wartość wskaźników mocy różnicującej łącznie ze wskaźnikami trudności zadania.*
Niemierko przyjmuje, że zadania dobrze różnicują, jeżeli współczynnik mocy różnicującej tych zadań jest nie mniejszy niż 0,6. Zadania o współczynniku mocy różnicującej z przedziału $(0,4; 0,6)$ mają umiarkowaną moc różnicującą. Zadania o mocy różnicującej z przedziału $(0; 0,2)$ nie mają zdolności różnicowania populacji, a jeśli współczynnik mocy różnicującej jest ujemny, to mamy pewność, że zadanie jest źle skonstruowane, gdyż wadliwie różnicuje uczniów.

J.P. Guilford w książce *Podstawowe metody statystyczne w psychologii i pedagogice* ([52] str. 157) pisze, że w zależności od wartości współczynnika korelacji można z grubsza określić stopień zależności między wielkościami (tabela 2).

Współczynnik korelacji	Korelacja	Zależność
Poniżej 0,20	słaba	prawie nic nie znacząca
0,20 - 0,40	niska	wyraźna, lecz mała
0,40 - 0,70	umiarkowana	istotna
0,70 - 0,90	wysoka	znaczna
0,90 - 1,00	bardzo wysoka	bardzo pewna

Tabela 2: Współczynnik korelacji i rodzaj korelacji.

Trzeba tu wyraźnie powiedzieć, że te zasady ogólne mają ograniczone zastosowanie w problemach OM.

Zasady powyższe oparte są bowiem na rodzaju *aksjomatu dydaktycznego*: wyniki z poszczególnych części testu powinny być podobne, zbliżone statystyczne. Otóż z praktyki OM wynika coś innego. Cenione są wszelkie nietypowości, a całość bardziej przypomina dziesięciobój lekkoatletyczny, gdzie między skokiem o tyczce a pchnięciem kulą występuje ujemna korelacja. W zagadnieniach OM trzeba na ogół nieco inaczej interpretować wyniki stosowania narzędzi tradycyjnego pomiaru dydaktycznego.

W moich analizach będę zatem badać selektywność zadań. Od strony statystycznej (i nie tylko) II etap OM może być traktowany jako *test selekcyjny*, w sensie takim, o jakim wspomina Guilford. Pisze on ([52], str. 424, op. cit.), że korelacja wyniku zadania z wynikiem selekcji nie jest jedyną rzeczą, jaka powinna być wzięta pod uwagę.

Zgodnie z metodą Taylora-Russella, rozważam podział populacji (czyli grupy uczniów) na klasy jednostek wybranych i odrzuconych (tzn. tych, którzy awansowali i tych, którzy odpadli) na podstawie wyników poszczególnych zadań. Wynik krytyczny z zadania to oczywiście 0 lub 1.

		ocena zadania		razem
		0	1	
sukces	tak	a	b	$a+b$
	nie	c	d	$c+d$
razem		$a+c$	$b+d$	$n=a+b+c+d$

Tabela 3: **Oznaczenia we wzorach przy obliczaniu selektywności**

Dla tablicy dwudzielczej (takiej jak 3) określam (za Guilfordem) łączny stosunek powodzenia bez uwzględnienia wyniku zadania

$$s_o = \frac{a+b}{n}, \tag{1}$$

stosunek powodzenia przy wykorzystaniu wyniku zadania

$$s_t = \frac{b}{b+d}, \tag{2}$$

oraz stosunek wyboru

$$p = \frac{b+d}{n}. \tag{3}$$

Oczywiście p jest równe łatwości zadania.

Ponadto będę analizował współczynniki

$$t = \frac{c}{d+c} \tag{4}$$

$$v = \frac{c}{c+a}. \tag{5}$$

Dane te będę ilustrować na diagramach (przykładowe diagramy: 1 na stronie 31), o których pisze Guilford ([52], rys. 77). W zależności od położenia punktu wspólnego czterech kwadratów występują cztery sytuacje: niski/wysoki wynik krytyczny oraz niski/wysoki stosunek powodzenia. Zbyt wąskie paski po prawej stronie wskazują, że zadanie było bardzo trudne i rozwiązało je zbyt mało osób, by analiza statystyczna dawała poprawny obraz. Takie zadania nie są dobrymi zadaniami selekcyjnymi, niezależnie od wskaźników.

Stawiam tu tezę, że zadania olimpijskie winny się charakteryzować tym, że

a/ punkt ten leży w prawej górnej ćwiartce całego kwadratu. Odpowiada to typowi IV wg [52], (rys.77)

b/ prawy górny prostokąt jest nieco mniejszy niż lewy dolny - odpowiada to sytuacji, że premia za rozwiązanie zadania jest większa niż kara za nierozwiązanie; zadania o przeciwnej proporcji to typowe zadania na zachętę i są oczywiście dopuszczalne właśnie w tym celu,

c/ lewy górny i prawy dolny prostokąt są małych rozmiarów - odpowiada to wysokiej korelacji wyników zadania z osiągnięciem sukcesu: osoba, która nie rozwiązała tego zadania na ogół nie osiąga sukcesu i przeciwnie, osoba która zadanie rozwiązała, na ogół osiąga sukces,

d/ punkt o współrzędnych (t, v) leży w prawym górnym prostokącie.

Punkt o współrzędnych (t, v) będę nazywał punktem *dobrej selektywności*. Powiem, że zadanie dobrze selekcjonuje, gdy punkt o współrzędnych (t, v) leży w prawym górnym prostokącie. Jako uzasadnienie podaję nierówności, które są zgodne z intuicją dobrej selekcji: $\frac{b+a}{d+c} > \frac{a}{c}$ i $\frac{b+d}{a+c} > \frac{d}{c}$ (czyli stosunek liczby tych uczestników, którzy awansowali do finału do liczby tych, którzy nie awansowali jest większy od stosunku liczby tych uczestników, którzy nie zrobili zadania i dostali się do finału do tych, którzy nie zrobili zadania i dostali się do finału oraz stosunek liczby tych uczestników, którzy zrobili zadanie do liczby tych, którzy go nie zrobili jest większy od stosunku liczby tych uczestników, którzy zrobili zadanie i nie dostali się do finału do liczby tych, którzy nie zrobili zadania i nie dostali się do finału.
Przekształcając podane nierówności otrzymuję kolejno:

$$\frac{b+d}{a+c} > \frac{d}{c}$$
$$\frac{a+c+b+d}{a+c} > \frac{d+c}{c}$$
$$\frac{a+c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d}$$

oraz

$$\frac{b+a}{d+c} > \frac{a}{c}$$
$$\frac{a+c+b+d}{d+c} > \frac{a+c}{c}$$
$$\frac{d+c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+a}$$

Na diagramach będę oznaczał punkt (t, v) kolorem białym.

Przykład 1.
Zadanie z rozkładem określonym w tabeli 4 jest oczywiście niewłaściwie dobrane - tylko czwarta część liczby osób, które je rozwiązały, awansuje dalej, podczas gdy wśród osób, które tego zadania nie zrobiły aż trzy czwarte przechodzi dalej. Zadanie takie odpowiada zadaniu o niskim wskaźniku punktowo-dwuseryjnym (przy potraktowaniu egzaminu jako różnicującego).

		ocena zadania		razem
		0	1	
sukces	tak	30	10	40
	nie	10	30	40
razem		40	40	80

Tabela 4: **Przykład zadania, które źle selekcjonuje.**

		ocena zadania		razem
		0	1	
sukces	tak	10	30	40
	nie	30	10	40
razem		40	40	80

Tabela 5: **Przykład zadania, które dobrze selekcjonuje.**

Diagramy dla tych zadań widoczne są na rysunku 1. Pokazuje to przydatność wprowadzonych współczynników i wizualizacji danych.

Rysunek 1: **Diagramy do danych z tabel 4 (z lewej) i 5 (z prawej).**

1.2 Metodologia badań prezentowanych w pracy

1.2.1 Dobór materiału

Spośród zadań z II i III etapu 57 i 58 OM do analizy wybrałem zadania na dowodzenie nierówności, zadania z geometrii płaskiej i przestrzennej. Poniżej przedstawiam uzasadnienie takiego doboru.

Pierwszym zadaniem przygotowawczym pierwszego etapu pierwszej polskiej Olimpiady Matematycznej (1949/50) było zadanie

Zadanie.
Wykazać, że gdy $m > 0$, to

$$m + \frac{4}{m^2} \geqslant 3$$

Treść tego zadania widnieje na pamiątkowym medalu wybitym z okazji 50-lecia Olimpiady Matematycznej (rysunek 2).

Rysunek 2: **Medal 50-lecia Olimpiady Matematycznej.**

We współczesnej polskiej szkole ponadgimnazjalnej jest to niezbyt trudne zadanie omawiane nawet na lekcjach w klasach z rozszerzonym programem matematyki.

Istnieją przyczyny merytoryczne wyboru zadań na dowodzenie nierówności.

Zadania na dowodzenie nierówności stały się standardem *wykształcenia* ucznia, przygotowującego się specjalnie do Olimpiady Matematycznej. O zadaniach tych piszą szczególnie dużo Henryk Pawłowski i Lew Kourlandchik w powszechnie znanych olimpijczykom książkach. Jedno z zadań 56 OM jest nawet identyczne z zadaniem na stronie 40 książki [65] Lwa Kourlandchika *Powrót do krainy nierówności*. Po prostu książka ta (wraz z innymi pozycjami Kourlandchika [66] i [67]) jest *zupełna* - trudno wymyślić zadanie, które nie sprowadzałoby się do prostego *kurlandczykowania* (żargon uczniowsko-nauczycielski), a które byłoby dostępne dla uczniów nie znających tej techniki. Istnieje wśród olimpijczyków dosyć powszechne przekonanie, że opanowanie *materiału* zawartego w tych książkach jest podstawą sukcesu olimpijskiego. Ponadto w trakcie zawodów II stopnia 57 OM pojawił się szereg rozwiązań, w których uczniowie wykorzystywali twierdzenie Muirheada. Do 57 OM nie była to typowa technika *olimpijska* i wzbudziła kontrowersje u oceniających.

Już z pobieżnego rzutu oka na prace olimpijskie (i z naszego doświadczenia nauczycielskiego)

powstało przekonanie, że często zdarzać się będą dobrze nauczeni uczniowie, którzy rozwiążą zadanie o nierównościach dzięki temu, że ktoś nauczył ich stosownej techniki - ale poza tym nie odznaczają się wybitnymi zdolnościami. Statystyka i dokładna analiza potwierdza te intuicyjne przekonania.

Nie brak opini, że najważniejsza w nauczaniu matematyki jest geometria i że właśnie w zadaniach geometrycznych najlepiej poznaje się talent przyszłego matematyka. Nie bez znaczenia jest też powszechna opinia uczniów, że zadania z geometrii są najtrudniejsze (co potwierdza także analiza) i nie poddają się łatwej *algorytmizacji* - w przypadku zadań geometrycznych zwykle trudno *na pierwszy rzut oka* zobaczyć metodę, która pozwoli bezproblemowo rozwiązać zadanie. Nie oznacza to, że większa wiedza nie pomaga - w pracy podaję przykład zadania, które uczniowie XIV LO w Warszawie rozwiązywali masowo z wykorzystaniem własności inwersji, a które można było prościej rozwiązać nie odwołując się do tego pojęcia. Charakterystyczne są także próby rozwiązywania zadań planimetrycznych z wykorzystaniem metody analitycznej lub liczb zespolonych. Analiza pokazuje, że metody mogą być dostępne (i efektywne) tylko dla garstki uczniów, którzy opanowali metodę w stopniu niedostępnym dla wielu uczestników OM.

Zadania z geometrii przestrzennej w finale 57 i 58 OM okazały się wyjątkowo trudne nawet dla dobrze wyselekcjonowanej grupy najlepszych uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Z tego względu analiza rozwiązań okazała się bardzo interesującą. Trzeba dodać, że zasadniczo nie istnieje literatura odnosząca się do metod olimpijskich charakterystycznych dla zadań z geometrii przestrzennej.

W całej pracy przyjąłem system oznaczania zadań za pomocą trójki liczb, z których pierwsza oznacza zadanie, druga - etap (2 - rejonowy, 3 - finał ogólnopolski), zaś trzecia numer olimpiady.

Poddałem analizie następujące zadania na dowodzenie nierówności (wszystkie zadania na ten temat w 57 i 58 OM):

Zadanie (3.2.57).
Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab + bc + ca = abc$. Dowieść, że

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geqslant 1.$$

Zadanie (6.2.58).
Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$$

Wykazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} \leqslant 2(a + b + c + d) - 4.$$

Zadanie (6.3.58).
Ciąg a_0, a_1, a_2, ... jest określony przez warunki:

$$a_0 = -1$$

oraz

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \ldots + \frac{a_1}{n} + \frac{a_0}{n+1} = 0$$

dla $n \geqslant 1$.
Wykazać, że $a_n > 0$ dla $n \geqslant 1$.

Poddałem analizie następujące zadania geometrii płaskiej:

Zadanie (2.2.57).
Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC + BC = 3AB$. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Niech K i L będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów D i E względem punktu I. Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

Zadanie (5.2.57).
Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez punkty A i C przecina okrąg o_2 przechodzący przez punkty B i C w różnych punktach C i D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera punktu C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera punktu C. Dowieść, że proste PQ i CD są prostopadłe.

Zadanie (3.3.57).
Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie (5.2.58).
Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBN$ są rombami o bokach długości a. Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Zadanie (1.3.58).
W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, odcinek CD jest wysokością, punkt E leży na boku AB, a punkt M jest środkiem odcinka CE. Prosta prostopadła do prostej OM i przechodząca przez punkt M przecina proste AC, BC odpowiednio w punktach K, L. Dowieść, że

$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}.$$

Poddałem analizie następujące zadania geometrii przestrzennej:

Zadanie (5.3.57).
Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Zadanie (5.3.58).

W czworościanie $ABCD$ spełnione są zależności:

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD,$$

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC.$$

Udowodnić, że środek sfery opisanej na tym czworościanie leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi AB i CD.

1.2.2 Charakterystyka autorów badanych prac

W trakcie badań analizowane były prace uczniów, którzy brali udział w 57 i 58 OM. Byli to przede wszystkim uczniowie szkół ponadgimnazjalnych, ale w zawodach brali też udział uczniowie gimnazjów.

Zadanie	Liczba prac	Liczba pustych prac
3.2.57	560	135
6.2.58	560	259
6.3.58	123	69
suma	1243	463

Tabela 6: **Liczba analizowanych zadań o nierównościach.**

Zadanie	Liczba prac	Liczba pustych prac
2.2.57	560	330
5.2.57	560	209
3.3.57	125	84
5.2.58	562	182
1.3.58	123	34
suma	1930	839

Tabela 7: **Liczba analizowanych zadań z geometrii płaskiej.**

Zadanie	Liczba prac	Liczba pustych prac
5.3.57	125	67
5.3.58	123	93
suma	248	160

Tabela 8: **Liczba analizowanych zadań z geometrii przestrzennej.**

Z tabel 6, 7 i 8 otrzymujemy, że łączna liczba analizowanych prac to 3421, z czego 1462 to prace puste.

1.2.3 Metody analizy zebranego materiału

Praca moja ma dwa oblicza metodologiczne. Pierwsze i zasadnicze to merytoryczna, opisowa analiza doboru zadań i rozwiązań przedstawionych przez uczniów. Klasyczne teorie dydaktyczne dotyczące nauczania matematyki mają tu ograniczone zastosowanie. Teorie te, wypracowane przez lata między innymi przez wielu polskich specjalistów z Zofią Krygowską na

czele, dotyczą nauczania *normalnych* uczniów w zwykłej szkole. W teoriach tych wiele uwagi poświęca się na szukanie sposobów motywacji uczniów do nauki, na poglądowość i przystępność podawanego materiału. Nawet w opracowaniach dotyczących dzieci zdolnych nie sięga się na ogół tak wysoko, jak do zawodów olimpijskich 2 i 3 stopnia. Na tym poziomie uczniowie nie mają kłopotów z obliczeniami algebraicznymi czy też wyobraźnią geometryczną. Analiza merytoryczna trudności, jakie mają uczniowie odnoszący sukcesy w olimpiadach matematycznych, musi polegać na czymś innym. Tak samo ma się sprawa z Olimpiadą Matematyczną Gimnazjalistów i nieco podobnie jest we wszystkich konkursach matematycznych (a w każdym razie tych o ustalonej reputacji) oraz w sprawdzianach predyspozycji matematycznych (w tej chwili w Polsce został w zasadzie tylko sprawdzian do *matexu* - eksperymentalnych klas matematycznych w XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie).

Drugi aspekt metodologii w mojej pracy to stosowna analiza statystyczna. I tu też znalazłem się w podobnej sytuacji. Wypracowane i ogólnie stosowane metody pomiaru dydaktycznego dotyczą głównie egzaminów różnicujących (w sensie [132], [135]) - tam, gdzie chodzi o liniowe uszeregowanie kandydatów, w mniejszym zakresie egzaminów sprawdzających. Do tego celu służą wskaźniki korelacji (Pearsona, Spearmana, współczynnik punktowo-dwuseryjny i inne). Przyjmuje się jako oczywistą tezę, że wyniki z poszczególnych zadań powinny być dobrze skorelowane z wynikami z całego testu.
W olimpiadach, konkursach i sprawdzianach predyspozycji jest trochę inaczej. Należy je traktować jako egzamin dla elity (w sensie [132], tom 6, lub [52], rozdz. XV, str. 423). Dobrym narzędziem jest analiza tablic dwudzielczych wsparta stosownymi narzędziami statystycznymi. W pracy stosowana jest lekko zmodyfikowana metoda Taylora-Russella ([52], str. 424 i dalsze). Wprowadzam pewną miarę selektywności zadania. Jak do wszystkich wskaźników, tak i do tych należy podchodzić z pewną ostrożnością.
Oczywiście, w badaniach używam też zwykłych narzędzi statystycznych, związanych z pomiarem dydaktycznym. Stoję na stanowisku, że w zadaniach olimpijskich, ogólniej: konkursowych wysokiego szczebla, nie obowiązuje zasada dobrej korelacji wyników poszczególnych zadań z wynikami całego testu. W olimpiadzie wyniki zawodników w poszczególnych zadaniach różnią się znacznie i są dopiero „całkowane względem pewnej miary". Ponadto w zawodach konkursowych nie jest ważna klasyfikacja liniowa uczestników (jak na przykład na egzaminie maturalnym), a wybór wąskiego grona osób, które przechodzą do następnego etapu, do finału, wreszcie dostają wyróżnienie czy tytuł laureata. W przypadku sprawdzianu predyspozycji matematycznych analogią *finału* jest dostanie się do elitarnej klasy o mocno rozszerzonym programie.
Reasumując, tradycyjne i dobrze wypracowane metody analizy i pomiaru dydaktycznego nie są w pełni adekwatne do celów, jakie chcielibyśmy stawiać przed poważnymi konkursami matematycznymi.
Do spraw metodologii należy też refleksja nad - mówiąc nieco górnolotnie - toposem nauczania matematyki w szkole, w każdym razie nad nauczaniem na najwyższym, olimpijskim poziomie. Jak wiadomo, Richard Courant i Herbert Robbins zatytułowali swoją monografię: *Co to jest matematyka?* ([36]). Ich tezą było, że tylko czynne zajmowanie się matematyką może dać odpowiedź na to pytanie. Truizmem jest stwierdzenie, ze obraz matematyki, jaki wynoszą dziś ze szkoły maturzyści, jest fałszywy, a w najlepszym razie zdeformowany. Czy Olimpiada Matematyczna pokazuje jej uczestnikom bardziej prawdziwy obraz?

Kierując się przedstawionymi dokonaniami wielu matematyków i dydaktyków w zakresie konstrukcji typologii błędów, postanowiłem dostosować dotychczasowe typologie błędów do specyficznej sytuacji jaką jest praca ucznia na Olimpiadzie Matematycznej. Nie przystępowałem do pracy z założeniem, że dotychczasowa wiedza nie odzwierciedla potrzeb analizy prac OM. Swoje wnioski oparłem na analizie prac uczniowskich z 57 i 58 OM.

Pierwszym rezultatem tej analizy było wyodrębnienie najbardziej charakterystycznych błędów. Chociaż na temat błędów, ich genezy, klasyfikacji i typologii istnieje obszerna literatura, a zjawiskiem tym interesują się psychologowie, prakseologowie, filozofowie i oczywiście dydaktycy oraz czynni nauczyciele, to rozważania te są na ogół mało przydatne w analizie prac uczniowskich z OM (uczniowie startujący w olimpiadzie to około 2 promili populacji uczniów uczących się w liceach). Zawodnicy, którzy dostają się do II oraz III etapu, mają świadomość wagi zawodów oraz wpływu wyników OM na ich dalsze losy. Uczniowie, którzy dostają się do III etapu otrzymują prawo do uzyskania indeksu na najbardziej oblegane kierunki i uczelnie (oczywiście związane z naukami ścisłymi). W zawodach biorą udział uczniowie o potwierdzonych dużych zdolnościach matematycznych, zatem błędy będą specyficzne dla prac uczniów biorących udział w olimpiadzie.

Pod kategorię *błędy polegające na niewykonaniu ruchu potrzebnego* można podciągnąć sytuacje, gdy uczeń jest o krok od właściwego rozwiązania i nie wpada na właściwy pomysł. Tutaj *niewłaściwy ruch* to wybór fałszywego tropu - metody, która nie może doprowadzić do rozwiązania.
Niełatwo jest wśród rozwiązań zadań olimpijskich wyłapać błędy spowodowane psychologicznym czynnikiem osłabiającym uwagę. Zawody olimpijskie trwają każdego dnia po pięć godzin. W szkole nigdy uczniowie nie pracują pięć godzin nad jednym zestawem zadań matematycznych. Tu postawieni są wobec największego w swoim dotychczasowym życiu wysiłku umysłowego. Po pewnym czasie spada koncentracja i uwaga. Łatwo wtedy o *głupie błędy*. Przyjąłem, że owe *głupie błędy* są spowodowane zmęczeniem, brakiem *kondycji* umysłowej. Pomyłka w znaku, błędny wynik prostych działań arytmetycznych czy pomylenie znaku nierówności to na poziomie zawodów olimpijskich najczęściej wynik nieuwagi, nie zaś niedostatecznego opanowania techniki rachunkowej. Zdarzają się oczywiście i błędy, których źródłem jest jawna niewiedza czy wiedza fałszywa. Na ogół udaje się te kategorie rozdzielić. W [74] Zofia Krygowska pisze: *Aktywność matematyczna wymaga szczególnej uwagi, autokontroli, których uczeń jeszcze się nie dopracował.*

Uwzględniając powyższą argumentację stworzyłem własną typologię uwzględniającą specyfikę błędów popełnianych przez uczestników OM. Typologia, którą podaję poniżej nie dzieli błędów na rozłączne zbiory. Może się zdarzyć, że jeden błąd będzie mógł być przypisany do kilku różnych kategorii.

Postanowiłem wyodrębnić:

1. *Błędy przypadkowe* (taką nazwę stosuje Booker w [19]) to pomyłki rachunkowe w nietrudnych obliczeniach (zmiana znaku, błędne wykonanie działania na liczbach czy wyrażeniach algebraicznych itp.), przeoczenia, błędne rysunki. Takie błędy w pracy ucznia nie powinny pojawiać się wielokrotnie, aby można je było uznać za przypadkowe.

2. *Błędy krytyczne* to błędy, których nie powinien popełniać olimpijczyk np. wielokrotne stosowanie błędnego wzoru, wielokrotne ignorowanie znaku przy mnożeniu nierówności, nieznajomość podstawowych pojęć matematycznych.

3. *Błędy logiczne* to błędy wynikające z nieprawidłowego stosowania reguł rachunku zdań i formuł zdaniowych. Najczęściej dotyczy to niezrozumienia charakteru implikacji, niezrozumienia roli założenia i tezy oraz związku między nimi.

4. *Błędy powierzchownej wiedzy* to błędy wynikające z pozornej znajomości twierdzeń, algorytmów i metod matematycznych. Uczniowie popełniający takie błędy często nie znają poprawnych sformułowań twierdzeń (luki w założeniach, tezie) oraz wykazują brak zrozumienia istoty i sposobu działania twierdzenia (algorytmu, metody matematycznej).

Najczęściej błędy powierzchownej wiedzy wiążą się z niedostatecznym opanowaniem pewnego automatyzmu stosowania twierdzenia (algorytmu, metody) i nieznajomością dowodów poprawności ani istoty tych dowodów. Błędne stosowanie twierdzeń można potraktować jako szczególny przypadek błędu powierzchownej wiedzy.

5. *Błędy wynikające ze zmęczenia intelektualnego* to błędy nieuświadomione, pojawiające się zwykle w końcowej fazie rozwiązania zadania. Charakterystyczne jest skumulowanie takich błędów (ewentualnie wyłączne występowanie) tylko w końcowej fazie rozwiązania, i to w sytuacji, gdy nie występują błędy podobnego typu w fazie początkowej rozwiązania. Najczęściej są to proste błędy rachunkowe (tzw. głupie błędy, które łatwo wychwycić), które nie powinny się przytrafić olimpijczykowi. Inną cechą charakterystyczną dla zmęczenia intelektualnego jest zaniechanie rozwiązywania zadania, gdy do konkluzji jest bardzo blisko, gdy uczeń pokonał największe trudności tkwiące w rozwiązaniu zadania.

6. *Błędy spowodowane chęcią zrobienia zadania za wszelką cenę*. Nazywamy to także *walką o wynik*. Są to błędy nieświadome, pojawiające się wówczas, gdy uczniowi wydaje się, że jest blisko rozwiązania i próbuje stosować twierdzenia i metody, które wydają mu się poprawne, gdyż takich potrzebuje do sfinalizowania rozwiązania zadania. Cechą charakterystyczną są błędne przejścia, na ogół bardzo subtelne, w których trudno dostrzec na pierwszy rzut oka błąd. Najczęściej są podawane bez dowodu lub z pozornie poprawnym dowodem lub też dowód jest omawiany intuicyjnie. Tego typu błędne przejścia doskonale pasują do zakończenia rozwiązania. Często taki błąd polega na przeniesieniu poprawnego dowodu na sytuację, która wydaje się uczniowi analogiczna (choć taką nie jest). W zadaniach geometrycznych błąd tego typu będzie występował np. gdy uczeń podaje fakty na podstawie obserwacji rysunku.

7. *Błędy świadome (blefy)* to błędy, jakie popełnia uczeń, który ma pełną świadomość popełnionego błędu i liczy na niedostrzeżenie go przez sprawdzających. Przyjmujemy, że uczeń blefuje, gdy podaje autorytarnie, że jakiś fakt na pewno ma miejsce, chociaż nie podejmuje prób jego dowodu (może także się powoływać na to, że fakt taki występuje w literaturze - częstokroć podaje nawet tytuł konkretnej książki).

8. *Błędny wybór strategii*. Bardzo częsty błąd pojawia się na początku rozwiązania i jest związany z decyzją: jakiej metody użyć w rozwiązaniu? Błędny wybór metody może wynikać z braków w wiedzy matematycznej; może też być związany z brakiem "intuicji", która metoda przyczyni się do poprawnego rozwiązania zadania.

Prace uczniów, które zostały ocenione na 0 punktów postanowiłem podzielić na kilka kategorii.

1. Prace, w czystopisach których nie występują żadne notatki. Bardzo często uczniowie, którzy oddają puste prace, mają bogate brudnopisy. Postanowiliśmy wyróżnić te prace, gdyż mogą świadczyć o tym, że ich autorzy podchodzą krytycznie do swoich prób rozwiązania. Prace takie będziemy także określać jako prace puste lub bez rozwiązania.

2. Prace, w których nie występują jawne błędy, uczeń wykonuje poprawne przekształcenia, przytaczane są twierdzenia, ale nie ma strategii rozwiązania zadania. Prace takie będziemy także określać jako prace, w których występuje brak strategii.

3. Prace, w których występowały rozwiązania błędne.

W każdym z wyżej wymienionych przypadków inaczej należy postrzegać podejście ucznia do rozwiązywania problemów matematycznych.

1.2.4 Oznaczenia wykorzystane w tabelach

Odwołując się do konkretnych prac uczniowskich, przyjąłem zasadę, że podaję prawdziwą informację, skąd uczeń pochodzi (w sensie przyporządkowania do określonego Komitetu Okręgowego), natomiast numer ucznia został przeze mnie dodatkowo zakodowany i nie odpowiada jego numerowi na liście uczestników. Dokonałem stosownej permutacji i na przykład WA41 jest to uczeń, który pisał 2 etap w Warszawie, ale nie miał (dokładniej: nie musiał mieć) numeru 41. Uważam, że jest to wystarczający sposób utajnienia prac.

W wielu tabelach wykorzystałem ten sam typ oznaczeń. Nie ma potrzeby, by były one opisywane przy każdej z tabel, zatem zamieszczam je w tym miejscu.

u - liczba uczniów,
br - brak rozwiązania,
bs - brak strategii,
0 - 0 punktów,
2 - 2 punktów,
5 - 5 punktów,
6 - 6 punktów,

l - błąd logiczny,
pw - błąd powierzchownej wiedzy,
z - błąd w wyniku zmęczenia intelektualnego,
w - błąd w efekcie walki o wynik,
bf - świadomy błąd (blef),
$bł$ - błędna strategia,
ds - dobra strategia, która nie została zrealizowana z powodów technicznych,

a - III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu,
b - III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni,
c - IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu,
d - V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie,
e - XIII LO w Szczecinie,
f - XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu,
g - XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie,
h - uczniowie z wszystkich wybranych powyżej szkół,

A - uczniowie, którzy przeszli do III etapu,
B - uczniowie, którzy nie przeszli do III etapu,

x - liczba osób, które stwierdziły, że rozwiązały zadanie, lecz nie rozwiązały go poprawnie,
y - liczba osób, które twierdziły, że rozwiązały zadanie.

2 Analiza rozwiązań zadań na dowodzenie nierówności

2.1 Zadanie 3 z II etapu 57 OM

2.1.1 Treść i rozwiązania zadania

Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab + bc + ca = abc$. Dowieść, że

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1. \tag{6}$$

Rozwiązania

W rozwiązaniu zaprezentowanym przez organizatorów dostrzec można dwa charakterystyczne elementy:
- motyw podstawienia,
- zastosowanie lematu

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} \geq \frac{x + y}{2}. \tag{7}$$

Motyw podstawienia, jako sposób uproszczenia zadania, pojawia się w książce [66] na stronach 27-32 w rozdziale *Przekształcenia* jako podrozdział *Zmienne pomocnicze*.
Podstawienie, zarówno w omawianym zadaniu, jak i ogólnie, ma na celu uproszczenie zapisu lub doprowadzenie nierówności do postaci bardziej przyjaznej lub mającej związek ze znanymi nierównościami. W przypadku omawianego zadania podstawienie nie pomagało w sposób istotny w rozwiązaniu zadania.

Sposób 1

Dzieląc równość $ab + bc + ca = abc$ stronami przez abc otrzymujemy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Podstawmy zatem: $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Wtedy liczby x, y, z są dodatnie, a ich suma wynosi 1. Ponadto

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} = \frac{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4}}{\frac{1}{xy}(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3})} = \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3}.$$

Dowodzona nierówność przybiera zatem postać:

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} + \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} + \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geq 1. \tag{8}$$

Wykażemy:

Lemat 1. *Dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność:*

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} \geq \frac{x + y}{2}. \tag{9}$$

Przekształcając równoważnie powyższą nierówność dostajemy kolejno

$$2x^4 + 2y^4 \geq x^4 + x^3y + y^3x + y^4,$$
$$x^4 - x^3y - y^3x + y^4 \geq 0,$$
$$(x^3 - y^3)(x - y) \geq 0.$$

Uzyskaliśmy zależność prawdziwą dla dowolnych liczb dodatnich x i y, a zatem nierówność (9) jest spełniona.
Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} \geq \frac{y + z}{2} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geq \frac{z + x}{2}. \tag{10}$$

Dodając stronami związki (9), (10) oraz wykorzystując warunek $x + y + z = 1$ otrzymujemy dowodzoną nierówność (6).

□

Komentarz.
Przypomnę w tym miejscu, że dane uczniów zostały zakodowane. Dwie litery opisują okręg, z którego pochodził zawodnik. Natomiast liczba opisuje numer zawodnika na liście, która powstała w wyniku permutacji oryginalnej listy zawodników danego okręgu.
Dwunastu uczniów: KA65, KA75, KR11, KR22, LU55, TO44, WA60, WA91, WA63, WA101, WR55, WR56 przedstawiło rozwiązanie bardzo zbliżone do zaproponowanego przez organizatorów.
Siedmiu uczniów: LU16, TO13, TO36, WA01 (bez efektów pozytywnych) oraz PO30, WA701, WR80 (z pozytywnymi skutkami) stosowało podstawienie, chociaż wybrali inny sposób dowodzenia nierówności.

Istotnym pomysłem w rozwiązaniu zadania jest możliwość szacowania każdego składnika lewej strony nierówności (6) za pomocą wyrażenia uzależnionego tylko od dwóch zmiennych. Jednakże wielu uczniów przyjęło, że taki sposób szacowania jest zbyt prosty i poszukiwali bardziej skomplikowanych sposobów. Na podstawie mojego doświadczenia mogę stwierdzić, że w ocenie wielu uczniów im bardziej skomplikowany jest sposób rozwiązania zadania, tym bardziej jest on „wiarygodny".

Bardzo wielu uczniów wykorzystywało przejścia równoważne. Niektóre z nich były oczywiste, lecz były także takie, które budziły wątpliwości, gdyż brakowało komentarza (i to jest mniejsza usterka) oraz uzasadnienia (usterka poważna).

Lemat 1 stosowało 128 uczniów. Często uczniowie nie traktowali lematu jako odrębnego elementu rozwiązania, ale *de facto* pojawiał się jego dowód w trakcie zapisu rozwiązania zadania.

Warto w tym miejscu zauważyć, że na zawodach stopnia I dla szczebla niższego pierwszej Olimpiady Matematycznej pojawiło się zadanie, którego sformułowanie zbliżone do postaci lematu 1. Przytoczę w tym miejscu to zadanie oraz proponowane przez organizatorów rozwiązanie. Jest to tym bardziej interesujące, że będę analizować jakich sposobów używali uczniowie, którzy dowodzili lemat 1.

Zadanie 17

Dowieść, że jeżeli $a \neq b$, to

$$a^3b + ab^3 < a^4 + b^4.$$

Rozwiązanie (zaproponowane przez organizatorów [125])

Ponieważ

$$(a^4 + b^4) - (a^3b + ab^3) = (a^4 - a^3b) + (b^4 - ab^3) =$$
$$(a-b)a^3 - (a-b)b^3 = (a-b)(a^3 - b^3) = (a-b)(a-b)(a^2 + ab + b^2) =$$
$$(a-b)^2(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^2[(a + \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2],$$

więc jeśli $a \neq b$, to

$$(a^4 + b^4) - (a^3b + ab^3) > 0$$

skąd

$$a^3b + ab^3 < a^4 + b^4.$$

□

Sposób 2

Sposób 2 opierał się na wykorzystaniu na lemacie 2, który był innym sformułowaniem lematu 1 (nie był wykorzystywany motyw podstawienia).

Lemat 2. *Dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność:*

$$\frac{x^4 + y^4}{xy(x^3 + y^3)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right). \tag{11}$$

Rozwiązania sposobami od 2.1 do 2.10 różnią się jedynie sposobem dowodzenia lematu 1. A teraz zaprezentuję sposoby, jakimi dowodzili nierówność (6) uczniowie, którzy wykorzystali lemat 1.

Sposób 2.1

Najpierw wykażemy lemat 2.

Dowód. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$(x^2 + xy + y^2)(x-y)^2 \geq 0.$$

Po wykonaniu przekształceń dostajemy kolejno

$$x^4 - x^3y - y^3x + y^4 \geq 0,$$
$$2(x^4 + y^4) \geq x^4 + x^3y + y^3x + y^4,$$
$$2(x^4 + y^4) \geq (x+y)(x^3 + y^3).$$

Ponieważ liczby x, y są dodatnie otrzymujemy

$$\frac{x^4+y^4}{xy(x^3+y^3)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

□

Korzystając z lematu 2 możemy zapisać nierówność

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

Ponieważ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, otrzymujemy

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$

co kończy dowód.

□

Sposób 2.2

Załóżmy, bez straty ogólności, że $a \geq b$; wtedy też $a^3 \geq b^3$. Na podstawie twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych dostajemy:

$$a^4+b^4 = \begin{bmatrix} a^3 & b^3 \\ a & b \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^3 & b^3 \\ b & a \end{bmatrix} = a^3b+b^3a$$

Nierówność $a^4+b^4 \geq a^3b+b^3a$ jest równoważna nierówności $\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Dalszy ciąg dowodu jak w rozwiązaniu 2.1.

□

Sposób 2.3

Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego o nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb nieujemnych dostajemy:

$$a^4+b^4 = \frac{a^4+a^4+a^4+b^4}{4}+\frac{b^4+b^4+b^4+a^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^{12}b^4}+\sqrt[4]{b^{12}a^4} = a^3b+b^3a$$

Dalszy ciąg dowodu jak w rozwiązaniu 2.1.

□

Sposób 2.4

$a^4+b^4-a^3b-b^3a$ *jest różnicą dwóch wielomianów symetrycznych* $W_{(4,0)}(a,b)-W_{(3,1)}(a,b)$. *Ciąg* $(4,0)$ *majoryzuje ciąg* $(3,1)$ *(*$(4,0) \succ (3,1)$*) ponieważ*

$$4 > 3$$

$$4+0 = 3+1.$$

Na podstawie nierówności Muirheada otrzymujemy $W_{(4,0)}(a,b) \geq W_{(3,1)}(a,b)$.

Dalszy ciąg dowodu jak w rozwiązaniu 2.1.

□

Komentarz.
Sposób 2.4 zaproponowało trzech uczniów: KR90, TO91, WA27. Wykorzystanie twierdzenia Muirheada do dowodu tak prostej nierówności może świadczyć o treningu ukierunkowanym na stosowanie algorytmów.

Sposób 2.5

Najpierw wykazujemy

Lemat 3. *Dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, ..., x_n$ oraz p, q takich, że $p > q > 0$ zachodzi nierówność między średnimi potęgowymi:*

$$\left(\frac{x_1^p + ... + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{x_1^q + ... + x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Wykorzystując dwukrotnie lemat 3 otrzymujemy:

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} \geq \frac{(a^3 + b^3)\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}}{ab(a^3 + b^3)} \geq \frac{a + b}{2ab}.$$

Dalszy ciąg dowodu jak w rozwiązaniu 2.1.

□

Komentarz.
Sposób 2.5 przedstawiło sześciu uczniów, z czego czterech zrobiło to poprawnie: ŁÓ72, WA92, WA23, WA701. Dwóch uczniów: WA501 i WA84 było bardzo blisko rozwiązania, ale porzucili oni dowód bez osiągnięcia efektu. Zwraca uwagę fakt, że trzech uczniów: WA701, WA84 i WA23 było uczniami XIV LO we Warszawie.

Sposób 2.6

Najpierw udowodnimy

Lemat 4. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b > 0$ i dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi nierówność*

$$\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \geq \frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}.$$

Dowód. Mnożymy nierówność z tezy lematu 4 stronami przez $(a^n + b^n)(a^{n-1} + b^{n-1})$ i otrzymujemy

$$a^{2n} + b^{2n} + a^{n+1}b^{n-1} + a^{n-1}b^{n+1} \geq a^{2n} + b^{2n} + 2a^n b^n$$

Wówczas dostajemy nierówność prawdziwą

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Ponieważ wszystkie przejścia były równoważne, teza została udowodniona. □

Wykorzystując lemat 4 dostajemy

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} \geq \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \geq \frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Dalszy ciąg dowodu jak w rozwiązaniu 2.1.

□

Komentarz.
Sposób 2.6 zaproponował tylko jeden uczeń WA79.
Było to jedyne rozwiązanie opierające się na uogólnieniu lematu.
Wykorzystując ten sposób można podać uogólnienie zadania 3.2.57:

Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab + bc + ca = abc$. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{ab(a^n+b^n)} + \frac{b^{n+1}+c^{n+1}}{bc(b^n+c^n)} + \frac{c^{n+1}+a^{n+1}}{ca(c^n+a^n)} \geq 1. \tag{12}$$

Dowód. Cały dowód indukcyjny opiera się na lemacie 4.

□

Sposób 2.7

Zapiszmy

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} = \frac{(a+b)(a^3+b^3)-ab(a^2+b^2)}{a^3+b^3} =$$

$$= a+b-ab\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3} = a+b-ab\frac{1}{\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}} =$$

$$= a+b-ab\frac{1}{a+b-ab\frac{a+b}{a^2+b^2}} =$$

$$a+b-ab\frac{1}{a+b-ab\frac{1}{a+b-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}}.$$

Z nierówności między średnią harmoniczną i arytmetyczną dostajemy

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} \geq a+b-ab\frac{1}{a+b-ab\frac{1}{a+b-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}} =$$

$$= a+b-ab\frac{1}{a+b-ab\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}} \geq$$

$$a+b-ab\frac{1}{a+b-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}} \geq$$

$$a+b-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geq \frac{1}{2}(a+b).$$

Dalszy ciąg dowodu jak w rozwiązaniu 2.1.

□

Komentarz.
Sposób 2.7 zaproponował tylko jeden uczeń: WA811. W rozwiązaniu zwraca uwagę sposób przekształcenia $\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$ za pomocą ułamków łańcuchowych.

Sposób 2.8

Na podstawie nierówności Czebyszewa otrzymujemy:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leqslant \frac{a^4+b^4}{2}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Dalszy ciąg dowodu jak w rozwiązaniu 2.1.

□

Komentarz.
Rozwiązanie 2.8 zaproponowało dwóch uczniów: PO01 oraz SZ04.

Sposób 2.9

Skorzystamy z twierdzenia:

Twierdzenie. *Niech funkcja różniczkowalna n zmiennych $f(x_1, ..., x_n)$ spełnia następujące warunki:*
1. dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$: $f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ...x_n) \geq 0$ dla nieujemnych liczb $x_1, ..., x_n$,
2. dla dowolnych nieujemnych liczb $x_1, ..., x_n$ zachodzi nierówność:

$$f'_{x_1}(x_1, ..., x_n) + f'_{x_2}(x_1, ..., x_n) + ... + f'_{x_n}(x_1, ..., x_n) \geq 0.$$

Wówczas dla dowolnych nieujemnych liczb $x_1, ..., x_n$ zachodzi nierówność

$$f(x_1, ..., x_n) \geq 0.$$

Niech $f(a, b) = a^4 + b^4 - a^3b - b^3a$.
Wówczas $f(0, b) = b^4 > 0$ oraz $f(a, 0) = a^4 > 0$.
$f'_a(a, b) + f'_b(a, b) = (4a^3 - 3a^2b - b^3) + (4b^3 - 3b^2a - a^3) = 3(a + b)(a - b)^2 \geq 0$.
Na podstawie powyższego twierdzenia udowodniliśmy lemat 2.

Dalszy ciąg dowodu jak w rozwiązaniu 2.1.

□

Komentarz.
Rozwiązanie 2.9 przedstawił uczeń LU90. Można powiedzieć, że rozwiązanie charakteryzuje się przerostem formy nad treścią. Uczeń poznał takie twierdzenie na kółku matematycznym lub w trakcie samodzielnej lektury książek olimpijskich i potrafił je poprawnie zastosować. Trudno oczywiście dociec czy uczeń rozumie to twierdzenie w pełni, np. czy wie, jak się je dowodzi i czy rozumie pojęcie funkcji różniczkowalnej wielu zmiennych.

Sposób 2.10

Jeżeli $a = b$, to $a^4 + b^4 = a^3b + b^3a$.
Jeżeli $a \neq b$, to możemy założyć, że $a > b$. Wówczas istnieje $t > 0$, takie że $a = b + t$.
Zapiszmy równoważnie wyrażenie

$$a^4 + b^4 - a^3b - b^3a = a^4 + (a+t)^4 - a^3(a+t) - (a+t)^3a = 3a^2t^2 + 3at^3 + t^4 \geq 0.$$

Dalszy ciąg dowodu jak w rozwiązaniu 2.1.

□

Komentarz.
Rozwiązanie 2.10 przedstawili dwaj uczniowie: WR20 oraz WR80.

Sposób 3

Sposób 3 opiera się na przekształceniu nierówności z zadania do postaci jednorodnej, a następnie uporządkowanie wyrażenia w składniki, z których każdy jest nieujemny.

Nierówność z tezy zadania mnożymy stronami przez abc, a następnie prawą stronę zamieniamy na wyrażenie $ab + bc + ca$. Potem mnożymy stronami otrzymaną nierówność przez $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3)$. Po wykonaniu długich przekształceń otrzymujemy nierówność:

$$a^7b^4 + a^7c^4 + b^7a^4 + b^7c^4 + c^7a^4 + c^7b^4 \geq a^6b^4c + a^6c^4b + b^6a^4c + b^6c^4a + c^6a^4b + c^6b^4a \tag{13}$$

Kolejno przekształcamy powyższą nierówność równoważnie:

$$a^6b^4(a-c) + a^4b^6(b-c) + a^6c^4(a-b) + a^4c^6(c-b) + b^4c^6(c-a) + c^4b^6(b-a) \geq 0$$

$$(a-b)(a^6c^4 - b^6c^4) + (a-c)(a^6b^4 - c^6b^4) + (b-c)(b^6a^4 - c^6a^4) \geq 0$$

$$c^4(a-b)^2(a^2+ab+b^2)(a^3+b^3) + b^4(a-c)^2(a^2+ac+c^2)(a^3+c^3) +$$
$$+a^4(b-c)^2(c^2+cb+b^2)(c^3+b^3) \geq 0.$$

Ostatnia nierówność, wobec $a, b, c > 0$, jest oczywiście prawdziwa.

□

Sposób 4

Sposób 4 jest ściśle powiązany ze sposobem 3. Otóż nierówność (13) wynika bezpośrednio z twierdzenia Muirheada.

Ciąg $(7, 4, 0)$ majoryzuje ciąg $(6, 4, 1)$, a zatem dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność $W_{(7,4,0)}(a, b, c) \geq W_{(6,4,1)}(a, b, c)$, co kończy dowód.

□

Komentarz.
Ten charakterystyczny sposób rozwiązania został przedstawiony przez 24 uczniów: KR90, KR40, KR41, KR32, KR63, KR14, KR34, KR45, KR55 z V LO w Krakowie (KR63 dostał 2 punkty, KR55 - 0 punktów), WA22, WA90, WA65, WA68, WA611 z XIV LO w Warszawie, WA05, WA15 z I LO w Łomży, LU37, LU19 z LO w Stalowej Woli, WA901, WA36 z VI LO w Warszawie, GD12 z III LO w Gdyni, LU05 z I LO w Lublinie, T025 z V LO w Olsztynie, TO66 z IV LO w Toruniu.
Większość wymienionych szkół to szkoły, które mają ustaloną renomę olimpijską (V LO w Krakowie, XIV LO w Warszawie) oraz znane ze znakomitych nauczycieli olimpijskich. Znajomość przez uczniów twierdzenia Muirheada jest związana zapewne z działaniem odpowiedniego treningu olimpijskiego.
Zwłaszcza, że metoda zastosowana w tym zadaniu sprowadza się do prostego algorytmu: doprowadź do wyrażenia jednorodnego, a następnie wykorzystaj twierdzenie Muirheada.

Sposoób 5

Równość z założenia przekształcamy do postaci $\frac{c-1}{c} = \frac{a+b}{ab}$. *Wówczas wyrażenie z lewej strony nierówności z tezy przedstawiamy następująco:*

$$\frac{(c-1)(a^4+b^4)}{c(a^4+b^4+a^3b+b^3a)} + \frac{(a-1)(b^4+c^4)}{a(b^4+c^4+b^3c+c^3b)} + \frac{(b-1)(a^4+c^4)}{b(a^4+c^4+a^3c+c^3a)}.$$

Wykorzystując nierówność $a^4+b^4 \geq a^3b+b^3a$ *powyższe wyrażenie jest mniejsze lub równe*

$$\frac{(c-1)(a^4+b^4)}{2c(a^4+b^4)} + \frac{(a-1)(b^4+c^4)}{2a(b^4+c^4)} + \frac{(b-1)(a^4+c^4)}{2b(a^4+c^4)}.$$

Powyższe wyrażenie jest nieujemne, co kończy dowód.

□

Komentarz.
Sposób 5 zaproponował tylko jeden uczeń: WA88.

Sposób 6

Sposób 6 jest oparty na wykorzystaniu nierówności Jensena.

Zdefiniujmy funkcje: $f(x) = \frac{1+x^4}{1+x^3}$ *oraz* $g(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$ *dla* $x \in \mathbb{R}_+$.

Wykażemy, że dla $x \in \mathbb{R}_+$ *zachodzi* $f(x) \geq g(x)$.

Dowód. Nierówność $x(x+1)(x-1)^2 \geq 0$ *jest prawdziwa dla* $x \in \mathbb{R}_+$.
Przekształcając równoważnie otrzymujemy

$$x^4 - x^3 - x^2 + x \geq 0$$

$$x^5 + x^4 + x + 1 \geq x^5 + x^3 + x^2 + 1$$

$$(1+x^4)(1+x) \geq (1+x^3)(1+x^2)$$

$$\frac{1+x^4}{1+x^3} \geq \frac{1+x^2}{1+x}$$

co kończy dowód.

□

Wykażemy, że $g''(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}_+$.

Dowód.

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$

$$g''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$$

Zatem dla $x \in \mathbb{R}_+$ $g''(x) \geq 0$. □

Przystępujemy do dowodu nierówności:

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{c^4 + b^4}{cb(c^3 + b^3)} + \frac{a^4 + c^4}{ac(a^3 + c^3)} =$$

$$\frac{1}{b} f\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{c} f\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{a} f\left(\frac{a}{c}\right) \geq \frac{1}{b} g\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{c} g\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{a} g\left(\frac{a}{c}\right) \geq$$

$$g\left(\frac{1}{b} \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{c} \cdot \frac{c}{b} + \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{c}\right) = g\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = g(1) = 1.$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności Jensena, gdyż funkcja g jest funkcja wypukłą.

□

Komentarz.
Sposób 6 było autorstwa ucznia WR51, który był uczniem II LO w Opolu. Było to jedyne poprawne zastosowanie nierówności Jensena do udowodnienia nierówności z zadania.

Sposób 7

Rozwiązanie tym sposobem wykorzystuje twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych w odniesieniu do całej nierówności.

Przyjmijmy, że $a \leqslant b \leqslant c$. Wówczas

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}.$$

Niech

$$X = \frac{a^3}{a^3 + c^3} + \frac{b^3}{b^3 + c^3}, Y = \frac{a^3}{a^3 + b^3} + \frac{c^3}{b^3 + c^3}, Z = \frac{b^3}{a^3 + b^3} + \frac{c^3}{a^3 + c^3}.$$

Wówczas $X \leqslant Y \leqslant Z$. Zapiszmy:

$$3 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{a^3}{a^3 + b^3} + \frac{b^3}{a^3 + b^3} + \frac{b^3}{b^3 + c^3} + \frac{c^3}{b^3 + c^3} + \frac{a^3}{a^3 + c^3} + \frac{c^3}{a^3 + c^3}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(X + Y + Z) =$$

$$\left(\frac{1}{a}Z+\frac{1}{b}Y+\frac{1}{c}X\right)+\left(\frac{1}{a}Y+\frac{1}{b}X+\frac{1}{c}Z\right)+\left(\frac{1}{a}X+\frac{1}{b}Z+\frac{1}{c}Y\right)\leqslant$$
$$3\left(\frac{1}{a}Z+\frac{1}{b}Y+\frac{1}{c}X\right)=\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}.$$

Ostatnia nierówność wynika z dwukrotnego zastosowania twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych dla ciągów $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ *oraz* (X,Y,Z).

□

Komentarz.
Sposób 7 zaprezentował uczeń TO35 z GiL w Toruniu i było to jedyne poprawne zastosowanie twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych w odniesieniu do dowodu całej nierówności (czyli bez wykorzystania w lemacie 1, jak np. w rozwiązaniu 2.2).

2.1.2 Losy uczniów, którzy rozwiązali zadanie nietypowo

Postanowiłem przyjrzeć się bliżej losom uczniów, którzy zaprezentowali nietypowe (bardzo rzadko występujące) sposoby rozwiązania omawianego zadania.

Uczeń WA79, który jako jedyny zaprezentował sposób 2.6, był uczniem II klasy gimnazjum we Warszawie. W II etapie uzyskał 12 punktów (6, 0, 6, 0, 0, 0), dostał się do finału, ale w zawodach III stopnia uzyskał 0 punktów. W 58 OM w II etapie uzyskał 24 punkty, a w III etapie 8 punktów.

Uczeń WA811, który jako jedyny zaprezentował sposób 2.7, był uczniem klasy II w III LO w Białymstoku. Omawiane zadanie było jedynym, jakie udało mu się rozwiązać w II etapie 57 OM. Uczeń próbował swoich sił również w 58 OM, ale w II etapie uzyskał 13 punktów, co nie dało przepustki do finału.

Uczeń PO01, który zaprezentował sposób 2.8, był uczniem III klasy w VIII LO w Poznaniu. W II etapie 57 OM zdobył 8 punktów (2, 0, 6, 0, 0, 0) i nie awansował do finału.

Uczeń SZ04, który zaprezentował sposób 2.8, był uczniem II klasy XIII LO w Szczecinie. W II etapie zdobył 18 punktów (6, 0, 6, 0, 6, 0), ale w III etapie uzyskał 0 punktów. Uczeń próbował swoich sił również w 58 OM: w II etapie uzyskał 20 punktów, a w III etapie: 6 punktów.

Uczeń WR20, który zaprezentował sposób 2.10, był uczniem III klasy XIV LO we Wrocławiu. W II etapie 57 OM zdobył 18 punktów (6, 0, 6, 6, 0, 0), ale w III etapie uzyskał 2 punkty (0, 2, 0, 0, 0, 0).

Uczeń WR80, który zaprezentował sposób 2.10, był uczniem III klasy III LO we Wrocławiu. W II etapie 57 OM zdobył 11 punktów (0, 0, 6, 5, 0, 0) i nie dostał się do finału OM.

Uczeń WA88, który zaprezentował sposób 5, był uczniem III klasy III LO w Białymstoku. W II etapie 57 OM rozwiązał rozwiązał tylko omawiane zadanie.

Uczeń WR51, który zaprezentował sposób 6, był uczniem III klasy II LO w Opolu. W II etapie 57 OM zdobył 24 punkty (6, 0, 6, 6, 0, 6), a w III etapie 8 (0, 2, 0, 0, 0, 6).

Uczeń TO35, który zaprezentował sposób 7, był uczniem 5 klasy Liceum Akademickiego w Toruniu. W II etapie 57 OM zdobył 18 punktów (6, 0, 6, 6, 0, 0), a w III etapie uzyskał 16 punktów (6, 2, 0, 6, 0, 2), za co otrzymał wyróżnienie.

Wnioski.
Wśród dziewięciu uczniów, którzy zaprezentowali nietypowe rozwiązania sześciu przeszło do III etapu, z czego czterech uzyskało 0 punktów, a tylko jeden został wyróżniony.

Potwierdza to tezę, że uczniowie, którzy prezentują nietypowe rozwiązania, nie osiągają sukcesu olimpijskiego. To niedobry objaw. Łatwo - a posteriori - zrozumieć, dlaczego występuje to w tym zadaniu. Jest to zadanie, które premiuje osoby specjalnie kształcone. Te osoby stosują po prostu znaną sobie technikę i dosyć łatwo dochodzą do rezultatu. Nie marnują czasu i sił na samodzielne dochodzenie do rozwiązania.

W tabeli 9 przedstawiam wyniki dotyczące stosowania poszczególnych typów rozwiązania w okręgach.

W tabeli 10 przedstawiam wyniki dotyczące stosowania poszczególnych typów rozwiązania w wybranych szkołach.

Obserwacje

1. Sposoby 2.4, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 5, 6, 7 rozwiązania zadania 3.2.57 pojawiały się incydentalnie, co oznacza, że prawdopodobnie nie były efektem treningu, lecz własnego pomysłu ewentualnie samodzielnego studiowania literatury.
2. Sposób 1 (czyli rozwiązanie zaproponowane przez organizatorów) nie okazał się najczęściej realizowanym (ze względu na motyw podstawienia, który chociaż się przewijał w rozwiązaniach nie miał istotnego wpływu na sposób rozwiązania). Pomijając motyw podstawienia można uznać, że sposób 1 i sposoby typu 2 są identyczne. Wówczas stanowią one 65% wszystkich rozwiązań (zliczam tu uczniów, którzy mieli strategię rozwiązania, chociaż niekoniecznie rozwiązali zadanie lub dostali 5 lub 6 punktów).
3. Charakterystyczne jest występowanie określonych typów rozwiązań: sposób 4 (związany z nierównością Muirheada) występuje przede wszystkim w okręgu krakowskim i warszawskim, sposób 2.5 (związany z nierównościami między średnimi potęgowymi) występuje przede wszystkim w okręgu warszawskim.
4. W siedmiu wybranych szkołach (wybrałem szkoły, które miały co najmniej piętnastu uczniów w zawodach drugiego stopnia) właściwie nie pojawiły się rozwiązania nietypowe. Prawie wszyscy uczniowie z tych szkół rozwiązywali sposobem 1 lub 2 (obie metody uznałem za równoważne) lub sposobami 3 lub 4 (oba związane były z wykorzystaniem jednorodności nierówności oraz twierdzeniem Muirheada). Oznaczać to może znaczącą rolę treningu, jakiemu zostali poddani uczniowie z tych szkół. Inną ciekawą obserwacją jaką można poczynić, to fakt, że błędne wykorzystanie nierówności Muirheada zdarzyło się tylko uczniom z V LO w Krakowie oraz XIV LO w Warszawie.

Rozwiązanie	u	1	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	2.10	3	4	5	6	7
Polska	565	12	66	32	7	3	6	1	1	2	1	2	43	24	1	1	1
gdański	28	0	1	5	2	0	0	0	0	0	0	0	6	1	0	0	0
katowicki	63	2	8	8	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0
krakowski	67	2	10	2	1	1	0	0	0	0	0	0	2	9	0	0	0
lubelski	60	1	12	2	0	0	0	0	0	0	1	0	6	3	0	0	0
łódzki	34	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0
poznański	23	0	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
szczeciński	46	0	8	4	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
toruński	67	1	6	2	2	1	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	1
warszawski	121	4	8	8	0	1	5	1	1	0	0	0	14	9	1	0	0
wrocławski	59	1	10	0	1	0	0	0	0	0	0	2	5	0	0	1	0

Tabela 9: **Sposoby rozwiązywania zadania 3.2.57 w poszczególnych okręgach.** u - liczba uczestników.

Rozwiązanie	1		2.1		2.2		2.3		2.4		2.5		2.6		2.7		2.8		2.9		2.10		3		4		5		6		7	
a	0	0	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	4	4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	6	1	1	0	0	0	0	0	0
c	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
d	2	2	6	6	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	9	0	0	0	0	0	0
e	0	0	3	3	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	1	1	6	6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0
g	2	2	4	4	2	2	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	6	3	5	0	0	0	0	0	0

Tabela 10: **Sposoby rozwiązywania zadania 3.2.57 w wybranych szkołach. Pierwsza liczba oznacza liczbę poprawnych rozwiązań daną metodą; liczba druga oznacza liczbę wszystkich rozwiązań daną metodą.**

2.1.3 Przykłady błędów

Poniżej prezentuję przegląd błędów, jakie popełnili uczniowie rozwiązujący zadanie 3 z II etapu 57 OM. Przedstawiam przykłady charakterystycznych i typowych błędów dla danej kategorii.

1. Błędy przypadkowe

   Uczeń SZ60 napisał:
   Udowodnię najpierw, że dla każdego $x, y > 0$ zachodzi nierówność:

$$\frac{x^4+y^4}{xy(x^3+y^3)} \geq \frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}$$
$$2x^4+2y^4 \geq (x+y)(x^3+y^3)$$
$$2x^4+2y^4 \geq x^4+y^4+x^3y+y^3x$$
$$x^4+y^4-x^3y-y^3x \geq 0$$
$$(x-y)(x^3-y^3) \geq 0$$
$$(x-y)(x-y)(x^2-xy+y^2) \geq 0$$
$$(x-y)^2((x-y)^2+xy) \geq 0$$

   Jeśli tak, to:

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{c^4+b^4}{cb(c^3+b^3)}+\frac{a^4+c^4}{ac(a^3+c^3)} \geq$$
$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}=\frac{ab+bc+ac}{abc}=1$$

   co należało wykazać.

   Komentarz.
   Uczeń SZ60 popełnił typowy dla tego zadania błąd zapisu:
   $(x^3-y^3) = (x-y)(x^2-xy+y^2)$, który jednak można uznać za błąd przypadkowy, gdyż uczeń przeprowadził poprawny dowód nierówności i na pewno znał wzór na rozkład różnicy trzecich potęg. Pomyłka zapewne nie została wykryta przez ucznia, gdyż nie zburzyła koncepcji rozwiązania zadania.

2. Błędy krytyczne

   Uczeń GD41 dokonał następującego przeliczenia $(a^3+b^3)(ab-a-b) = -a^4-b^4$ i na nim oparł cały dowód.

   Uczeń KA30 nierówność z tezy przekształcił za pomocą tożsamości $\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} = a+b$ i łatwo zakończył rozwiązanie zadania.

   Uczeń KA50 wykorzystał rozkład $x^4+y^4 = (x^2+y^2)(x^2+y^2)$, co i tak nie doprowadziło go do rozwiązania.

Uczeń ŁÓ31 przekształcił nierówność z tezy do postaci

$$\frac{2ab}{a^3+b^3}+\frac{2c}{b^3+c^3}+\frac{2ca}{c^3+a^3}\leq 1$$

a następnie napisał, że udowodni nierówność i zrobił to tak:
np. $a=2, b=c=4$

$$L=\frac{2\cdot 2\cdot 4}{8+64}+\frac{2\cdot 4\cdot 4}{64+64}+\frac{2\cdot 2\cdot 4}{8+64}=\frac{8}{72}+\frac{32}{128}+\frac{8}{72}=\frac{17}{36}$$

$$L\leq 1$$

$$L\leq P$$

co należało wykazać.

Uczeń SZ10 nierówność z tezy postanowił pomnożyć stronami przez $a^3+b^3+c^3$ i otrzymał:

$$c^4(a^4+b^4)+b^4(a^4+c^4)+a^4(b^4+c^4)\geq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

Uczeń SZ51, podobnie jak KA30, wykorzystał fałszywą tożsamość
$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}=a+b$ a następnie uzyskaną nierówność

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{a+c}{ac}+\frac{b+c}{bc}\geq 1$$

udowodnił na przykładzie $a=3, b=2, c=6$ i skomentował swój dowód słowami:
Tu jeszcze dokładniej widać, że zachodzi dana nierówność. Zostało dowiedzione o jej prawdziwości właśnie przez ten przykład.

Uczeń SZ82 dokonał następującego skrócenia $\frac{b(c-1)-c}{b^2(c-1)}=\frac{-c}{b}$ i całe rozumowanie oparł na tym przekształceniu.

Uczeń SZ13 wykorzystał następującą implikację:
jeżeli $a\geq b\wedge x\geq y$ to $\frac{a}{x}\geq\frac{b}{y}$.
Uczeń SZ54 wykorzystał zależność:
jeżeli $x\geq y$ to $\frac{1}{x}\geq\frac{1}{y}$.

Szczególnie interesujący przykład błędu krytycznego wystąpił u ucznia LU30.
Uczeń doprowadził nierówność z tezy w sposób równoważny do postaci:

$$\frac{b^2(b-a)}{a(a^3+b^3)}+\frac{c^2(c-b)}{b(b^3+c^3)}+\frac{a^2(a-c)}{c(a^3+c^3)}\geq 0$$

a następnie skomentował:
Korzystając z tego, że $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$ *otrzymujemy, że wystarczy wykazać taką nierówność:*

$$\sqrt[3]{\frac{b^2(b-a)}{a(a^3+b^3)}\cdot\frac{c^2(c-b)}{b(b^3+c^3)}\cdot\frac{a^2(a-c)}{c(a^3+c^3)}}\geq 0.$$

Komentarz.
Błędy krytyczne w pracach uczestników olimpiady występują rzadko; powyżej przedstawiłem wszystkie błędy, które zakwalifikowalifikowałem jako krytyczne, czyli takie, które nie powinny przytrafiać się olimpijczykom.
Błędy krytyczne należy uznać za błędy rzadkie i niespecyficzne dla uczestników olimpiady. Pokazuję je, ale raczej na zasadzie wyjątku i nie będę dalej skupiać na nich uwagi.
Najczęściej pojawiały się błędne tożsamości algebraiczne, świadczące o braku podstawowych umiejętności matematycznych oraz dowody przez przykład. Dowód przez przykład świadczy o braku kultury matematycznej, jednak ten typ błędu pojawił się tylko w pracach dwóch uczniów.
Najwięcej błędów krytycznych wystąpiło w okręgu szczecińskim, przy czym trzech uczniów pochodziło z XIII LO w Szczecinie. Powinienem jeszcze skomentować błąd ucznia LU30. Otóż dla mnie zastosowanie nierówności Cauchy'ego dla liczb ujemnych jest błędem krytycznym, chociaż można go także uznać za błąd powierzchownej wiedzy.

3. Błędy logiczne.

Uczeń KA56 napisał:

$\frac{1}{a} \leq \frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} \Leftrightarrow a^4b \leq a^5$
$\frac{1}{b} \leq \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} \Leftrightarrow b^4c \leq b^5$
$\frac{1}{c} \leq \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \Leftrightarrow c^4a \leq c^5$

Sumując stronami nierówności z kolumn I i II mamy nierówność:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \Leftrightarrow$$
$$a^4b+cb^4+ac^4 \leq a^5+b^5+c^5$$

czyli

$$1 \leq \frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \Leftrightarrow$$
$$a^4b+cb^4+ac^4 \leq a^5+b^5+c^5$$

Jeżeli udowodnimy prawdziwość ostatniej nierówności to udowodnimy tym samym nierówność z tezy.

Komentarz.
Każda z równoważności, które uczeń zapisał na początku, jest prawdziwa, lecz spośród trzech nierówności, które występują po prawych stronach równoważności, przynajmniej jedna jest fałszywa.

Uczeń WA34 zaprezentował rozwiązanie podobne do rozwiązania ucznia KA56, ale nieco obszerniej je skomentował:

Nierówność $a^4b + cb^4 + ac^4 \leq a^5 + b^5 + c^5$ *jest prawdziwa z twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych. Należy podkreślić, że udowodniliśmy, że prawdziwa jest nierówność dopiero PO ZSUMOWANIU* [3] *nierówności (które niekoniecznie są prawdziwe). Skoro wiemy, że SUMA* [4] *tych trzech nierówności (po dodaniu stronami) jest prawdziwa, to można napisać*

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq$$

$$\frac{bc}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{ab}{abc} = 1.$$

Uwaga

Układ trzech nierówności nie musi być prawdziwy. Udowodniłem jedynie, że pewna operacja na tych nierównościach (dodanie ich stronami) daje ZAWSZE [5] *poprawny wynik, bez względu na to czy każda z nich z osobna jest poprawna. Ponieważ zostało udowodnione, że można te trzy nierówności dodać stronami otrzymując coś prawdziwego, takżesz zrobiłem otrzymując tezę.*

Komentarz.
Uczeń wyczuwał, że coś jest nie tak, ale nie dostrzegał swojego błędu. Temu trzeba przypisać próbę przekonania oceniających, że rozwiązanie jest poprawne.

Dziesięciu uczniów popełniło błędy logiczne i wszystkie były analogiczne do błędów przykładowych, które podałem powyżej. Podobnie jak błędy krytyczne, należy uznać błędy logiczne jako wyjątkowe dla prac uczestników OM.

4. Błędy powierzchownej wiedzy

Uczeń KR63 początkowo przeprowadzał szacowania z użyciem nierówności między średnimi, które nie prowadziły do żadnych sensownych wniosków. Zajęło mu to całą stronę. Wobec braku efektów zmienił pomysł i przekształcił nierówność z tezy zadania do postaci:

$$a^7b^4 + a^7c^4 + b^7a^4 + b^7c^4 + c^7a^4 + c^7b^4 \geq$$

$$a^6b^3c + a^6c^3b + b^6a^3c + b^6c^3a + c^6a^3b + c^6b^3a$$

W wyniku błędu rachunkowego otrzymał inną nierówność niż ta, której się spodziewał. Jednak napisał:
A ostatnia nierówność jest prawdziwa na mocy nierówności Müirheada dla wielomianów symetrycznych $W_{(a,b,c)}(7,4,0) > W_{(a,b,c)}(6,3,1)$*, bo* $7 > 6$*,* $7+4 > 6+3$.
Co ostatecznie dowodzi tezy zadania.

[3] podkreślenie ucznia - JD
[4] podkreślenie ucznia - JD
[5] podkreślenie ucznia - JD

Komentarz.
W wyniku błędu rachunkowego uczeń otrzymał nierówność, która nie pasowała do twierdzenia Muirheada. Wobec tego uczeń „dostosował" twierdzenie do swoich potrzeb (brak u niego refleksji, czy zmiana ta nie powoduje zmiany prawdziwości twierdzenia). Ponadto stosuje błędny zapis majoryzacji i źle ją wyjaśnia. Właściwie nie zna prawidłowych założeń twierdzenia Muirheada. Błędna jest także teza, gdyż nierówność powinna być słaba. Można stwierdzić, że uczeń spotkał się kiedyś z twierdzeniem Muirheada, ale nie zapamiętał dokładnej jego wypowiedzi. Najprawdopodobniej wiedział w jakich sytuacjach można stosować to twierdzenie. Można przypuszczać, że uczeń opanował mechaniczne stosowanie pewnego twierdzenia, ale nie rozumie jego sposobu działania. Gdyby znał dowód twierdzenia Muirheada, zapewne nie popełniłby takiego błędu.

Uczeń WA76 po odpowiednim przekształceniu nierówności z tezy konstruuje funkcję

$$f(x) = \frac{x^4 + y^4 - \frac{1}{3}x^4y - \frac{1}{3}xy^4}{x^4y + y^4x}$$

Uczeń obliczył pochodną i zapisał konkluzję: *Z czego chyba nic nie wynika.*

Komentarz.
Uczeń miał jakieś skojarzenia, w których do dowodu nierówności można wykorzystać własności pochodnych wielu zmiennych, bo pisał: *lewa strona nierówności jest dodatnia, jeśli pochodna cząstkowa po* a, b, c *jest dodatnia.* Trudno ustalić, skąd wziął pomysł i jak chciał go realizować, ale jego rozwiązanie wygląda na szukanie ostatniej deski ratunku. Jest tym bardziej zaskakujące, że uczeń dostał się z dobrym wynikiem (24 punkty) do zawodów stopnia III. W finale zdobył tylko 2 punkty.

5. Błędy wynikające ze zmęczenia intelektualnego

Uczeń WR24 po przekształceniach otrzymał nierówność równoważną nierówności z tezy zadania:

$$\frac{c(a^4+b^4)-a^4b-ab^4}{a^3+b^3} + \frac{a(b^4+c^4)-b^4c-bc^4}{b^3+c^3} + \\ + \frac{b(c^4+a^4)-a^4c-ac^4}{c^3+a^3} \geq 0.$$

W celu wykazania powyższej nierówności, przy założeniu $a \geq b \geq c$, dokonuje szacowania:

$$\frac{c(a^4+b^4)-a^4b-ab^4}{a^3+b^3} + \frac{a(b^4+c^4)-b^4c-bc^4}{b^3+c^3} + \\ + \frac{b(c^4+a^4)-a^4c-ac^4}{c^3+a^3} \geq$$

$$\frac{c(a^4+b^4)-a^4b-ab^4+a(b^4+c^4)-b^4c-bc^4+b(c^4+a^4)-a^4c-ac^4}{b^3+a^3} = 0.$$

Komentarz.
Szacowanie jest błędne, gdyż licznik ostatniego ułamka jest ujemny. Jest to błąd, który może umknąć uwadze zawodnika, gdyż operuje on na wyrażeniach algebraicznych, a nie na liczbach. Stąd błąd szacowaniu nie jest widoczny na „pierwszy rzut oka".

Bardzo ciekawa jest praca ucznia W501. Rozwiązanie opiera się na metodzie *średnich potęgowych*. Uczeń napisał:

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geq$$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}}{ab}+\frac{\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}}{bc}+\frac{\sqrt[3]{\frac{a^3+c^3}{2}}}{ac}.$$

Ze średnich potęgowych dla liczb nieujemnych x, y wynika, że $\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\geq\frac{x+y}{2}$.

Wykorzystując tę nierówność otrzymujemy:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}}{ab}+\frac{\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}}{bc}+\frac{\sqrt[3]{\frac{a^3+c^3}{2}}}{ac}\geq\frac{\frac{a+b}{2}}{ab}+\frac{\frac{b+c}{2}}{bc}+\frac{\frac{c+a}{2}}{ca}$$

W tym momencie uczeń był o krok od końca dowodu - wystarczyło tylko zastosować równość z założenia. Tymczasem rozwiązujący napisał dalej:

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{ab}+\frac{\frac{b+c}{2}}{bc}+\frac{\frac{c+a}{2}}{ca}\geq\frac{b+c}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)\geq$$

$$\frac{b+c}{2}\frac{9}{ab+bc+ca}=\frac{b+c}{2}\frac{9}{abc}$$

W tym momencie uczeń dochodzi do wniosku, że rozumowanie nie doprowadzi do poprawnego dowodu i przekreśla całe rozumowanie.

Komentarz.
Widoczny w postępowaniu ucznia jest brak wiary we własne siły. Być może ujawnia się tu także *brak kondycji* czyli *zmęczenie intelektualne*. W przypadku tego rozwiązania można mówić raczej o braku poprawnego rozwiązania niż o błędzie.

6. Błędy spowodowane chęcią zrobienia zadania za wszelką cenę.

Uczeń KR15 do dokończenia dowodu tezy potrzebował wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{abc}{a^3+b^3}\geq\frac{1}{2}.$$

Nierówność ta jest fałszywa (np. dla $a=b=4, c=2$), lecz uczeń za wszelką cenę pragnął ją udowodnić. Czynił to w sposób następujący:

$$\frac{2abc}{a^3+b^3}=\frac{2ab+2ac+2bc}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{2c(a+b)+ab}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$=\frac{2c}{a^2-ab+b^2}+\frac{ab}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\geq$$

$$\frac{2c}{a^2-ab+b^2}+\frac{2a}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=$$

$$\frac{2}{a^2-ab+b^2}\left(c+\frac{a}{a+b}\right) \geq \frac{2}{(a-b)^2}\frac{ac+bc+a}{a+b} =$$
$$\frac{2}{(a-b)^2}\frac{a(bc-b+1)}{a+b} = \frac{2a(bc-b+1)}{(a+b)(a^2-b^2)} \geq 1$$

Komentarz.
Uczeń popełnił szereg błędów: najpierw "zgubił" współczynnik 2, następnie wykorzystał nieprawdziwą nierówność: $(a-b)^2 \geq a^2-ab+b^2$, by w końcu zapisać nierówność, która jest fałszywa i uczeń jej nawet nie próbuje uzasadniać.

Uczeń KR43 niepoprawnie przekształcił nierówność do postaci:

$$\frac{a(a^3+b^3)(a^3+c^3)(b^4+c^4)+b(b^3+c^3)(b^3+a^3)(a^4+c^4)+c(c^3+a^3)(c^3+b^3)(a^4+b^4)}{a(a^3+b^3)(a^3+c^3)(a^3b+bc^3)+b(b^3+c^3)(b^3+a^3)(a^3c+c^3b)+c(c^3+a^3)(c^3+b^3)(a^4+ab^3)} \geq 1$$

bo prawidłowy wynik powinien być następujący:

$$\frac{a(a^3+b^3)(a^3+c^3)(b^4+c^4)+b(b^3+c^3)(b^3+a^3)(a^4+c^4)+c(c^3+a^3)(c^3+b^3)(a^4+b^4)}{a(a^3+b^3)(a^3+c^3)(a^3b+bc^3)+b(b^3+c^3)(b^3+a^3)(a^3c+c^4)+c(c^3+a^3)(c^3+b^3)(a^4+ab^3)} \geq 1$$

Następnie uczeń napisał (cytuję dosłownie):

$$a \leq b \leq c$$
$$a^3 \leq b^3 \leq c^3$$
$$a^4 \leq b^4 \leq c^4$$

Możemy założyć kolejność, gdyż wyrażenie jest symetryczne.
Na mocy twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych (H. Pawłowski Kółko matematyczne dla olimpijczyków, Wademekum olimpijczyka)

$$b^4+c^4 > a^3b+bc^3$$
$$a^4+c^4 > c^3b+ca^3$$
$$a^4+b^4 > a^4+ab^3$$

Zatem licznik ułamka jest większy od mianownika, czyli całe wyrażenie jest większe od 1.

Komentarz.
Niestety, nierówność $a^4+c^4 > c^3b+ca^3$ nie jest prawdziwa. Jak subtelny był to błąd niech świadczy fakt, że część oceniających uznało rozumowanie ucznia KR43 za poprawne.

7. Błędy świadome (blefy)

Uczeń KR80 wykorzystał podstawienie $1 = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ i doprowadził nierówność z tezy zadania do postaci:

$$\frac{a^4c}{a^3+b^3}+\frac{b^4a}{b^3+c^3}+\frac{c^4b}{c^3+a^3} \geq \frac{a^3bc}{a^3+b^3}+\frac{b^3ac}{b^3+c^3}+\frac{c^3ab}{c^3+a^3}.$$

Na podstawie *zasady skarbonki* (czyli *twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych*), stwierdził, że nierówność, jaką otrzymał, jest zawsze prawdziwa.

Komentarz.
Niestety, w tym przypadku *twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych* nie ma zastosowania. Co więcej, uczeń nawet nie stara się pokazać, jak należałoby stosować to twierdzenie. Należy przypuszczać, że uczeń blefował.

Uczeń K62 pisał tak:
Przyjmijmy, że

$$x = a^2$$
$$y = b^2$$
$$z = c^2$$

Wobec tego $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = \sqrt{xyz}$.
Z nierówności Cauchye'go

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{xy(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})}} + \frac{y^2+z^2}{\sqrt{yz(y\sqrt{y}+z\sqrt{z})}} + \frac{z^2+x^2}{\sqrt{zx(z\sqrt{z}+x\sqrt{x})}} \geq$$
$$\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})}} + \frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{yz(y\sqrt{y}+z\sqrt{z})}} + \frac{\sqrt{zx}}{\sqrt{zx(z\sqrt{z}+x\sqrt{x})}} \geq 1$$

Komentarz.
Uczeń popełnił błąd, gdyż $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (zapewne o tę nierówność Cauchy'ego mu chodziło). Nierówność, którą nazywał nierównością Cauchy'ego, jest fałszywa np. dla $x = 1, y = \frac{1}{2}$. Następnie uczeń napisał:
Dowód: „ Powrót do krainy nierówności" Lev Kourliandchik.
Uczniowi zapewne chodzi o to, że ostatnią nierówność ma swój dowód w podanej książce, ale mylił się.
W tym przypadku można przyjąć, że uczeń nie miał pojęcia, jak udowodnić twierdzenie, więc dokonał pewnych „magicznych" przekształceń: podstawienie, szacowanie z nierówności Cauchy'ego, ale motywacją do tych działań było doprowadzenie do nierówności, o której już można napisać, że gdzieś ma swój dowód. Uczeń liczył zapewne na łut szczęścia, że nierówność taka istotnie jest w cytowanej przez niego książce. Taki sposób postępowania jest oznaką bezradności i desperacji.

Uczeń WA50 popełnił błąd polegający na zbyt grubym oszacowaniu. Udowadniał, że $\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3} > \frac{1}{a+b}$. Oszacowanie jest poprawne, ale do dowodu twierdzenia potrzebne było wówczas wykazanie nierówności:
$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \geq 1$. Uczeń pisał: *łatwo udowodnić, ale brak czasu...*
Nierówność jest fałszywa, gdyż z założenia $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

8. Błędny wybór strategii.

Dobrym przykładem na ten typ błędu jest praca ucznia KR20. Oparł on swoje (jak widać, skomplikowane) rozumowanie o

Twierdzenie. *Niech funkcja f o m zmiennych będzie ciągła w obszarze $D = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times ...[\alpha_m, \beta_m]$ i dwukrotnie różniczkowalna wewnątrz tego obszaru. Ponadto niech $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ dla $i = 1, 2, ..., m$ będą niemalejącymi ciągami spełniającymi dla wszystkich i, j warunek $\alpha_i \leq a_{ij} \leq \beta_i$.*
Wówczas, jeżeli wewnątrz obszaru D zachodzi nierówność

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \geq 0$$

dla wszystkich $i \neq j$, to wśród wszystkich sum postaci

$$\sum_{j=1}^{n} f(a'_{1j}, a'_{2j}, ..., a'_{mj}),$$

gdzie dla każdego $i = 1, 2, ..., m$ ciąg $a'_{i1}, a'_{i2}, ..., a'_{in}$ jest permutacja ciągu $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$, suma

$$\sum_{j=1}^{n} f(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$$

jest największa.

A oto jak to czynił:
Najpierw rozwiązujący sprowadził wyrażenie

$$\Phi(a, b, c) = \frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} - 1$$

do wyrażenia jednorodnego

$$\Phi(a, b, c) = \frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}.$$

Następnie bez uzasadnienia podał, że nierówność z treści zadania wraz warunkiem $ab + bc + ca = abc$ jest równoważna nierówności

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{a^2 + b^2}{a^3 + b^3} + \frac{b^2 + c^2}{b^3 + c^3} + \frac{c^2 + a^2}{c^3 + a^3}$$

Wobec tego uczeń zdefiniował funkcję

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3},$$

o której napisał, że jest ciągła, ale zapomniał dodać, że jest dwukrotnie różniczkowalna. Nie podał także obszaru, w jakim funkcja f jest określona, choć można przyjąć, że jest to oczywiste.
Następnie obliczył poprawnie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{6xy[2xy(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4)]}{(x^3 + y^3)^3}.$$

Jednak błędnie uzasadnił, że w podanym obszarze

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \geq 0.$$

Oczywistym jest, że warunek ten nie zachodzi (na przykład dla $y = 2007$ i $x = 1$). Ponieważ nie zachodzą założenia twierdzenia, nie można stosować tezy.

Komentarz.
Twierdzenie zastosowane przez rozwiązującego jest uogólnieniem twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych. W metodzie tej występują znacznie wzmocnione założenia, co skutkuje niemożnością zastosowania w przypadku rozważanego zadania. Uczeń zna to twierdzenie najprawdopodobniej z książki [66], w której występuje ono na stronie 224. Metodę tę dokładniej omówił Lech Stawikowski w artykule, który ukazał się w październiku 2005 roku (a więc na trzy miesiące przed II etapem 57 OM) w miesięczniku *Delta* ([127]).
Jedną z umiejętności, jaką trzeba się wykazać na olimpiadzie jest umiejętność właściwego doboru metody do zadania oraz szybkiej weryfikacji metod, które do rozwiązania nie prowadzą.
Główny błąd ucznia polegał na wybraniu niewłaściwej strategii. Zapewne nie starczyło uczniowi czasu na weryfikację tej strategii, co okazało się źródłem porażki.

2.1.4 Rozwiązania, które zawierały błędy

Jak już zwróciłem uwagę, dla konkursów matematycznych, w szczególności Olimpiad, charakterystyczne są: błędy powierzchownej wiedzy, błędy wynikające ze zmęczenia intelektualnego, błędy wynikające z walki o wynik, błędy świadome, błędny wybór strategii. Dlatego dla tych błędów w pracach z zadaniem 3 z II etapu 57 OM postanowiłem zrobić dokładne statystyki.

W poniższych tabelach wymieniłem, ile błędów popełniali uczniowie z poszczególnych kategorii. Postanowiłem podać także, jakie oceny uzyskali uczniowie (również 6, aby można było dokonywać porównań) oraz ile było prac.

Okręg	*u*	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
gdański	28	4	1	12	1	1	14	0	0	0	2	4	8
katowicki	62	16	9	41	2	0	19	1	1	2	1	4	14
krakowski	63	17	6	34	2	7	20	3	2	2	4	3	11
lubelski	60	5	14	37	1	4	18	1	6	3	3	4	14
łódzki	34	12	8	29	0	0	5	1	1	0	4	2	9
poznański	23	5	5	17	0	0	6	0	0	1	3	0	7
szczeciński	46	9	9	30	0	1	15	2	3	0	4	2	10
toruński	64	15	11	45	0	0	19	0	4	2	4	8	18
warszawski	121	39	9	75	4	5	37	1	7	7	4	6	20
wrocławski	59	13	11	35	1	1	22	1	5	2	2	4	11
Polska	560	135	83	355	11	19	175	10	29	19	31	37	122

Tabela 11: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - wielkości w liczbach bezwzględnych.**

Okręg	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
gdański	14,3	3,6	42,9	3,6	3,6	50,0	0	0	0	7,1	14,3	28,6
katowicki	25,8	14,5	66,1	3,2	0	30,6	1,6	1,6	3,2	1,6	6,5	22,6
krakowski	27,0	9,5	54,0	3,2	11,1	31,7	4,8	3,2	3,2	6,3	4,8	17,5
lubelski	8,3	23,3	61,7	1,7	6,7	30,0	1,7	10,0	5,0	5,0	6,7	23,3
łódzki	35,3	23,5	85,3	0	0	14,7	2,9	2,9	0	11,8	5,9	26,5
poznański	21,7	21,7	73,9	0	0	26,1	0	0	4,3	13,0	0	30,4
szczeciński	19,6	19,6	65,2	0	2,2	32,6	4,3	6,5	0	8,7	4,3	21,7
toruński	23,4	17,2	70,3	0	0	29,7	0	6,3	3,1	6,3	12,5	28,1
warszawski	32,2	7,4	62,0	3,3	4,1	30,6	0,8	5,8	5,8	3,3	5,0	16,5
wrocławski	22,0	18,6	59,3	1,7	1,7	37,3	1,7	8,5	3,4	3,4	6,8	18,6
Polska	24,1	14,8	63,4	2,0	3,4	31,3	1,8	5,2	3,4	5,5	6,6	21,8

Tabela 12: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - wielkość wyrażona w procentach w stosunku do liczby wszystkich prac.**

Na podstawie tabel 12 i 13 można zauważyć, że wyniki w okręgu katowickim, szczecińskim i wrocławskim były zbliżone do wyników na terenie całej Polski.

Nietypowe w stosunku do wyników w całej Polsce były wyniki w okręgu gdańskim. Połowa uczniów z tego okręgu poprawnie rozwiązała omawiane zadanie, tylko 14% nie miało rozwiązania, mniej niż 4% nie miało strategii, ale aż 28,6% zaprezentowało błędną strategię. Również charakterystyczne jest popełnienie przez ponad 14% uczniów błędów świadomych (6,6% w całej Polsce).

Okręg	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
gdański	4,2	83,3	4,2	4,2	58,3	0,0	0,0	0,0	8,3	16,7	33,3
katowicki	19,6	54,3	4,3	0,0	41,3	2,2	2,2	4,3	2,2	8,7	30,4
krakowski	13,0	37,0	4,3	15,2	43,5	6,5	4,3	4,3	8,7	6,5	23,9
lubelski	25,5	58,2	1,8	7,3	32,7	1,8	10,9	5,5	5,5	7,3	25,5
łódzki	36,4	77,3	0,0	0,0	22,7	4,5	4,5	0,0	18,2	9,1	40,9
poznański	27,8	66,7	0,0	0,0	33,3	0,0	0,0	5,6	16,7	0,0	38,9
szczeciński	24,3	56,8	0,0	2,7	40,5	5,4	8,1	0,0	10,8	5,4	27,0
toruński	22,4	61,2	0,0	0,0	38,8	0,0	8,2	4,1	8,2	16,3	36,7
warszawski	11,0	43,9	4,9	6,1	45,1	1,2	8,5	8,5	4,9	7,3	24,4
wrocławski	23,9	47,8	2,2	2,2	47,8	2,2	10,9	4,3	4,3	8,7	23,9
Polska	19,5	51,8	2,6	4,5	41,2	2,4	6,8	4,5	7,3	8,7	28,7

Tabela 13: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57- wielkość wyrażona w procentach w stosunku do liczby wszystkich niepustych prac.**

Na podstawie tabel 12 i 13 można zauważyć, że wyniki w okręgu katowickim, szczecińskim i wrocławskim były zbliżone do wyników na terenie całej Polski.

Nietypowe w stosunku do wyników w całej Polsce były wyniki w okręgu gdańskim. Połowa uczniów z tego okręgu poprawnie rozwiązała omawiane zadanie, tylko 14% nie miało rozwiązania, mniej niż 4% nie miało strategii, ale aż 28,6% zaprezentowało błędną strategię. Również charakterystyczne jest popełnienie przez ponad 14% uczniów błędów świadomych (6,6% w całej Polsce).

Interesująco przedstawiają się wyniki w okręgu lubelskim. Tylko 8,3% uczniów oddało puste prace, ale aż 23,3% nie miało strategii rozwiązania zadania. Ponadto dwukrotnie częściej niż uczniowie w Polsce, zawodnicy z okręgu lubelskiego popełniali błędy powierzchownej wiedzy.

Prace uczniów z okręgu łódzkiego charakteryzowały się bardzo dużą liczbą: pustych prac (35,3%), prac bez strategii (23,5%) oraz prac z błędnymi strategiami (26,5%). Ponadto dwukrotnie częściej niż uczniowie w całej Polsce, zawodnicy z okręgu łódzkiego popełniali błędy w efekcie walki o wynik. I trzeba dodać, że najmniej uczniów, bo tylko 14,7% umiało rozwiązać omawiane zadanie. Jest to zdecydowanie najgorszy wynik w całej Polsce.

W okręgu poznańskim ponad 30% uczniów wybrało błędną strategię i prawie 22% nie miało strategii rozwiązania zadania. Zwraca uwagę także bardzo duża liczba błędów (13%) powstałych w efekcie walki o wynik, podczas gdy dla całej populacji wynik wynosił 5,5%. Charakterystyczne jest także, że uczniowie z tego okręgu nie popełnili błędów świadomych oraz błędów powierzchownej wiedzy.

Uczniowie z okręgu toruńskiego znacząco częściej niż uczniowie z całej Polski popełniali błędy świadome (12,5%) oraz wybierali błędne strategie (28,1%), natomiast uczniowie z okręgu warszawskiego częściej oddawali puste prace (32,2%) i rzadziej nie mieli strategii (7,4%) oraz mieli błędną strategię (16,5%).

Na podstawie tabeli 12 można zauważyć, że w porównaniu z wynikami ogólnopolskimi brak rozwiązań występował szczególnie często w okręgach: łódzkim i warszawskim, a znacznie rzadziej w okręgach: lubelskim i gdańskim. Brak strategii występował najczęściej w okręgach: lubelskim, łódzkim i poznańskim a najrzadziej w okręgach: warszawskim, krakowskim i gdańskim.

Na podstawie tabel: 11, 12, 13 obserwuję, że największym problemem uczniów rozwiązujących omawiane zadanie był brak strategii rozwiązania. Nie jest to oczywiście żadne zaskoczenie. Aż 39% uczniów nie miało żadnego pomysłu na rozwiązanie (a zatem oddawało pustą

kartkę lub wykonywało działania, które nie zbliżały do rozwiązania). Ponad 21% uczniów wybrało błędną strategię, która nie mogła doprowadzić do rozwiązania. Charakterystyczne dla rozwiązujących okazały się błędy: powierzchownej wiedzy, błędy powstałe w wyniku walki o wynik, błędy będące efektem zmęczenia intelektualnego oraz błędy świadome. Błędy logiczne występują rzadziej niż wymienione wyżej.
Wystąpiły błędy charakterystyczne dla pewnych okręgów. Wyraźnie częściej, niż w całej Polsce, występował:
- błąd powierzchownej wiedzy w okręgach: lubelskim i wrocławskim,
- walka o wynik w okręgach: łódzkim i poznańskim,
- błąd świadomy w okręgach: toruńskim i gdańskim.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
A	125	11	2	19	1	7	98	0	3	1	1	4	7
B	435	124	81	336	10	12	77	10	26	18	30	33	115
Polska	560	135	83	355	11	19	175	10	29	19	31	37	122

Tabela 14: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - zależność od tego, czy przeszli do III etapu.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
A	8,8	1,6	15,2	0,8	5,6	78,4	0	2,4	0,8	0,8	3,2	5,6
B	28,5	18,6	77,2	2,3	2,8	17,7	2,3	6,0	4,1	6,9	7,6	26,4
Polska	24,1	14,8	63,4	2,0	3,4	31,3	1,8	5,2	3,4	5,5	6,6	21,8

Tabela 15: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu - wielkość wyrażona w procentach.**

Na podstawie tabeli 17 można podać kilka charakterystycznych obserwacji: dziewczęta częściej niż chłopcy nie miały strategii rozwiązania i popełniały błędy wynikające ze zmęczenia intelektualnego oraz zdecydowanie rzadziej niż chłopcy popełniały błędy świadome.

Nieznacznie częściej dziewczęta wybierały błędną strategię.

Chłopcy znacznie lepiej poradzili sobie z tym zadaniem: 36,5% z nich miało poprawne rozwiązanie, podczas gdy dla dziewcząt wskaźnik ten wynosił tylko 19,4%.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
dziewczęta	72	17	16	55	1	2	14	1	4	4	5	1	19
chłopcy	488	118	67	300	10	17	161	9	25	15	26	36	103
Polska	560	135	83	355	11	19	175	10	29	19	31	37	122

Tabela 16: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - zależność od płci.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
dziewczęta	23,6	22,2	76,4	1,4	2,8	19,4	1,4	5,6	5,6	6,9	1,4	26,4
chłopcy	24,2	13,7	61,5	2,0	3,5	33,0	1,8	5,1	3,1	5,3	7,4	21,1
Polska	24,1	14,8	63,4	2,0	3,4	31,3	1,8	5,2	3,4	5,5	6,6	21,8

Tabela 17: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - zależność od płci - wielkość wyrażona w procentach.**

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gimnazjum	13	4	4	10	0	0	3	0	0	1	0	0	2
klasa I	76	20	9	51	4	2	19	1	4	2	3	8	19
klasa II	193	47	26	118	0	6	69	3	9	3	12	15	46
klasa III	278	64	44	176	7	11	84	6	16	13	16	14	55
Polska	560	135	83	355	11	19	175	10	29	19	31	37	122

Tabela 18: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - zależność od klasy, do jakiej uczęszczał uczestnik.**

Tabele 18, 19 potwierdzają naturalną i intuicyjną wiedzę, że im młodszy uczeń, tym większy problem ze znalezieniem strategii rozwiązania zadania. Aż 30,8% uczniów gimnazjów nie miało strategii rozwiązania.

Błędy powierzchownej wiedzy i błędy w efekcie walki o wynik nie występowały u uczniów gimnazjów, a wśród uczniów liceów występowały w tym samym stopniu niezależnie od klasy.

Uczniowie gimnazjów nie popełnili błędów świadomych, a uczniowie klas I popełnili ich najwięcej (10,5%).

Cechą charakterystyczną rozwiązań gimnazjalistów była mała liczba błędów w porównaniu z liczbą błędów popełnianych przez licealistów. Można zaryzykować stwierdzenie, że gimnazjaliści albo wiedzieli jak rozwiązać zadanie albo nie mieli żadnego pomysłu na jego rozwiązanie.

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
gimnazjum	30,8	30,8	76,9	0	0	23,1	0	0	7,7	0	0	15,4
klasa I	26,3	11,8	67,1	5,3	2,6	25,0	1,3	5,3	2,6	3,9	10,5	25,0
klasa II	23,8	13,5	61,1	0,00	3,1	35,8	1,6	4,7	1,6	6,2	7,8	23,8
klasa III	23,0	15,8	62,9	2,5	4,0	30,2	2,2	5,8	4,7	5,8	5,0	19,8
Polska	24,1	14,8	63,4	2,0	3,4	31,3	1,8	5,2	3,4	5,5	6,6	21,8

Tabela 19: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - zależność od klasy, do której uczęszczał zawodnik - wielkość wyrażona w procentach.**

Postanowiłem przyjrzeć się uważniej błędom, jakie popełniają uczniowie w szkołach, które miały największą liczbę uczestników w II etapie 57 OM. Jako kryterium przyjąłem co najmniej 15 uczestników II etapu. Wybrałem zatem:
III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu,
III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni,
IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu,
V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie,
XIII LO w Szczecinie,
XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu,

XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
a	22	6	5	15	1	0	6	1	3	0	0	2	4
b	19	1	0	5	1	1	12	0	0	0	2	3	5
c	16	2	2	11	0	0	5	0	0	0	2	4	6
d	40	8	4	19	2	4	15	0	2	0	2	2	4
e	19	4	3	13	0	0	6	0	1	0	3	1	5
f	24	4	4	12	0	0	12	0	1	0	1	2	4
g	56	16	3	37	2	3	14	1	5	4	1	5	12
h	196	41	21	113	6	8	70	2	12	4	11	19	40
Polska	560	135	83	355	11	19	175	10	29	19	31	37	122

Tabela 20: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 w wybranych szkołach.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
a	27,3	22,7	68,2	4,5	0	27,3	4,5	13,6	0	0	9,1	18,2
b	5,3	0	26,3	5,3	5,3	63,2	0	0	0	10,5	15,8	26,3
c	12,5	12,5	68,8	0	0	31,3	0	0	0	12,5	25,0	37,5
d	20,0	10,0	47,5	5,0	10,0	37,5	0	5,0	0	5,0	5,0	10,0
e	21,1	15,8	68,4	0	0	31,6	0	5,3	0	15,8	5,3	26,3
f	16,7	16,7	50	0	0	50	0	4,2	0	4,2	8,3	16,7
g	28,6	5,4	68,1	3,6	5,4	25	1,8	8,9	7,1	1,8	8,9	21,4
h	20,9	10,7	57,7	3,1	4,1	35,7	1,0	6,1	2,0	5,6	9,7	20,4
Polska	24	14,6	63,3	1,8	3,4	30,9	1,8	5,1	3,4	5,5	6,5	21,7

Tabela 21: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 w wybranych szkołach - wielkość wyrażona w procentach.**

Charakterystyczne obserwacje:
Bardzo mało uczniów z III LO w Gdyni nie miało strategii rozwiązania oraz oddało puste kartki. Skutkowało to podwyższonym odsetkiem błędów w wyborze strategii.

Najmniejszy procent błędów w wyborze strategii występował wśród zawodników z V LO w Krakowie.

Największy odsetek błędów powierzchownej wiedzy wystąpił u uczniów z III LO we Wrocławiu.

Szczególnie dużo błędów w wyniku walki o wynik popełnili uczniowie III LO w Gdyni, IV LO w Toruniu oraz XIII LO w Szczecinie.

Szczególnie dużo błędów świadomych popełnili uczniowie III LO w Gdyni oraz IV LO w Toruniu.

Najczęściej występującymi błędami w wybranych szkołach były błędy świadome. Można postawić hipotezę, że ten typ błędu będzie charakterystyczny dla uczniów renomowanych szkół matematycznych.

	x	y	$\frac{x}{y}$
Polska	70	267	0,26
okręg gdański	2	19	0,10
okręg katowicki	6	25	0,24
okręg krakowski	8	34	0,23
okręg lubelski	5	27	0,18
okręg łódzki	5	10	0,5
okręg poznański	4	10	0,4
okręg szczeciński	5	21	0,24
okręg toruński	15	33	0,46
okręg warszawski	14	58	0,24
okręg wrocławski	5	29	0,17
dziewczęta	10	26	0,39
chłopcy	60	241	0,25
gimnazjum	1	4	0,25
klasa I	7	30	0,23
klasa II	30	103	0,29
klasa III	32	129	0,25
a	3	10	0,3
b	2	16	0,13
c	5	10	0,5
d	4	23	0,17
e	2	8	0,25
f	1	13	0,8
g	8	26	0,31

Tabela 22: **Jak wielu uczniów jest przekonanych, że zrobiło zadanie 3.2.57.**

Ponad 25% uczestników II etapu 57 OM podało, że rozwiązali zadanie 3.2.57, lecz faktycznie go nie rozwiązało. Niemal połowa uczniów z okręgów toruńskiego, poznańskiego i łódzkiego była bezpodstawnie przekonana, że ma poprawne rozwiązanie.

Dziewczęta (38%) częściej niż chłopcy (25%) były przekonane o poprawności swojego rozumowania.

Połowa uczniów IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu, którzy zadeklarowali, że rozwiązali zadanie, myliło się. Najlepiej ocenili swoje dokonania uczniowie XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu - tylko jeden (z trzynastu) uczeń błędnie ocenił swoją pracę.

2.2 Zadanie 6 z II etapu 58 OM

2.2.1 Treść i rozwiązania zadania

Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4.$$

Wykazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\leq 2(a+b+c+d)-4.$$

Rozwiązania

Na początek zaprezentuję rozwiązanie zaproponowane przez organizatorów. Rozwiązanie opiera się na dwóch szacowaniach:
dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność:

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\leq\frac{x^2+y^2}{x+y},$$

dla liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d spełniających warunek
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$ zachodzi nierówność $\frac{2ab}{a+b}+\frac{2cd}{c+d}\geq 2$.
O ile drugie szacowanie jest raczej typowe, to pierwsze wymaga już głębokiego namysłu i dobrej intuicji algebraicznej ewentualnie znajomości tego typu szacowania z literatury. W artykule [96] Adam Osękowski opisuje sposób znajdowania tego typu szacowań.
Rozumowanie w dowodzie firmowym oparte było w istocie na nierówności:

$$\frac{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}}{2}\leq\frac{a+b}{2},$$

która zachodziła dla $a, b>0$.
W książce [65] na stronach 225-285 autor rozważa zależności podobnego typu między średnimi. Połączenie w jednym zadaniu tych dwóch pomysłów szacowania dało taki efekt, że tylko 18 uczniów rozwiązało zadanie poprawnie, a spośród tych uczniów, aż 17 zawodników przedstawiło rozwiązanie firmowe.

Sposób 1

Na początku wykażemy

Lemat 5. *Dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność:*

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\leq\frac{x^2+y^2}{x+y}. \tag{14}$$

Rzeczywiście, przekształcając równoważnie powyższą nierówność mamy:

$$(x^3+y^3)(x+y)^3\leq 2(x^2+y^2)^3,$$

$$(x^3+y^3)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\leq 2x^6+6x^4y^2+6x^2y^4+2y^6,$$

$$3x^5y+2x^3y^3+3xy^5\leq x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6,$$

$$0 \le (x^3 - y^3)^2 - 3xy(x-y)(x^3-y^3),$$
$$0 \le (x^3 - y^3)(x-y)^3.$$

Ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż liczby $x - y$ oraz $x^3 - y^3$ mają jednakowy znak.

Korzystając z nierówności (14) widzimy, że zadanie będzie rozwiązane, jeżeli udowodnimy nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+d^2}{c+d} + \frac{d^2+a^2}{d+a} \le 2(a+b+c+d) - 4.$$

Lewa strona powyższej nierówności jest równa

$$2(a+b+c+d) - \frac{2ab}{a+b} - \frac{2bc}{b+c} - \frac{2cd}{c+d} - \frac{2da}{d+a}.$$

Aby dokończyć rozwiązanie, wystarczy zatem dowieść, że

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2cd}{c+d} + \frac{2da}{d+a} \ge 4. \tag{15}$$

Jednakże na mocy łatwej do sprawdzenia nierówności $x + y \ge \frac{4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ mamy

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2cd}{c+d} \ge \frac{8}{\frac{a+b}{ab} + \frac{c+d}{cd}} = \frac{8}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = 2,$$

$$\frac{2bc}{b+c} + \frac{2da}{d+a} \ge \frac{8}{\frac{b+c}{bc} + \frac{d+a}{da}} = \frac{8}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}} = 2.$$

To uzasadnia nierówność (15), do której wcześniej został sprowadzony dowód tezy zadania.

□

Komentarz.

Siedemnastu uczniów rozwiązało zadanie w sposób podany przez organizatorów. Byli to uczniowie: KA92, KR12, KR02, KR22, KR03, KR23, KR84, LU61, PO30, PO50, SZ30, TO52, WA62, WA23, WA04, WA39, WA101. Zwraca uwagę fakt, że sześciu uczniów pochodziło z okręgu krakowskiego (w tym pięciu z V LO w Krakowie), pięciu uczniów z okręgu warszawskiego (trzech z XIV LO w Warszawie i dwóch z liceów Białostockich), a dwóch uczniów z poznańskiego (jeden z Konina i jeden z Krotoszyna) , w którym to okręgu uczniowie dotychczas wypadali bardzo słabo w olimpiadach matematycznych.

Interesująca jest praca uczenia SZ11, który zaproponował oszacowanie:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \le a + b + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - 2$$

Dowód bezpośredni tej nierówności jest trudny, ale staje się on łatwy, gdy zauważymy, że

$$-\frac{1}{\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}} \le \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - 2$$

i wykorzystamy lemat 5.

Sposób 2

Sposób 2 opiera się na metodzie zbliżania, opisanej w książce [65].

Załóżmy, że $x, y, z, t \in \mathbb{R}_+$ i $x+y+z+t=4$. Przyjmijmy, że funkcja f dana jest wzorem

$$f(x,y,z,t) = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}-2-\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{z^3}}{2}}.$$

Pokażemy, że $f(x,y,z,t) \geq f(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z, t)$.
Otrzymujemy kolejno

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}-2-\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{z^3}}{2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\frac{x+y}{2}}+\frac{1}{\frac{x+y}{2}}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}-2-\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{(\frac{x+y}{2})^3}+\frac{1}{(\frac{x+y}{2})^3}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{z^3}}{2}},$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}{2}} \geq \frac{4}{x+y}-\frac{2}{x+y},$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)} \geq \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}{2}},$$

$$2(x^2+y^2)^3 \geq (x^3+y^3)(x+y)^3.$$

Po wykonaniu działań otrzymujemy

$$(x-y)^3(x^3-y^3) \geq 0$$

co daje $f(x,y,z,t) \geq f(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z, t)$ dla $x, y, z, t \in \mathbb{R}_+$ i $x+y+z+t=4$. Powtarzając rozumowanie otrzymujemy $f(x,y,z,t) \geq f(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{z+t}{2}, \frac{z+t}{2})$.
Pozostaje zatem wykazać, że $f(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{z+t}{2}, \frac{z+t}{2}) \geq 0$ dla $x, y, z, t \in \mathbb{R}_+$ i $x+y+z+t=4$.
Zauważmy, że $f(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{z+t}{2}, \frac{z+t}{2}) = \frac{2}{x+y}+\frac{2}{z+t}-2$. Zatem wystarczy pokazać, że

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{z+t} \geq 2$$

$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+t}\right) \geq 4$$

$$\frac{z+t}{x+y}+\frac{x+y}{z+t} \geq 2$$

Ostatnia nierówność wynika bezpośrednio z nierówności Cauchy'ego.

Po dodaniu stronami nierówności

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} \leq a+b+c+d-2$$

$$\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq a+b+c+d-2$$

otrzymujemy tezę.

□

Komentarz.
Tylko jeden uczeń udowodnił nierówność wykorzystując metodę zbliżania: KR31.

2.2.2 Losy uczniów,którzy rozwiązali zadanie

Spośród omawianej osiemnastki tylko dwóch zawodników: KR02 (jedyny uczeń pierwszej klasy, który rozwiązał zadanie) i WA39 nie przeszło do finału. Jeden uczeń w finale otrzymał nagrodę I stopnia, jeden - nagrodę II stopnia, trzech - nagrodę III stopnia, a dwóch - wyróżnienie. Dwóch uczniów pojechało na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną (oznacza to, że czterech uczestników MOM nie rozwiązało zadania 6.2.58). W finale sześciu uczniów rozwiązało zadanie 6.3.58 (KR23, LU61, SZ30, TO52, WA23, WA101), z tym, że LU61 rozwiązał w finale tylko to jedno zadanie. Wśród omawianej grupy była tylko jedna dziewczyna: SZ30.

Uczestnik KA92 był uczniem klasy I w V LO w Gliwicach. W II etapie uzyskał 30 punktów (6, 6, 0, 6, 6, 6), w finale - 12 (0, 6, 6, 0, 0, 0).

Uczeń KR31 był uczniem klasy III w V LO w Krakowie. W II etapie uzyskał 35 punktów (6, 6, 6, 6, 5, 6), w finale 24 punkty (6, 6, 6, 6, 0, 0). Dostał nagrodę III stopnia.

Uczestnik KR02 był uczniem klasy I w V LO w Krakowie. W II etapie uzyskał 18 punktów (6, 0, 0, 6, 0, 6) i nie dostał się do finału.

Uczestnik KR03 był uczniem klasy II w V LO w Krakowie. W II etapie uzyskał 30 punktów (6, 0, 6, 6, 6, 6), w finale 24 punkty (6, 6, 6, 6, 0, 0). Dostał nagrodę III stopnia.

Uczestnik KR22 był uczniem klasy III w V LO w Krakowie. W II etapie uzyskał 34 punktów (6, 6, 5, 6, 5, 6), w finale 24 punkty (6, 6, 6, 6, 0, 0). Dostał nagrodę III stopnia i był reprezentantem Polski na Olimpiadzie Państw Europy Środkowej.

Uczestnik KR23 był uczniem klasy II w II LO w Krakowie. W II etapie uzyskał 36 punktów, w finale rozwiązał także wszystkie zadania i otrzymał 36 punktów. Dostał nagrodę I stopnia i był reprezentantem Polski na MOM, gdzie zdobył złoty medal.

Uczestnik KR84 był uczniem klasy I w V LO w Krakowie. W II etapie uzyskał 34 punkty (6, 6, 5, 6, 5, 6), w finale 12 punktów (0, 6, 6, 0, 0, 0).

Uczestnik LU61 był uczniem klasy III w I LO w Krośnie. W II etapie uzyskał 24 punkty (6, 6, 0, 6, 0, 6), w finale rozwiązał tylko zadanie 6.3.58.

Uczestnik PO30 był uczniem klasy III w I LO w Koninie. W II etapie uzyskał 29 punktów (6, 0, 6, 6, 5, 6), w finale rozwiązał zadanie 2 (5 punktów).

Uczestnik PO50 był uczniem klasy III w I LO w Krotoszynie. W II etapie uzyskał 24 punktów (6, 0, 6, 6, 0, 6), w finale rozwiązał zadania 2 i 4 (11 punktów).

Uczestniczka SZ30 była uczennicą klasy III w XIII LO w Szczecinie. W II etapie uzyskała 28 punktów (6, 6, 2, 6, 2, 6), w finale 20 punktów (5, 5, 0, 5, 0, 5). Była jedyną dziewczyna, która rozwiązała zadanie 6.2.58.

Uczeń TO52 był uczniem klasy III w VI LO w Bydgoszczy. W II etapie uzyskał 35 punków (6, 6, 6, 6, 5, 6), w finale 30 punktów (6, 6, 6, 6, 0, 6). Dostał nagrodę II stopnia i był reprezentantem Polski na MOM.

Uczeń WA62 był uczniem klasy III w XIV LO w Warszawie. W II etapie uzyskał 30 punktów (6, 6, 6, 6, 0, 6), w finale 17 punktów (5, 6, 0, 6, 0, 0).

Uczeń WA23 był uczniem klasy II w I LO w Białymstoku. W II etapie uzyskał 36 punktów, w finale 24 punkty (6, 6, 0, 6, 0, 6).

Uczeń WA04 był uczniem klasy III w XIV LO w Warszawie. W II etapie uzyskał 22 punkty (2, 6, 0, 6, 2, 6), w finale 10 punktów (2, 6, 0, 2, 0, 0).

Uczeń WA39 był uczniem klasy III w III LO w Białymstoku. W II etapie uzyskał 12 punktów (6, 0, 0, 0, 0, 6) i nie dostał się do finału.

Uczeń WA101 był uczniem klasy I w XIV LO w Warszawie. W II etapie uzyskał 26 punktów (6, 0, 6, 6, 2, 6), w finale rozwiązał zadania 4 i 6 (12 punktów).

Wnioski.
Zadanie 6.2.58 okazało się trudne - tylko 18 uczniów rozwiązało je. Wobec tego, jeżeli uczest-

nikowi udało się rozwiązać to zadanie, to miał spore szanse na dostanie się do finału oraz uzyskanie tytułu laureata.

2.2.3 Rozwiązania, które zawierały błędy

Analiza rozwiązań uczniów wskazują na kilka charakterystycznych problemów z szacowaniem wyrażeń.

Za grube szacowania

82 uczestników wykorzystywało szacowania, które były za grube, co powodowało, że nie mogli udowodnić nierówności. Poniżej przedstawiam, którzy uczniowie i jakiego typu szacowania wykorzystywali w swoich rozwiązaniach.

Uczniowie : TO84, TO15, TO30, TO11, TO41, TO61, TO42, TO72, TO84, KR10, KR11, KR81, KR73, KR93, KR44, KR75, KR26, LU92, LU63, LU74, KA15, KA46, KA30, SZ90, SZ23, SZ64, ŁÓ01, WR02, WR25, WA76, WA07, WA47, WA18, WA76, WA78, WA98, WA160 zaprezentowali następujące szacowanie, w którym wykorzystano nierówność między średnią arytmetyczną i sześcienną czterech liczb:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\leq\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}}$$

Uczniowie KA12, KA16, KA21, KA74, KR16, KR34, KR52, KR83, LU01, LU43, LU64, LU74, LU81, LU90, LU92, ŁO41, ŁO80, ŁO82, PO10, SZ34, TO23, TO61, TO71, TO44, WR05, WR17, WR21, WR23, WR44, WR63, WR70, WR72 wykorzystali nierówność między średnią arytmetyczną i harmoniczną czterech liczb dodatnich:

$$\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leq\frac{a+b+c+d}{4}.$$

Uczniowie KA16, KA70, SZ31, SZ60, WA27, WA46 próbowali wykorzystać nierówność

$$3\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\leq\frac{a+b}{\sqrt[3]{2}}.$$

Uczniowie TO93, TO92, KA16, KR50, TO72, TO93, WR41, WA63, WA90, WA131, WA161 zaprezentowali następujące szacowanie:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\leq a+b.$$

Uczeń WA92 wykorzystał oczywistą nierówność $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\leq\max\{a,b\}$.

Szereg uczniów korzystało z nierówności Cauchy'ego między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną trzech liczb. W tabeli 23 przedstawiam przykłady zastosowań nierówności Cauchy'ego.

Uczniowie	Typ szacowania
LU03, GD80, GD73, KA33, KA73, WR63, WR35, WA40, WA74, WA75, WA501	$3\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq a(a+b)+(a^2-ab+b^2)+\frac{1}{2a}$
KA33, KA73, GD73, GD80, PO31, WA150	$3\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq (a+b)+(a^2-ab+b^2)+\frac{1}{2}$
TO23, SZ54, WA74, WA75, WR35	$3\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \frac{(a+b)}{2}+(a^2-ab+b^2)+1$
SZ52, WA38	$3\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \frac{a^3+b^3}{2}+1+1$
WA29	$3\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq a+b+\frac{a^2}{2b}+\frac{b^2}{2a}$
WA191	$3\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \frac{a+b}{2}+2\sqrt{a^2-ab+b^2}$
WR92	$3\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \frac{a+b}{2}+\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a-b)^2}{2}}$

Tabela 23: **Wykorzystanie nierówności Cauchy'ego w "za grubych" szacowaniach w zadaniu 6.2.58**

Wszystkie powyższe szacowania były poprawne (uczniowie prezentowali poprawne dowody), ale całkowicie nieużyteczne, bo za grube. Na podstawie tych szacowań nie można było udowodnić nierówności.

Błędne szacowania

Uczniowie	Typ błędu
GD11, GD14, KA76, KA86,KR74, SZ63, TO12, TO24, TO74, TO01, WR14, WA37, WA42, WA57, WA48 WA58	$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq a+b-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}$
KR46, LU93, GD21, ŁÓ22, TO83, SZ61, WA71	$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq a+b-\frac{1}{a}$
LU51, GD22, LU53, ŁO52, TO93, TO50, WA51, WA13	$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq a+b-1$
GD32, KR55, LU01, SZ02, SZ12 SZ21, WA36, WA131, WR34	$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \frac{a+b}{2}$
LU40	$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq 2a-\frac{1}{b}$
LU02	$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq a+b-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2})$
WR64	$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-3$
WA93	$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$

Tabela 24: **Błędne szacowania w zadaniu 6.2.58**

Charakterystyczne jest to, że wszystkie przykłady z tabeli 24 są szacowaniami nieprawdziwymi, co łatwo można pokazać wskazując stosowny kontrprzykład. Jednakże uczniowie

wykorzystujący takie błędne szacowania albo niedostrzegają tych przykładów, albo pokazują dowód, który nie jest poprawny (zawiera błędy).

Opiszę jeszcze kilka charakterystycznych i błędnych rozumowań, jakie zaprezentowali uczniowie.
KR10 twierdził, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}} + \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}}{2} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$$

Tymczasem nierówność jest fałszywa dla liczb $1, 10, 100, \frac{100}{289}$

Uczeń KR34 twierdził, że prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4(a+b+c+d)\left(\frac{a^3+b^3}{(a+b)^2}+\frac{b^3+c^3}{(b+c)^2}+\frac{c^3+d^3}{(c+d)^2}+\frac{d^3+a^3}{(d+a)^2}\right)}} \leq 1 - \frac{2}{a+b+c+d}.$$

Nie jest to żadna znana nierówność, a uczeń nie potrafił podać jej dowodu.

Uczniowie K26, K10, K11, K73. K93, K44, K75 na podstawie nierówności Jensena dla funkcji wklęsłej $f(x) = \sqrt[3]{x}$ zapisali nierówność:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}}.$$

Następnie próbowali dowodzić fałszywej nierówności

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}} \leq 2(a+b+c+d) - 4.$$

Błąd logiczny, jaki występował w rozwiązaniach tego zadania, to rozumowanie typu: jeżeli $a < b$ i $a < c$, to $b < c$. Dwunastu uczniów przedstawiło rozumowania z takim błędem.

Okręg	*u*	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
gdański	40	25	0	40	0	0	0	2	3	0	2	2	13
katowicki	69	30	10	68	0	0	1	0	14	1	3	4	15
krakowski	64	32	7	57	0	1	6	0	4	0	1	4	13
lubelski	53	25	6	52	0	0	1	2	3	0	0	1	18
łódzki	32	19	6	32	0	0	0	1	1	1	2	0	4
poznański	23	4	7	21	0	0	2	2	1	1	2	2	3
szczeciński	49	26	6	48	0	0	1	0	7	0	1	7	5
toruński	56	25	4	55	0	0	1	0	8	1	0	6	26
warszawski	118	47	21	111	2	0	5	4	10	5	1	13	26
wrocławski	58	26	9	58	0	0	0	1	8	1	4	3	10
Polska	562	259	76	542	2	1	17	12	59	10	16	42	133

Tabela 25: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - wielkości w liczbach bezwzględnych.**

Okręg	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
gdański	62,5	0	100	0	0	0	5,0	7,5	0	5,0	5,0	32,5
katowicki	42,9	14,3	97,1	0	0	1,4	0	20,0	1,4	4,3	5,7	21,4
krakowski	50,0	10,9	89,1	0	1,6	9,4	0	6,3	0	1,6	6,3	20,3
lubelski	47,2	11,3	98,1	0	0	1,9	3,8	5,7	0	0	1,9	34,0
łódzki	59,4	18,8	100	0	0	0	3,1	3,1	3,1	6,3	6,3	9,4
poznański	17,4	30,4	91,3	0	0	8,7	8,7	4,3	4,3	8,7	8,7	13,0
szczeciński	53,1	12,2	98,0	0	0	2,0	0	14,3	0	2,0	14,3	10,2
toruński	44,6	7,1	98,2	0	0	1,8	0	14,3	1,8	0	10,7	46,4
warszawski	39,8	17,8	94,1	1,7	0	4,2	3,4	8,5	4,2	0,8	11,0	22,0
wrocławski	44,8	15,5	100	0	0	0	1,7	13,8	1,7	6,9	5,2	17,2
Polska	46,2	13,5	96,4	0	0,2	3,0	2,1	10,5	1,8	2,9	7,5	23,7

Tabela 26: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich prac.**

Na podstawie tabel 25 i 26 można zauważyć, że zadanie okazało się bardzo trudne. Tylko osiemnastu spośród 562 uczestników II etapu umiało rozwiązać zadanie.

Zdecydowanie najlepiej poradzili sobie uczniowie z okręgu krakowskiego: aż siedmiu uczniów z tego okręgu rozwiązało to zadanie (stanowią oni 11% wszystkich uczestników z okręgu krakowskiego i 41,2% wszystkich uczniów, którzy poprawnie rozwiązali zadanie).

W okręgu warszawskim pięciu, a w okręgu poznańskim dwóch uczestników poradziło sobie z zadaniem. Zwraca uwagę wynik okręgu poznańskiego, zwłaszcza, że w olimpiadach poprzedzających 58 OM wyniki uczniów z tego okręgu były słabe.

W okręgach: gdańskim, łódzkim i wrocławskim żaden uczeń nie rozwiązał zadania. Ponad połowa uczestników z okręgu gdańskiego rozwiązała zadanie 3.2.57, dotyczące także dowodu nierówności. Ponieważ zadanie 3.2.57 było zdecydowanie łatwiejsze niż zadanie 6.2.58, można przypuszczać, że uczniowie okręgu gdańskiego byli przygotowani dobrze do rozwiązywania zadań typowych, ale nie poradzili sobie z zadaniem nieschematycznym.

W okręgach: łódzkim (59,4%) i gdańskim (62,5%) najwięcej uczniów oddało puste kartki.

Wśród uczniów z okręgu poznańskiego można zaobserwować największy odsetek prac z brakiem strategii (30,4%).

W okręgu gdańskim nie było uczniów, którzy nie mieli strategii rozwiązania. Ale wszystkie niepuste prace zawierały albo błędne strategie albo błędy.

Najwięcej błędów powierzchownej wiedzy popełnili uczniowie z okręgów: katowickiego (20%), szczecińskiego (14,3%), toruńskiego (14,3%) i wrocławskiewgo (13,8%).

W okręgach szczecińskim (14,3%), toruńskim (10,7%) i warszawskim (11%) uczestnicy blefowali znacznie częściej niż w innych okręgach.

W okręgu lubelskim charakterystyczne jest duże nagromadzenie prac z błędnymi strategiami (34%) i bardzo mała liczbach blefów (1,9%).

Uczniowie z okręgu toruńskiego znacznie częściej niż w innych okręgach wybierali błędne strategie (46,4%).

Pod względem liczby popełnionych błędów zdecydowanie prowadzi okręg poznański (34,7%).

Można zauważyć, że największym problemem uczniów rozwiązujących omawiane zadanie było stosowanie błędnych strategii rozwiązania. Aż 45% uczniów nie ma żadnego pomysłu na rozwiązanie (a zatem oddaje pustą kartkę lub wykonuje działania, które nie zbliżają do rozwiązania). Ponad 13% uczniów nie miało strategii, która mogła doprowadzić do rozwiązania. Charakterystyczne dla rozwiązujących okazują się błędy: powierzchownej wiedzy, błędy powstałe w wyniku walki o wynik oraz błędy świadome. Błędy logiczne występują rzadziej.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
A	123	62	14	105	0	1	15	2	8	3	2	3	19
B	438	197	62	437	0	0	2	10	51	7	14	39	114
Polska	562	259	76	542	2	1	17	12	59	10	16	42	133

Tabela 27: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - zależność od tego, czy przeszli do III etapu.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
A	50,4	11,4	85,4	0,0	0,8	12,2	1,6	6,5	2,4	1,6	2,4	15,4
B	45,0	14,2	99,5	0,0	0,0	0,5	2,3	11,6	1,6	3,2	8,9	26,0
Polska	46,2	13,5	96,4	0,0	0,2	3,0	2,1	10,5	1,8	2,9	7,5	23,7

Tabela 28: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu - wielkość wyrażona w procentach.**

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
dziewczęta	85	35	15	84	0	0	1	1	6	0	2	5	26
chłopcy	476	224	61	458	2	1	16	11	53	10	14	37	107
Polska	562	259	76	542	2	1	17	12	59	10	16	42	133

Tabela 29: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - zależność od płci.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
dziewczęta	41,2	17,6	98,8	0	0	1,2	1,2	7,1	0	2,4	5,9	30,6
chłopcy	47,1	12,8	96,0	0,4	0,2	3,4	2,3	11,1	2,1	2,9	7,8	22,5
Polska	46,2	13,5	96,4	0,4	0,2	3,0	2,1	10,5	1,8	2,9	7,5	23,7

Tabela 30: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - zależność od płci - wielkość wyrażona w procentach.**

Na podstawie tabeli 30 można podać kilka charakterystycznych obserwacji: dziewczęta częściej niż chłopcy nie miały strategii rozwiązania i wybierały błędne strategie oraz rzadziej niż chłopcy popełniały błędy świadome, błędy powierzchownej wiedzy.

Chłopcy nieco lepiej niż dziewczęta poradzili sobie z tym zadaniem: 3,4% z nich miało poprawne rozwiązanie, podczas gdy dla dziewcząt wskaźnik ten wynosił tylko 1,2%.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
gimnazjum	9	3	1	9	0	0	0	0	3	0	2	0	1
klasa I	81	40	9	77	0	0	4	0	8	1	1	6	19
klasa II	207	99	30	201	2	0	4	3	21	4	6	18	49
klasa III	265	117	36	255	0	1	9	9	27	5	7	18	64
Polska	562	259	76	542	2	1	17	12	59	10	16	42	133

Tabela 31: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - zależność od klasy, do jakiej uczęszczał uczestnik.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
gimnazjum	33,3	11,1	100	0	0	0	0	33,3	0	22,2	0	11,1
klasa I	50,0	11,3	95	0	0	5,0	0	10,0	1,3	1,3	7,5	23,8
klasa II	47,8	14,5	97,1	1,0	0	1,9	1,4	10,1	1,9	2,9	8,7	23,7
klasa III	44,2	13,6	96,2	0	0,4	3,4	3,4	10,2	1,9	2,6	6,8	24,2
Polska	46,2	13,5	96,4	0,4	0,2	3,0	2,1	10,5	1,8	2,9	7,5	23,7

Tabela 32: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - zależność od klasy, do której uczęszczał zawodnik - wielkość wyrażona w procentach.**

Najwięcej uczniów, którzy rozwiązali zadanie pochodziło z klasy III, ale w stosunku do liczby uczestników najlepiej poradzili sobie uczniowie klas I. Najmniej pustych prac oddali uczniowie gimnazjów, którzy jednakże popełnili bardzo dużo błędów, zwłaszcza powierzchownej wiedzy i w wyniku walki o wynik.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
a	14	5	7	14	0	0	0	0	2	1	0	2	3
b	28	19	0	28	0	0	0	1	1	0	2	1	8
c	16	8	3	16	0	0	0	0	2	0	0	0	5
d	46	21	5	38	0	1	5	1	2	0	1	4	7
e	26	15	3	25	0	0	1	0	3	0	1	2	2
f	16	9	0	16	0	0	0	0	1	0	1	1	5
g	72	25	12	67	2	0	3	4	6	4	0	10	21
h	218	102	30	204	2	1	9	6	17	5	5	20	51
Polska	562	259	76	542	2	1	17	12	59	10	16	42	133

Tabela 33: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 w wybranych szkołach.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*l*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*
a	35,7	50,0	100	0	0	0	0	14,3	7,1	0	14,3	21,4
b	67,9	0	100	0	0	0	3,6	3,6	0	7,1	3,6	28,6
c	50,0	18,8	100	0	0	0	0	12,5	0	0	0	31,3
d	45,7	10,9	82,6	0	2,2	10,9	2,2	4,3	0	2,2	8,7	15,2
e	57,7	11,5	96,2	0	0	3,8	0	11,5	0	3,8	7,7	7,7
f	56,3	0	100	0	0	0	0	6,3	0	6,3	6,3	31,3
g	35,2	16,9	93,0	2,8	0	4,2	5,6	8,5	5,6	0	14,1	29,6
h	47,0	13,8	93,5	0,9	0,5	4,1	2,8	7,8	2,3	2,3	9,2	23,5
Polska	46,2	13,5	96,4	0,4	0,2	3,0	2,1	10,5	1,8	2,9	7,5	23,7

Tabela 34: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 w wybranych szkołach-wielkość wyrażona w procentach.**

Charakterystyczne obserwacje:
Analiza prac uczniów z wybranych siedmiu szkół wskazuje na bardzo zbliżone wyniki do wszystkich uczniów startujących w II etapie 58 OM. Jedyne, drobne różnice sa dostrzegalne w przypadku błędów powierzchownej wiedzy oraz blefów.

Natomiast między poszczególnymi wybranymi szkołami występują istotne różnice.

W wybranych szkołach omawiane zadanie rozwiązało: pięciu uczniów V w Krakowie, trzech uczniów XIV LO w Warszawie oraz jeden uczeń XIII LO w Szczecinie. Może to oznaczać, że uczniowie z V LO w Krakowie i XIV LO we Warszawie zostali poddani treningowi, w czasie którego omawiane były nierówności podobne do tej z zadania 6.3.58.

Najwięcej pustych prac oddali uczniowie z III LO w Gdyni (67,9%), XIII LO w Szczecinie (57,7%) oraz XIV LO w Warszawie (56,3%), natomiast najmniej - uczniowie III LO w Wrocławiu (35,7%) oraz XIV LO w Wrocławiu (35,2%) Jednocześnie uczniowie z III LO w Wrocławiu znacznie częściej nie mieli strategii rozwiązania zadania (50%).

Błędy powierzchownej wiedzy wyraźnie częściej niż wśród wszystkich uczestników II etapu 58 OM występowały u uczniów z III LO w Wrocławiu (14,3%). Podobnie sytuacja miała się z błędami wynikającymi ze zmęczenia intelektualnego (7,1%) oraz błędami świadomymi (14,3%).

Błędy świadome były także szczególnie widoczne w pracach uczniów z XIV LO w Warszawie (14,1%).

Uczniowie z IV LO w Toruniu nie popełnili żadnych błędów: wynikających ze zmęczenia intelektualnego, walki o wynik oraz świadomych. Jednocześnie 12,5% z nich popełniło błąd powierzchownej wiedzy i proponowało błędną strategię.

Błędna strategia była charakterystyczna dla uczniów z III LO w Gdyni (28,6%), XIV LO w Wrocławiu (31,3%) i XIV LO w Warszawie (29,6%).

	x	y	$\frac{x}{y}$
Polska	76	92	0,83
okręg gdański	4	4	1
okręg katowicki	8	9	0,89
okręg krakowski	7	14	0,5
okręg lubelski	1	2	0,5
okręg łódzki	3	3	1
okręg poznański	4	6	0,67
okręg szczeciński	11	12	0,92
okręg toruński	7	8	0,88
okręg warszawski	19	24	0,79
okręg wrocławski	10	10	1
dziewczęta	13	14	0,93
chłopcy	63	78	0,81
gimnazjum	2	2	1
klasa I	11	15	0,73
klasa II	25	29	0,86
klasa III	37	46	0,8
a	4	4	1
b	1	1	1
c	1	1	1
d	6	11	0,55
e	4	5	0,8
f	2	2	1
g	14	17	0,82

Tabela 35: **Jak wielu uczniów jest przekonanych, że zrobiło zadanie 6.2.58.**

Wśród uczestników II etapu 58 OM ponad 82% uczestników, którzy podali, że rozwiązali zadanie 6.2.58, faktycznie go nie rozwiązało. Wszyscy uczniowie z okręgów gdańskiego, poznańskiego, łódzkiego i wrocławskiego byli bezpodstawnie przekonani, że rozwiązali zadanie. Najbardziej pozytywnie wypadli uczniowie z okręgu krakowskiego, gdzie tylko połowa z nich błędnie oceniła swoje rozwiązanie.

Dziewczęta (92,9%) częściej niż chłopcy (80,8%) były przekonane o poprawności swojego rozumowania.

Uczniowie I klas najlepiej rozpoznawali, czy rozwiązali poprawnie zadanie.

Prawie połowa (45,5%) uczniów V LO w Krakowie zgodnie z prawdą oceniła swoje rozwiązanie.

2.3 Zadanie 6 z III etapu 58 OM

2.3.1 Treść i rozwiązania zadania

Ciąg $a_0, a_1, a_2, ...$ jest określony przez warunki: $a_0 = -1$ oraz

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + ... + \frac{a_1}{n} + \frac{a_0}{n+1} = 0 \qquad \text{dla} \qquad n \geq 1.$$

Wykazać, że $a_n > 0$ dla $n \geq 1$.

Rozwiązania

W rozwiązaniu firmowym przeprowadzono dowód indukcyjny, w którym kluczowym pomysłem było wykorzystanie nierówności $\frac{1}{k+1} \leq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{k}$ dla $k = 1, 2, ..., n$.

Sposób 1

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Liczba $a_1 = \frac{1}{2}$ jest dodatnia. Przypuśćmy z kolei, że dla pewnego wskaźnika n liczby $a_1, a_2, ..., a_n$ są dodatnie. Udowodnimy, że liczba a_{n+1} również jest dodatnia. W tym celu zauważmy, że prawdziwa jest zależność

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{k} \qquad \text{dla} \qquad k = 1, 2, ..., n, \tag{16}$$

gdyż jest ona równoważna nierówności $(n+1)k = nk + k \leq (k+1)n = nk + n$. Korzystając zatem z założenia indukcyjnego oraz z danej w treści zadania równości otrzymujemy

$$\frac{1}{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n-1}}{3} + ... + \frac{a_2}{n} + \frac{a_1}{n+1} \leq$$

$$\leq a_{n+1} + \frac{n}{n+1}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + ... + \frac{a_2}{n-1} + \frac{a_1}{n}\right) =$$

$$= a_{n+1} + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{-a_0}{n+1} = a_{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Wobec tego spełniona jest nierówność

$$a_{n+1} \geq \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} > 0,$$

która kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

□

Komentarz.

Sposób 1 został zaproponowany przez organizatorów. Spośród 123 uczniów, którzy uczestniczyli w finale 58 OM, tylko 34 rozwiązało zadanie 6, z czego trzydziestu zaprezentowało rozwiązanie identyczne z zaproponowanym przez organizatorów. A więc podane rozwiązanie narzuca się w sposób naturalny (świadczy o tym także to, że jeszcze sześciu innych uczniów próbowało przeprowadzić dowód indukcyjny, ale zabrakło pomysłów na jego realizację).

Sposób 2

W sposobie 2 został wykorzystany dowód nie wprost.

Załóżmy dla dowodu nie wprost, że dla pewnego $n \geq 2$ zachodzi $a_n \leq 0$.

Wtedy

$$\frac{1}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{2} - \frac{a_{n-2}}{3} - ... - \frac{a_1}{n} \leq 0.$$

Ponadto z założenia

$$a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{2} + \frac{a_{n-3}}{3} + ... + \frac{a_1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

a stąd otrzymujemy

$$\frac{na_{n-1}}{n+1} + \frac{na_{n-2}}{2(n+1)} + \frac{na_{n-3}}{3(n+1)} + ... + \frac{na_1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

Ponieważ dla $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ zachodzi nierówność $\frac{n}{i(n+1)} > \frac{1}{i+1}$, więc zachodzą także nierówności

$$\frac{1}{n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{i(n+1)} a_{n-i} > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{n-i}}{i+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

co prowadzi do sprzeczności.

□

Komentarz.
Czterech uczniów rozwiązało zadanie poprzez sprowadzenie do sprzeczności: KA30, KR11, KR72, KR94. Rozwiązanie przez sprzeczność opierało się na podobnym co w rozwiązaniu firmowym pomyśle wykorzystania nierówności $\frac{1}{k+1} \leq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{k}$ dla $k = 1, 2, ..., n$.

Podsumowanie

Uczniowie zaprezentowali dwa sposoby rozwiązań, które w dodatku można uznać za charakterystyczne dla tego typu zadań olimpijskich. Jedyną trudnością w obu typach rozwiązania stanowiło odpowiednie szacowanie jednego z wyrażeń.
Sposób 1 przedstawili uczniowie: WA23 z I LO w Białymstoku, KA44 z V LO w Bielsku-Białej, TO52, TO65 i TO70 z VI LO w Bydgoszczy (wszystkich zawodników z tego LO było 5), KA27 z X LO w Bytomiu, GD80 z III LO w Gdyni (spośród 4 uczniów tego LO), LU64 z I LO w Jarosławiu, KA36 i KA81 z VIII LO w Katowicach, WR65 z I LO w Kluczborku, KR30 i KR23 z II LO w Krakowie, LU61 z I LO w Krośnie, WR24 z I LO w Legnicy, WR30 z II LO w Opolu, WA21 z LO w Płocku, PO71 z VIII LO w Poznaniu, LU01 z II LO w Przemyślu, LU11 z I LO w Przemyślu, SZ30 i SZ63 z XIII LO w Szczecinie (w finale znalazło się 6 uczniów z tego liceum), WA 08, WA31, WA61, WA92, WA 101 i WA170 Z XIV LO w Warszawie.
Sposób 2 przedstawili uczniowie KA30 z VIII LO w Katowicach, KR11, KR72, KR94 z V LO w Krakowie.
Zwracają uwagę zawodnicy Z VI LO w Bydgoszczy, VIII LO w Katowicach (wszyscy finaliści z tej szkoły rozwiązali zadanie 6.3.58), II LO w Krakowie, V LO w Krakowie (spośród 14 uczniów z tej szkoły, trzech zawodników rozwiązało zadanie 6.3.58 i to tylko sposobem 2), XIV LO w Warszawie (6 spośród 28 zawodników z tej szkoły rozwiązało zadanie).
Ośmiu uczniów klas pierwszych i dziesięciu uczniów klas drugich rozwiązało zadanie 6.3.58.

39 uczniów sądziło, że rozwiązało poprawnie zadanie, a zatem tylko 13% uczniów się myliło w tym względzie. Tak więc tylko cztery osoby: po jednej z okręgów katowickiego, toruńskiego, warszawskiego i wrocławskiego twierdziło, że rozwiązało poprawnie zadanie, choć dowód był błędny. Trzeba zaznaczyć, że w porównaniu z II etapem OM uczniowie bardziej realistycznie oceniają swoje rozwiązania.

Okręg	Liczba uczestników (a)	Liczba poprawnych rozwiązań (b)	$\frac{b}{a}$
gdański	4	1	0,25
katowicki	13	5	0,38
krakowski	20	5	0,25
lubelski	5	4	0,8
łódzki	5	0	0
poznański	5	1	0,2
szczeciński	10	2	0,2
toruński	11	3	0,27
warszawski	36	8	0,22
wrocławski	14	5	0,36

Tabela 36: **Liczba rozwiązań zadania 6.3.58**

Szczególna uwagę w tabeli 36 zwraca okręg lubelski. W omawianym zadaniu aż 4 uczestników poprawnie rozwiązało zadanie. Okazuje się także, że każdy z tych uczestników był uczniem innej szkoły: I LO w Przemyślu, II LO w Przemyślu, I LO w Krośnie, I LO w Jarosławiu.

Spośród 88 uczniów, którzy otrzymali 0 punktów, w pracach 69 nie było żadnych prób rozwiązania. Z dostępnych brudnopisów wynika, że zawodnicy, którzy nie znaleźli poprawnego rozwiązania, nie przedstawiali rozwiązań błędnych czy też nieistotnych prób rozwiązań.

Aż 75 uczniów nie miało żadnej strategii rozwiązania, 12 zawodników w trakcie rozwiązania przyjęło błędną strategię, a tylko dwóch uczniów blefowało. Pozostałe typy błędów występują pojedynczo. Można więc próbować postawić hipotezę: grupa uczestnicząca w finale jest dobrze wyselekcjonowana pod względem merytorycznym. Są to uczniowie, którzy niezwykle krytycznie podchodzą do swoich pomysłów i jeżeli nie mają rozwiązania zadania lub posiadają rozwiązanie z lukami i błędami, to nie przedstawiają swojej pracy do oceny.

2.4 Twierdzenia wykorzystane w rozwiązaniach zadań na dowodzenie nierówności

W tym rozdziale omówię krótko, jakie twierdzenia wykorzystywali uczniowie, z jakich źródeł mogli czerpać wiedzę o sformułowaniach i zastosowaniach tych twierdzeń.

Nierówność Cauchy'ego

Twierdzenie 1. *Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Wówczas:*

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$$

Komentarz.
Twierdzenie (1) wraz z prezentacją zastosowań można znaleźć: w książce [98] na stronie 68 w rozdziale *O nierówności o średnich i pewnym jej uogólnieniu*, w książce [66] na stronie 139 w rozdziale *Klasyczne nierówności pomiędzy średnimi*, w książce [86] na stronie 19 w rozdziale *Podstawowe średnie*.

Twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n,$$

gdzie $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ są liczbami rzeczywistymi

Twierdzenie 2. *Jeżeli ciągi $(a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n)$ są jednomonotoniczne, to dla dowolnej permutacji $(b'_1, b'_2, ..., b'_n)$ zbioru $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ zachodzi nierówność*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b'_1 & b'_2 & ... & b'_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_n & b_{n-1} & ... & b_1 \end{bmatrix}$$

Komentarz.
Twierdzenie 2 w postaci cytowanej wraz z zastosowaniami można znaleźć: w książce [98] na stronie 184 w rozdziale *Ciągi jednomonotoniczne i zadania na dowodzenie nierówności*, w książce [66] na stronie 205 w rozdziale *Permutacje i nierówności* w podrozdziale *Permutacje dwóch ciągów*.

Twierdzenie Muirheada

Twierdzenie 3. *Niech $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ będą dwoma ciągami nieujemnych liczb całkowitych spełniających warunki:*

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$$

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_n$$

$$\alpha_1 \geq \beta_1$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n-1} \geq \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{n-1}$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$$

Wówczas dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, ..., x_n$ *zachodzi nierówność:*

$$X_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)}(x_1, x_2, ..., x_n) \geq X_{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)}(x_1, x_2, ..., x_n),$$

gdzie $X_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *jest* wielomianem symetrycznym *to znaczy jest sumą wszystkich jednomianów postaci*

$$x_1^{\alpha_{i_1}} x_2^{\alpha_{i_2}} ... x_n^{\alpha_{i_n}},$$

gdzie ciąg $(i_1, i_2, ..., i_n)$ *jest dowolną permutacją ciągu* $(1, 2, ..., n)$.

Komentarz.
Takie sformułowanie twierdzenia 3 występuje w [65] na stronach 52 w rozdziale *Wybrane metody. Majoryzacja*, w książce [100] na stronie 219 w *Wademekum olimpijczyka.*
W książce [87] na stronie 167 w rozdziale *Inequalities Connected with Majorization of Vector* zostały podane uogólnienie twierdzenia 3.
W miesięczniku *Delta* w artykule [81] z 2002 roku Hojoo Lee przedstawił twierdzenia Shura i Muirheada wraz z dowodami oraz przykłady zastosowań w zadaniach olimpijskich (MOM, olimpiady zagraniczne).

Nierówność Jensena

Twierdzenie 4. *Jeżeli* f *jest funkcją wypukłą w przedziale* $[a, b]$*, to dla dowolnych* $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ *i* $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ *takich, że* $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ *zachodzi nierówność*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

Komentarz.
Takie sformułowanie twierdzenia 4 występuje w [66] na stronach 158 w rozdziale *Klasyczne nierówności. Nierówność Jensena*, w książce [100] na stronie 217 w *Wademekum olimpijczyka.*
W książce [86] na stronach 54-60 w rozdziale *Funkcje wypukłe* zostały podane uogólnienia twierdzenia 4.

Nierówność Czebyszewa

Twierdzenie 5. *Jeżeli ciągi* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *oraz* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *są jednakowo uporządkowane (jednomonotoniczne), to zachodzi nierówność*

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

Komentarz.
Takie sformułowanie twierdzenia 5 występuje w [66] na stronach 212 w rozdziale *Permutacje i nierówności*, w książce [100] na stronie 217 w *Wademekum olimpijczyka*, w książce [86] na stronie 34 w rozdziale *Wprowadzenie w teorię nierówności*.

Twierdzenie o nierówności między średnimi potęgowymi

Twierdzenie 6. *Dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, ..., x_n$ oraz p, q takich, że $p > q, p \neq 0, q \neq 0$ zachodzi nierówność między średnimi potęgowymi:*

$$\left(\frac{x_1^p + ... + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{x_1^q + ... + x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Komentarz.
Takie sformułowanie twierdzenia 6 znajdziemy w [66] na stronie 143 w rozdziale *Klasyczne nierówności*. Uogólnienia twierdzenia 6 znajdziemy w [65] w rozdziale *Średnie potęgowe*.

Twierdzenie o sumie pochodnych

Twierdzenie 7. *Niech funkcja różniczkowalna n zmiennych $f(x_1, ..., x_n)$ spełnia następujące warunki:*
1. dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$: $f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ...x_n) \geq 0$ dla nieujemnych liczb $x_1, ..., x_n$,
2. dla dowolnych nieujemnych liczb $x_1, ..., x_n$ zachodzi nierówność: $f'_{x_1}(x_1, ..., x_n) + f'_{x_2}(x_1, ..., x_n) + ... + f'_{x_n}(x_1, ..., x_n) \geq 0$.

Wówczas dla dowolnych nieujemnych liczb $x_1, ..., x_n$ zachodzi

$$f(x_1, ..., x_n) \geq 0.$$

Komentarz.
Takie sformułowanie twierdzenia 7 występuje w [65] na stronie 157 w rozdziale *Pochodna*.
W miesięczniku *Delta* w artykule [68] z 2005 roku Lev Kourliandtchik przedstawił metodę dowodzenia nierówności opartą na własności sumy pochodnych cząstkowych wraz z przykładami zastosowań.

Twierdzenie o funkcjach supermodularnych

Twierdzenie 8. *Niech funkcja f o m zmiennych będzie ciągła w obszarze $D = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times ... [\alpha_m, \beta_m]$ i dwukrotnie różniczkowalna wewnątrz tego obszaru. Ponadto niech $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ dla $i = 1, 2, ..., m$ będą niemalejącymi ciągami spełniającymi dla wszystkich i, j warunek $\alpha_i \leqslant a_{ij} \leqslant \beta_i$.*
Wówczas, jeżeli wewnątrz obszaru D zachodzi nierówność

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \geq 0$$

dla wszystkich $i \neq j$, to wśród wszystkich sum postaci

$$\sum_{j=1}^{n} f(a'_{1j}, a'_{2j}, ..., a'_{mj}),$$

gdzie dla każdego $i = 1, 2, ..., m$ ciąg $(a'_{i1}, a'_{i2}, ..., a'_{in})$ jest permutacją ciągu $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$, suma

$$\sum_{j=1}^{n} f(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$$

jest największa.

Komentarz.
Takie sformułowanie twierdzenia 8 występuje w [66] na stronach 224 w rozdziale *Permutacje i nierówności*.
W miesięczniku *Delta* w artykule [127] z 2005 roku Lech Stawikowski opisuje, w jaki sposób można wykorzystać funkcje supermodularne do dowodzenia nierówności występujących w zadaniach olimpijskich.

Nierówność Höldera

Twierdzenie 9. *Jeżeli liczby a_k, b_k są nieujemne dla $k = 1, ..., n$ oraz liczby p i q spełniaja warunki $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $p > 1$, to zachodzi nierówność*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha a_k^p = \beta b_k^q$ dla $k = 1, ..., n$, gdzie α i β są takimi stałymi rzeczywistymi nieujemnymi, że $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Komentarz.
Takie sformułowanie twierdzenia 9 występuje w [86] na stronie 41 oraz w [66] na stronach 151-152 w rozdziale *Klasyczne nierówności*.

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza-Buniakowskiego

Twierdzenie 10. *Jeżeli $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ są liczbami rzeczywistymi, to zachodzi nierówność*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista $m \neq 0$ taka, że $a_k = mb_k$ dla $k = 1, ..., n$.

Komentarz.
Takie sformułowanie twierdzenia 10 występuje w [86] na stronie 36 oraz w [66] na stronach 146-147 w rozdziale *Klasyczne nierówności*.

Nierówność Schura

Twierdzenie 11. *Jeżeli liczby x, y, z są liczbami dodatnimi oraz λ jest liczbą rzeczywistą, to zachodzi nierówność:*

$$x^\lambda(x-y)(x-z) + y^\lambda(y-x)(y-z) + z^\lambda(z-y)(z-x) \geq 0$$

która staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z$.

Komentarz.
Takie sformułowanie twierdzenia 11 występuje w [86] na stronie 71.

2.4.1 Twierdzenia wykorzystane do dowodu zadania 3.2.57

Uczniowie rozwiązujący zadanie 3.2.57 wykorzystywali następujące twierdzenia:
- nierówność Cauchy'ego,
- twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych,
- nierówność Muirheada,
- nierówność Jensena,
- nierówność Czebyszewa,
- twierdzenie o nierówności między średnimi potęgowymi,
- twierdzenie o permutacji z dowolną funkcją.

Nierówność Cauchy'go

Aż 43 uczniów próbowało stosować nierówność Cauchy'ego, ale tylko sześciu z nich rozwiązało poprawnie zadanie. Oznacza to, że dla większości stosujących nierówność Cauchy'ego była jednym ze znanych *wytrychów* do dowodzenia nierówności. Można postawić hipotezę, że uczniowie ci nie mieli wystarczających umiejętności do stosowania tego, wydawało by się, oczywistego narzędzia. Zwłaszcza, że zastosowanie nierówności Cauchy'ego w tym zadaniu nie było typowe i mechaniczne.

Twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych

52 uczniów w dowodzie nierówności powoływało się na twierdzenie 2 o ciągach jednomonotonicznych i aż czterdziestu zrobiło to poprawnie, a dowód okazał się dobry. Większość poprawnych zastosowań dotyczyła dowodu lematu 1. Tylko jeden uczeń poprawnie zastosował twierdzenie 2 do dowodu całego twierdzenia (bez użycia lematu 1).

Twierdzenie Muirheada

27 uczniów stosowało nierówność Muirheada i tylko pięciu nie ukończyło dowodu. Spośród stosujących tę nierówność dwunastu dostało się do finału.

Bliżej omówię prace uczniów z okręgu krakowskiego, w jakich występowało twierdzenie Muirheada.

Dziewięciu uczniów: KR40, KR90, KR14, KR32, KR63, KR41, KR34, KR45, KR55 powoływało się na twierdzenia Muirheada lub próbowało je stosować.

Żaden z uczniów nie zacytował poprawnie założeń i tezy twierdzenia Muirheada.

KR45 przedstawił częściowo założenia i tezę.

KR40 wskazał poprawnie literaturę, z której korzystał.

Uczniowie: KR41, KR32, KR63, KR34, KR55 nie uzasadnili, że w zadaniu są spełnione założenia.

KR63 niepoprawnie zacytował tezę twierdzenia Muirheada, przez co nie mógł udowodnić tezy zadania.

Uczniowie: KR40, KR90, KR32 stosowali zapis: $(7,4,0) \succ (6,4,1)$, ale uczeń KR90 przypisywał mu błędne znaczenie.

Uczniowie: KR14, KR41, KR34 pisali *ciąg* $(7,4,0)$ *majoryzuje ciąg* $(6,4,1)$, ale KR34 zapisu tego nie wyjaśnił.

Szczególnie interesujące są prace uczniów KR63 i KR55, którzy w czystopisie najpierw zamieścili długie i nieskuteczne próby dowodu, po czym niespodziewanie uzyskali nierówność, która wynika od razu z nierówności Muirheada. Można przypuszczać, że poprawny dowód mógł być inspirowany.

Poniżej prezentuję prace uczniów z okręgu krakowskiego, w których wykorzystano nierówność Muirheada.

Oto, co pisał uczeń KR40:
A nierówność

$$a^7b^4 + a^7c^4 + b^7a^4 + b^7c^4 + c^7a^4 + c^7b^4 \geq a^6b^4c + a^6c^4b + b^6a^4c + b^6c^4a + c^6a^4b + c^6b^4a$$

wynika prosto z nierówności Muirheada (patrz Powrót do krainy nierówności *Lva Kourliandtchika) ponieważ dla ciągów* $(7,4,0)$ *oraz* $(6,4,1)$ *zachodzi* $(7,4,0) \succ (6,4,1)$ *gdyż:*

$$7 + 4 + 0 = 11 = 6 + 4 + 1$$

$$7 \geq 6$$

$$7 + 4 \geq 6 + 4$$

oraz podana nierówność jest nierównością symetryczną, zatem rzeczywiście nierówność zachodzi.

Komentarz.
Jak łatwo zauważyć, uczeń nie sprawdza wszystkich założeń, nie cytuje tezy; zapewne uważa, że wszyscy znają to twierdzenie. Zwraca uwagę pewna nieporadność językowa: *podana nierówność jest nierównością symetryczną, zatem rzeczywiście nierówność zachodzi.* Uczeń wie, skąd pochodzi cytowane przez niego twierdzenie oraz stosuje symbolikę zawartą w podanej przez niego książce.

Uczeń KR90 do dowodu faktu: dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność: $a^4 + b^4 \geq a^3b + b^3a$ wykorzystywał twierdzenie Muirheada. Czynił to następująco:
$a^4 + b^4 - a^3b - b^3a$ *jest różnicą dwóch wielomianów symetrycznych*
$W_{(4,0)}(a,b) - W_{(3,1)}(a,b)$. *Wiemy, że* $(4,0)$ *majoryzuje* $(3,1)$
$(4,0) \succ (3,1)$
ponieważ

$$4 > 3$$

$$4 + 0 = 3 + 1$$

Więc wielomian symetryczny $W_{(4,0)}(a,b) \geq W_{(3,1)}(a,b)$ *(nierówność Muirheada), ponieważ są to wielomiany tych samych zmiennych.*
Równość zachodzi, gdy $a = b$
więc $a^4 + b^4 \geq a^3b + b^3a$
czyli $a^4 + b^4 - a^3b - b^3a \geq 0$.

Komentarz.
Uczeń powołuje się na twierdzenie Muirheada, ale nie cytuje ani założeń, ani tezy. Stosuje pojęcie *majoryzacja*, przy czym wie, co ono oznacza. Sposób rozwiązania sugeruje, że uczeń rozumie i zna twierdzenie Muirheada.

Uczeń KR41 pisał:
Z nierówności Muirheada (ciąg $(7,4,0)$ *majoryzuje* $(6,4,1)$*)*
jest to prawda
(nie jestem pewien powyższego zapisu, ale chodzi mi o to, że:
$7 \geq 6$
$7+4 \geq 6+4$
$7+4+0 \geq 6+4+1$*),*
więc na mocy nierówności Muirheada zachodzi właśnie

$$a^7b^4 + a^7c^4 + b^7a^4 + b^7c^4 + c^7a^4 + c^7b^4 \geq a^6b^4c + a^6c^4b + b^6a^4c + b^6c^4a + c^6a^4b + c^6b^4a.$$

Komentarz.
Uczeń błędnie wyjaśnia pojęcie *majoryzacja*; nie opisuje tezy nierówności Muirheada, ale stwierdza, że teza tej nierówności dowodzi nierówności z zadania. Wydaje się, że jest to chyba myślenie bardziej życzeniowe niż faktyczna wiedza i dostrzeganie zastosowań nierówności Muirheada.

Uczeń KR63 przeprowadził szacowania z użyciem nierówności między średnimi, które nie prowadziły do żadnych sensownych wniosków. Zajęło mu to całą stronę.
Następnie przekształcił nierówność z tezy zadania do postaci:

$$a^7b^4 + a^7c^4 + b^7a^4 + b^7c^4 + c^7a^4 + c^7b^4 \geq a^6b^3c + a^6c^3b + b^6a^3c + b^6c^3a + c^6a^3b + c^6b^3a$$

W wyniku błędu rachunkowego otrzymał inną nierówność niż ta, której się spodziewał. Twierdzenie Muirheada do niej nie pasuje. Wobec tego napisał:
A ostatnia nierówność jest prawdziwa na mocy nierówności Muirheada dla wielomianów symetrycznych $W_{(a,b,c)}(7,4,0) > W_{(a,b,c)}(6,3,1)$*, bo* $7 > 6$*,* $7+4 > 6+3$.
Co ostatecznie dowodzi tezy zadania.

Komentarz.
W wyniku błędu rachunkowego uczeń otrzymał nierówność, która nie pasowała do twierdzenia Muirheada. Wobec tego uczeń "dostosował" twierdzenie do swoich potrzeb (brak u niego refleksji, czy zmiana ta nie powoduje zmiany prawdziwości twierdzenia). Ponadto stosuje błędny zapis majoryzacji i źle ją wyjaśnia. Właściwie nie zna prawidłowych założeń. Błędna jest także teza, gdyż nierówność powinna być słaba. Wydaje się, że uczeń pracował z pewną sugestią z zewnątrz, jaką metodę zastosować.

Uczeń KR14 napisał tak:
Zauważmy, że są to wielomiany symetryczne zmiennych a, b, c *dla ciągów* $(7,4,0)$ *oraz* $(6,4,1)$
tzn. że wykładniki w jednomianach są wyrazami z odpowiedniego ciągu (w różnej kolejności);
zauważmy, że ciąg $(7,4,0)$ *majoryzuje ciąg* $(6,4,1)$*, co zapisujemy* $(7,4,0) \succ (6,4,1)$ *żeczywiście* [6]
$7 \geq 6$
$7+4 \geq 6+4$

[6] pisownia oryginalna

$7+4+0=6+4+1$
zapiszmy naszą nierówność używając symboli wielomianów
$W_{(7,4,0)}(a,b,c) \geq W_{(6,3,1)}(a,b,c)$ *na mocy nierówności Muirheada wiemy, że jeśli ciąg* (x_n) *majoryzuje ciąg* (y_n)*, to zachodzi nierówność* $W_{(x_n)}(a,b,c) \geq W_{(y_n)}(a,b,c)$
Kończy to dowód naszej nierówności.

Komentarz.
W rozwiązaniu tego ucznia pojawia się sprawdzenie założeń i cytowanie tezy twierdzenia Muirheada. Można uznać, że uczeń zna i umie stosować to twierdzenie; brak jedynie odwołania do literatury.

Uczeń KR34 napisał:
Po uproszczeniu: $\sum_{sym} a^7b^4 \geq \sum_{sym} a^6b^4c$
Poniżej uczeń wyjaśniał:
$\sum_{sym}$ *- niech oznacza sumę po wszystkich symetrycznych permutacjach zmiennych w wyrażeniu.*
Dalej napisał:
Z tw. Muirheada dla wielomianów symetrycznych wielu zmiennych (w tym przypadku 3 zmiennych) dla wykładników potęg $(7,4,0)$ *i* $(6,4,1)$ *(wiemy, że ciąg* $(7,4,0)$ *majoryzuje* $(6,4,1)$*), co jednoznacznie dowodzi tezy zadania.*

Komentarz.
Uczeń zna symbolikę i terminologię, ale nie sprawdza założeń i nie pokazuje zastosowania Twierdzenia Muirheada.

Uczeń KR45 napisał:
Oznaczmy funkcję $f(x,y,z)$ *tak:*

$$f(x,y,z) = a^xb^yc^z + a^yb^zc^x + a^zb^xc^y + a^xb^zc^y + a^zb^yc^x + a^yb^xc^z.$$

Zgodnie z twierdzeniem Muirheada:

$$\begin{array}{r} z_1 \geq y_1 \geq x_1 \\ z_2 \geq y_2 \geq x_2 \\ z_1+y_1+x_1 = z_2+y_2+x_2 \\ z_1+y_1 > z_2+y_2 \\ z_1 > z_2 \end{array} \Rightarrow f(x_1,y_1,z_1) \geq f(x_2,y_2,z_2)$$

$f(0,4,7) \geq f(1,4,6)$
co zgodnie z twierdzeniem jest zawsze prawdziwe i kończy dowód.

Komentarz.
Praca KR45 jest jedyną, w której rozwiązujący próbuje cytować w miarę precyzyjnie twierdzenia Muirheada.

Uczeń KR55 po długich i chaotycznych próbach doszedł do nierówności:

$$2\sum a^7b^4 \geq \sum a^6b^4c$$

i skomentował:
co z tw. Muirheada dla rozkładów $(7,4,0)$ *oraz* $(6,4,1)$ *jest oczywiście prawdą, co należało dowieść.*
Uczeń napisał także:
$\sum$ - *tak oznaczać będziemy sumę cykliczną; oznaczenie to znajduje się we* Wprowadzeniu do krainy nierówności.
Obok uczeń napisał:

$$\forall x_1, x_2, .., x_n \in \mathbb{R}, k_1, k_2, .., k_n \in \mathbb{R}$$
$$\sum x_1^{k_1}x_2^{k_2}..,x_n^{k_n} = \sum_{\delta} x_{\delta(1)}^{k_1}x_{\delta(2)}^{k_2}..,x_{\delta(n)}^{k_n},$$

gdzie δ *jest zbiorem wszystkich permutacji zbioru* $(x_1, x_2, .., x_n)$

Komentarz.
Uczeń za to rozwiązanie otrzymał 0 punktów. Zawodnik doprowadził do nierówności, która ma zbliżoną postać do żądanej nierówności. Nierówność ta jest prawdziwa, ale uzasadnienie w oparciu o twierdzenie Muirheada jest nieprawidłowe. Co więcej, uczeń prawidłowo cytuje tytuł książki, w której znajduje się twierdzenie, a jednak błędnie opisuje pojęcie *suma cykliczna*.

Komentarz.
Wśród 27 uczniów z okręgu krakowskiego, którzy rozwiązali poprawnie omawiane zadanie, aż siedmiu (ponad 25%) wykorzystało nierówność Muirheada. Wszyscy ci zawodnicy byli uczniami V LO w Krakowie. Można przypuszczać, że wiedzę o nierówności Muirheada uzyskali albo na zajęciach prowadzonych w szkole albo wspólnego źródła w literaturze. Zauważam także, że wielu z nich uważało wykorzystywane twierdzenie za tak klasyczne, że nie czuło potrzeby przedstawiania jego założeń i tezy oraz wyjaśniania pojęć i terminów z nim związanych.
Po zawodach 57 OM można uznać, że nierówność Muirheada istotnie należy już do *klasycznego wykształcenia olimpijczyka*.

Nierówność Jensena
Pięć osób próbowało stosować nierówność Jensena, ale tylko jedna wiedziała jak to zrobić. Pozostali bez sprawdzenia podawali, że pewna funkcja jest wypukła i na tej podstawie stosowali nierówność Jensena.

Nierówność Czebyszewa
Trzy osoby zastosowały nierówność Czebyszewa, z czego dwie poprawnie otrzymując dowód nierówności z zadania.

Twierdzenie o nierówności między średnimi potęgowymi
Sześciu uczniów wykorzystywało to twierdzenie, lecz dwóch z nich nie ukończyło dowodu. Charakterystyczne jest to, że trzech uczniów wykorzystujących nierówność między średnimi potęgowymi było uczniami XIV LO we Warszawie.

Twierdzenie o permutacji z dowolną funkcją
Tylko jeden uczeń, w dodatku bezskutecznie, próbował wykorzystać to twierdzenie.

	(1)		(2)		(3)		(4)		(5)		(6)		(7)		(8)	
Polska	8	45	37	54	20	27	1	6	2	3	3	6	1	1	0	1
gdański	2	3	6	6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
katowicki	0	6	9	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
krakowski	1	2	3	7	7	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
lubelski	0	7	3	6	1	3	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
łódzki	0	5	1	2	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
poznański	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
szczeciński	1	3	4	5	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
toruński	2	8	4	4	3	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
warszawski	1	7	7	12	8	11	0	1	0	1	2	5	0	0	0	0
wrocławski	1	4	0	2	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	5	5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	1	3	1	1	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
d	1	2	2	4	7	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
e	0	2	2	2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
f	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	3	3	5	3	6	0	1	0	0	2	3	0	0	0	0
h	4	14	13	17	13	18	0	2	1	1	2	3	0	0	0	1

Tabela 37: **Wykorzystanie twierdzeń w rozwiązaniach zadania 3.2.57 przez uczniów w poszczególnych okręgach i wybranych szkołach. Pierwsza liczba opisuje liczbę prac, w których uczniowie poprawnie zastosowali dane twierdzenie; druga liczba opisuje liczbę wszystkich prac, w których uczniowie próbowali zastosować dane twierdzenie.**

Obserwacje

1. Spośród 560 uczniów biorących udział w II etapie 57 Olimpiady Matematycznej 143 próbowało stosować różne twierdzenia (25,2%). Tylko połowie (72) uczniów stosujących twierdzenia udało się rozwiązać zadanie.

2. Najczęściej uczniowie próbowali stosować:
   - twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych (54 uczniów), z czego 17 (31,5%) uczniów bezskutecznie;
   - nierówność Cauchy'ego (45 uczniów), z czego 37 uczniów (82%) bezskutecznie;
   - nierówność Muirheada (27 uczniów), z czego 7 (25,9%) bezskutecznie.

3. W okręgu gdańskim 9 uczniów (90%) zastosowało poprawnie twierdzenia, które próbowali wykorzystać.

4. W okręgach: łódzkim i wrocławskim liczba poprawnych zastosowań twierdzeń nie przekroczyła 25% wszystkich zawodników stosujących twierdzenia.

5. W okręgu poznańskim tylko jeden uczeń próbował zastosować przynajmniej jedno twierdzenie i zrobił to z powodzeniem. W dodatku było to rozwiązanie odbiegające od typowych rozwiązań (uczeń wykorzystał średnie potęgowe).

6. W okręgu warszawskim aż 37 uczniów stosowało sześć różnych twierdzeń, ale tylko 20 zrobiło to poprawnie.

7. W okręgu katowickim wszyscy uczniowie, którzy próbowali stosować nierówność Cauchy'ego popełnili błąd, ale aż 90% uczniów wykorzystujących twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych zrobiło zadanie.

8. Wszyscy uczniowie z III LO w Gdyni poprawnie zastosowali twierdzenia, na które się powoływali.

9. Uczniowie z XIV LO w Warszawie wykorzystali najwięcej różnych twierdzeń (6), ale stosowali je z różnym powodzeniem: nikt z uczniów tej szkoły nie wykorzystał poprawnie nierówności Cauchy'ego, 60% źle wykorzystało twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych, 50% błędnie zastosowało nierówność Muirheada.

10. Nieznaczne wykorzystywanie twierdzeń można zauważyć w obydwu szkołach z Wrocławia.

Wnioski

1. Do pewnego kanonu wykształcenia ucznia startującego w Olimpiadzie Matematycznej należy znajomość nierówności Cauchy'ego (i ogólnie: nierówności między średnimi: arytmetyczną, geometryczną, harmoniczną i kwadratową). Stąd zapewne wynikała duża liczba uczestników, którzy próbowali stosować tę nierówność. Natomiast duży procent (82%) błędnych zastosowań nierówności Cauchy'ego może być związany z powierzchowną znajomością zastosowań tej nierówności do dowodzenia innych nierówności. Zwłaszcza, że zastosowanie nierówności Cauchy'ego w omawianym zadaniu wymagało pewnego doświadczenia.
2. Nierówność Muirheada, która była stosowana głównie w okręgu warszawskim, krakowskim oraz toruńskim i w zdecydowanej większości przypadków było to zastosowanie prawidłowe. Najprawdopodobniej oznacza to, że uczniowie znający dosyć szczególne twierdzenie (i znane tylko wąskiej grupie uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką), muszą także znać jego zastosowania.
3. Wyniki szczególnego treningu w dowodzeniu nierówności można dostrzec w szkołach, których uczniowie wykorzystali wiele twierdzeń: XIV LO w Warszawie (6), IV LO w Toruniu (4) oraz V LO w Krakowie (4). Jednakże uczniowie tych szkół popełniali wiele błędów, co może świadczyć o zbyt schematycznym lub powierzchownym podejściu do problemów.
4. Wyniki szczególnego treningu w dowodzeniu nierówności można dostrzec III LO w Gdyni: wszyscy uczniowie stosujący twierdzenia zrobili to dobrze. Może to oznaczać, że zagadnienie dowodzenia nierówności zostało przedstawione uczniom precyzyjnie i dogłębnie.

2.4.2 Twierdzenia wykorzystane do dowodu zadania 6.2.58

W zadaniu 6.2.58 uczniowie próbowali korzystać z następujących twierdzeń:
- nierówności między średnimi: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną

- nierówności między średnimi potęgowymi,
- nierówność Jensena,
- twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych,
- twierdzenie o funkcji supermodularnej,
- twierdzenie o ekstremach funkcji różniczkowalnej,
- nierówność Czebyszewa,
- nierówność Höldera,
- twierdzenie Muirheada,
- twierdzenie Viete'a (wzory Viete'a dla wielomianów),
- nierówność Cauchy'ego-Schwarza-Buniakowskiego,
- nierówność Schura,
- zasada indukcji matematycznej.

W trakcie analizy rozwiązań uczestników 58 OM okazało się, że próby stosowania jakiegokolwiek z powyższych twierdzeń kończyły się niepowodzeniem. Na podstawie podanej analizy można zatem wnioskować o znajomości poszczególnych twierdzeń oraz o umiejętności ich stosowania.

Nierówności między średnimi: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną
79 uczestników próbowało zastosować te nierówności. Aż siedmiu z nich chciało to uczynić to dla liczb ujemnych: KA25, KR45, LU51, TO91, WA91, WR11 (ten uczeń dostał się nawet do finału), WR75. Najwięcej osób stosowało to twierdzenie w okręgu wrocławskim (16) i warszawskim (20), a spośród obserwowanych szkół - w XIV LO w Warszawie (13). Zwraca uwagę także fakt, że tylko dwóch uczniów z okręgu gdańskiego stosowało omawiane twierdzenie i było to jedyne twierdzenie, które próbowali stosować uczestnicy z tego okręgu.

Nierówności między średnimi potęgowymi
23 uczestników próbowało zastosować te nierówności. Ponad 34% z nich pochodziło z okręgu warszawskiego (wszyscy byli uczniami XIV LO w Warszawie).

Nierówność Jensena
26 uczestników próbowało zastosować nierówność Jensena. Najczęściej stosowali je uczestnicy z okręgów: krakowskiego i warszawskiego (po 6 uczniów), szczecińskiego i toruńskiego (o 4 uczniów) oraz uczniowie XIV LO w Warszawie (5 uczniów).

Twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych
Dziewięciu uczniów nieskutecznie próbowało powołać się na twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych. Żaden z nich nie umiał podać, w jaki sposób chce zastosować to twierdzenie.

Twierdzenie o funkcji supermodularnej
Uczniowie KA84, KA64, KA66 i KA07 powoływali się w swoich dowodach na twierdzenie o funkcji supermodularnej.

Żaden z wymienionych czterech uczniów nie awansował do finału i żaden z nich nie rozwiązał poprawnie zadania 6.2.58.

KA64 przedstawił następujące rozwiązanie:
Z nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną oraz z założenia wynika, że

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = 1.$$

Wystarczy zatem pokazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\leq(a+b+c+d).$$

Ponieważ funkcja

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3},\qquad \textit{określona dla}\qquad x,y\in\mathbb{R}_+$$

jest supermodularna, zatem

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\leq$$

$$\leq\sqrt[3]{\frac{a^3+a^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+d^3}{2}}.$$

Wykażę, że funkcja f jest supermodularna. Obliczam kolejne pochodne:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x^2\left(x^3+y^3\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}=-2x^2y^2\left(x^3+y^3\right)^{-\frac{5}{3}}$$

Zatem

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y\partial x}>0$$

Uczeń KA64 poprawnie obliczył odpowiednie pochodne, ale wniosek $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y\partial x}>0$ był już błędny, więc nie były spełnione założenia twierdzenia, które chciał wykorzystać.
Rozwiązania zawodników KA66 i KA84 wyglądały podobnie, tylko w trakcie obliczeń „znikał" minus, który przeszkadzał w wykorzystaniu twierdzenia.
Z kolei uczeń KA07 poprzestał na pierwszej części rozwiązania i nie policzył pochodnych, prawdopodobnie widząc, że dowód się sypie.

KA64 i KA84 byli uczniami klasy III w II LO w Dąbrowie Górniczej.
KA66 był uczniem klasy I w VIII LO w Katowicach.
KA07 był uczniem klasy III w V LO w Bielsku-Białej.
Najprawdopodobniej wszyscy spotkali się z metodą funkcji supermodularnych na zajęciach koła matematycznego organizowanego przez jednego z nauczycieli olimpijskich w Katowicach. Widoczna jest także wyraźna zbieżność czasowa z pojawieniem się w 10 numerze miesięcznika *Delta* z 2005 roku artykułu Lecha Stawikowskiego: *Ciągi jednomonotoniczne, funkcje supermodularne, i nierówności* [127], w których autor opisuje w jaki sposób można wykorzystać funkcje supermodularne do dowodzenia nierówności występujących w zadaniach olimpijskich.

Inne twierdzenia
Uczestnicy II etapu 58 OM chcieli wykorzystywać także:
- nierówność Czebyszewa (KR93, WA44, WR60)
- nierówność Höldera (TO45),
- twierdzenie Muirheada (TO01, WA42)
- twierdzenie Viete'a (TO51),
- nierówność Cauchy'ego-Schwarza-Buniakowskiego (SZ23),
- nierówność Schura (KR46),
- zasadę indukcji matematycznej (TO82).

Zwraca uwagę duża różnorodność prób stosowania twierdzeń w okręgu toruńskim. Zwłaszcza dotyczy to twierdzeń, które nie mogły mieć zastosowaniu w dowodzie zadania 6.2.58 (np. zasada indukcji matematycznej, wzory Viete'a).

Na podstawie tabeli 38 można wysnuć naturalny wniosek, że im starszy i bardziej doświadczony uczestnik OM, tym większa znajomość twierdzeń.

Twierdzenie	(1)	(6)	(4)	(2)	(8)
Polska	79	23	26	9	4
gdański	2	0	0	0	0
katowicki	9	1	2	0	4
krakowski	6	5	6	1	0
lubelski	7	1	2	0	0
łódzki	3	2	1	0	0
poznański	6	1	0	0	0
szczeciński	2	1	4	1	0
toruński	8	2	4	1	0
warszawski	20	8	6	3	0
wrocławski	16	2	1	3	0
a	4	0	0	1	0
b	0	0	0	0	0
c	2	1	1	0	0
d	4	4	3	1	0
e	1	0	2	0	0
f	3	0	1	0	0
g	13	8	5	1	0
gimnazjum	5	0	0	0	0
I klasa liceum	7	2	3	1	1
II klasa liceum	26	9	10	3	0
III klasa liceum	39	15	13	5	3

Tabela 38: **Wykorzystanie metod dowodzenia w zadaniu 6.2.58.**
Opis oznaczeń użytych w tabelach (1) nierówność między średnimi: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną ,
(6) nierówności między średnimi potęgowymi'
(4) nierówność Jensena,
(2) twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych,
(8) twierdzenie o funkcji supermodularnej.

2.4.3 Twierdzenia wykorzystane do dowodu zadania 6.3.58

Zadanie wymagało jedynie zastosowania zasady indukcji matematycznej lub zastosowania dowodu nie wprost.

	Zasada indukcji matematycznej	Dowód nie wprost
Polska	30	4
gdański	1	0
katowicki	4	1
krakowski	2	3
lubelski	4	0
łódzki	0	0
poznański	1	0
szczeciński	2	0
toruński	3	0
warszawski	8	0
wrocławski	5	0
a	1	0
b	1	0
c	0	0
d	0	3
e	2	0
f	1	0
g	6	0
gimnazjum	0	0
I klasa liceum	7	1
II klasa liceum	9	2
III klasa liceum	14	1

Tabela 39: **Wykorzystanie metod dowodzenia w zadaniu 6.3.58.**

3 Analiza rozwiązań zadań planimetrycznych

3.1 Zadanie 2 z II etapu 57 OM

3.1.1 Treść i rozwiązania zadania

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC+BC=3\cdot AB$. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Niech K i L będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów D i E względem punktu I. Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

Rozwiązania

Rozwiązanie firmowe opiera się na znanym olimpijczykom lemacie, że dwusieczna kąta C i symetralna boku AB przecinają się w punkcie P leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Istotnym elementem rozwiązania jest wskazanie, że punkt P jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty A, B, K, L. Jest to wniosek wynikający z obserwacji, że jeżeli na czworokącie $ABLK$ można opisać okrąg, to jego środek leży na przecięciu symetralnych odcinków AB i KL. Symetralna odcinka KL jest jednocześnie dwusieczną kąta ABC. Rozwiązujący posłużyli się zatem warunkiem koniecznym dla tezy, lecz nie równoważnym tezie. Faza redukcji tezy ukierunkowana na założenie kończyła się zatem w tym miejscu. W następnej kolejności pojawiała się faza dedukcji ukierunkowana na warunek: punkt P jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty A, B, K, L. Faza ta jest bardziej naturalna, gdyż dotyka strategii regularnej drogi: nastąpiła zmiana problemu na łatwiejszy do uchwycenia. Wielu uczniów postąpiło w ten sposób. Różnice pojawiły się w fazie dedukcji.
Poniżej zaprezentuję szereg sposobów różniących się fazą dedukcji.
Uczniowie, którzy zaprezentowali sposoby od 1 do 8 zdecydowali się zatem na metodę dedukcyjno-redukcyjną, zbliżoną do opisanej powyżej.

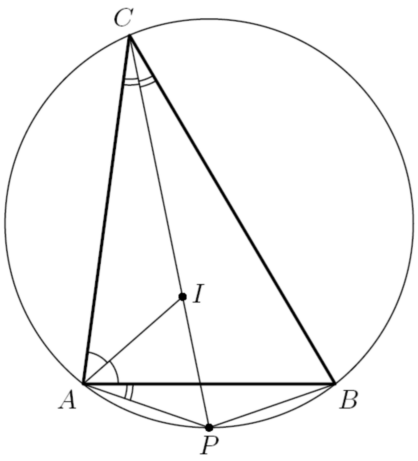
Sposób 1 (zaproponowany przez organizatorów)

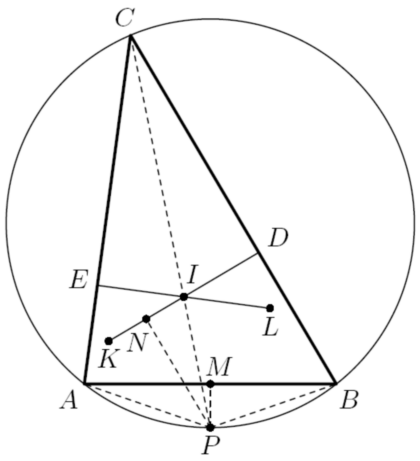
Oznaczmy przez P punkt przecięcia dwusiecznej kąta ACB z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Wówczas $AP=BP$. Ponadto

$$\measuredangle PAI=\measuredangle PAB+\measuredangle BAI=\measuredangle PCB+\measuredangle CAI=\measuredangle ACI+\measuredangle CAI=\measuredangle PIA,$$

skąd wynika, że $AP=IP$.

Punkty A, B oraz I leżą więc na okręgu o środku P. Wykażemy, że na tym okręgu leżą również punkty K i L.
Punkty D i E są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami BC i AC, a więc $CD=CE=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)$. Ponadto dana w treści zadania równość jest równoważna zależności $AB=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)$. Stąd wynika, że $CD=AB$. Oznaczmy przez M środek odcinka AB, a przez N rzut prostokątny punktu P na prostą DI. Wówczas proste PN i BC są równoległe, wobec czego $\measuredangle PAM=\measuredangle PCB=\measuredangle IPN$. To w połączeniu z równością $AP=IP$ dowodzi, że trójkąty prostokątne APM i PIN są przystające. Stąd otrzymujemy $PN=AM$.





Proste CD i PN są równoległe, więc

$$\frac{ID}{IN} = \frac{CD}{PN} = \frac{AB}{AM} = 2,$$

skąd dostajemy $ID = 2 \cdot IN$. Zależność ta w połączeniu z równością $ID = IK$ implikuje, że $IN = KN$. Wobec tego punkt K jest symetryczny do punktu I względem prostej PN. Wobec tego $IP = KP$. Analogicznie dowodzimy, że $IP = LP$. Z uzyskanych zależności wynika, że punkty A, B, K, L oraz I leżą na okręgu o środku P, co kończy rozwiązanie zadania.

□

Komentarz.
Faza dedukcji w sposobie 1 opierała się na obserwacji zależności między kątami o równych miarach i stosunkami długości odcinków. Wykorzystywane były zatem jedynie cechy podobieństwa trójkątów. Ponadto zastosowano (z dowodem) lemat: $PI = PA = PB$, który jest znanym olimpijczykom twierdzeniem.
Jak trudny był ten sposób rozwiązania zadania świadczy fakt, że tylko jeden uczeń go zaprezentował. Był to zawodnik WA61, który w II etapie uzyskał 16 punktów (2, 6, 0, 2, 6, 0), a w III etapie 4 punkty (0, 2, 0, 2, 0, 0).

Sposób 2

Sposób 2, zaproponowany przez ucznia KR70, opiera się na twierdzeniach: sinusów i Ptolemeusza.

Uczeń KR70 wyznaczył punkt P jako punkt wspólny prostej CI i symetralnej odcinka AB. Stwierdził, że wystarczy wykazać, że $BP = PL$. Zrealizował to następująco:

Z twierdzenia sinusów dla trójkątów APC i PCB mamy:

$$\frac{CP}{\sin \measuredangle PBC} = \frac{BP}{\sin \measuredangle PCB} = \frac{AP}{\sin \measuredangle PCA} = \frac{PC}{\sin \measuredangle CAP} \Rightarrow \sin \measuredangle CAP = \sin \measuredangle PBC.$$

Zatem $\measuredangle CAP = \measuredangle PBC$ (i wtedy trójkąt ABC jest równoramienny i teza zachodzi) lub

$\measuredangle CAP = \measuredangle 180^\circ - PBC$ (i punkty A, C, B, P leżą na jednym okręgu).
Ponieważ $AM = MB$, mamy:

$$\cos \measuredangle ABP = \frac{x+y}{2 \cdot BP}. \tag{17}$$

Z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $ACBP$ mamy:

$$AC \cdot BP + BC \cdot AP = CP \cdot AB.$$

$$(z+x)BP + (z+y)BP = CP(x+y)$$

$$CP = \frac{BP(2z+x+y)}{x+y} = \frac{BP(3x+3y)}{x+y} = 3 \cdot BP. \tag{18}$$

Na podstawie (17) i (18) mamy:

$$CI = \frac{z}{\cos \measuredangle ABP} = (x+y)\frac{2 \cdot BP}{x+y} = 2 \cdot BP. \tag{19}$$

Z (18) i (19):

$$PI = CP - CI = 3 \cdot BP - 2 \cdot BP = BP.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta GPL, gdzie G jest punktem wspólnym prostej CI i KL:

$$PL^2 = PG^2 + GL^2 = (PI - GI)^2 + GL^2 = BP^2.$$

Stąd $BP = PL$, co należało pokazać.

□

Komentarz.
Zwraca uwagę fakt, że uczeń nie dostrzegł od razu, że punkt przecięcia symetralnej boku AB i dwusiecznej kąta ACB leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC (olimpijczyk tej klasy powinien znać to twierdzenie). Uczeń dowodził to twierdzenie za pomocą twierdzenia sinusów, a potem zastosował twierdzenie Ptolemeusza. Zastosowane środki świadczą o dobrej orientacji w zagadnieniach planimetrycznych, a zapis rozwiązania o dobrym panowaniu nad sytuacją.
Uczeń KR70 w II etapie zdobył 29 punktów (6, 6, 6, 6, 5, 0). W III etapie zdobył 8 punktów (6, 2, 0, 0, 0, 0).

Sposób 3

W dowodzie, zaproponowanym przez zawodnika KA33, wykorzystywane jest twierdzenie o dwusiecznej oraz bardzo interesujący sposób rozwiązywania równania.

Uczeń KA33 zdefiniował punkt O jako środek okręgu opisanego na trójkącie KIL. Wykazał, że punkt O leży na dwusiecznej kąta ACB i symetralnej odcinka KL oraz, że $OI = \frac{1}{2}CI$. Wprowadził oznaczenia odległości wierzchołków trójkąta od punktów styczności okręgu wpisanego: $AE = AF = x, BF = BD = y, CD = CE = z$ i wykazał, że z założenia wynika $x + y = z$. Następnie napisał:
Niech G będzie punktem przecięcia prostej AB i dwusiecznej kąta ACB. G leży na odcinku

OI. Trójkąt FGI jest podobny do trójkąta OKG, gdzie K jest rzutem punktu O na prostą AB. Z twierdzenia o dwusiecznej: $\frac{AC}{AG} = \frac{BC}{BG}$.
Niech $AG = c, GB = d$. *Wówczas:*

$$\frac{2x+y}{c} = \frac{2y+x}{d},$$
$$c + d = x + y.$$

Skąd $c = \frac{2x+y}{3}, d = \frac{2y+x}{3}$.

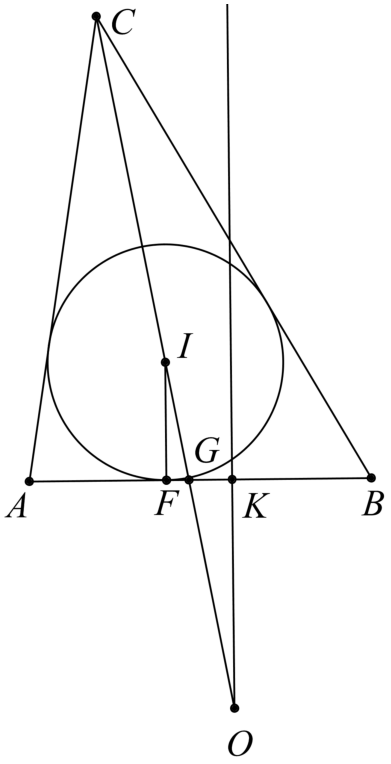
$$FG = AG - AF = c - x = \frac{y-x}{3}$$
$$KG = BG - BK = d - BK = \frac{2y+x}{3} - BK$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta IDC:

$$CI^2 = r^2 + (x+y)^2.$$

Z równości pól dla trójkąta ABC mamy:

$$r\frac{4x+4y}{2} = \sqrt{2(x+y)(x+y)xy},$$
$$r^2 = \frac{xy}{2}.$$



Niech $KG = a$. *Wówczas:*

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{y-x}{3}\right)^2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{3ra}{y-x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(r^2 + (x+y)^2)},$$
$$\sqrt{\frac{xy}{2} + \left(\frac{y-x}{3}\right)^2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{xy}{2}\frac{3a}{y-x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{xy}{2} + (x+y)^2\right)}.$$

Otrzymujemy zatem równanie na zmienną a w zależności od x i y. Lewa strona jest rosnącą funkcją zmiennej a oraz $a = \frac{y-x}{6}$ *spełnia równanie, czyli jest to jedyne rozwiązanie. Zatem:*

$$\frac{y-x}{6} = KG = \frac{2y+x}{3} - BK,$$
$$BK = \frac{1}{2}AB.$$

Zatem KO jest symetralną AB, czyli $OA = OB$ *i* $AK = BK$. *Wobec tego trójkąt OKA jest podobny do trójkąta CID w skali* $\frac{1}{2}$, *czyli* $OA = \frac{1}{2}CI$, *a więc* $OA = OK = OL = OB = OI$.

□

Komentarz.
Uczeń zaprezentował bardzo efektowne rozwiązanie z pełną celowością kolejnych kroków. Szczególnie interesujący jest fragment, w którym uczeń wykorzystuje monotoniczność funkcji, aby wskazać rozwiązanie stosownego równania. Ten motyw pojawił się tylko w rozwiązaniu KA33. Zwraca uwagę fakt, że uczeń wiedział, co jest mu potrzebne do dokończenia dowodu, więc tylko sprawdził w ten specyficzny sposób, że miał rację.

Uczeń KA33 zdobył w II etapie 23 punkty (6, 6, 0, 5, 6, 0), a w finale 2 punkty (0, 0, 2, 0, 0, 0).

Sposób 4

W dowodzie wykorzystane zostały: wzór Herona, własności jednokładności oraz podobieństwo trójkątów.

Uczeń TO72 korzystając ze wzoru Herona wykazał, że promień okręgu wpisanego jest równy $r = \sqrt{\frac{xy}{2}}$. Następnie napisał:

Jeśli $CI \perp AB$, to $x = y$, $AKLB$ jest trapezem równoramiennym i teza zadania w oczywisty sposób zachodzi. W innym przypadku symetralna odcinka AB i prosta CI mają dokładnie jeden punkt wspólny; niech będzie to punkt O. Nazwijmy rzuty prostokątne O na AC i BC odpowiednio P i Q. Wtedy $OP = OQ$ oraz $OA = OB$ daje przystawanie trójkątów AOP i BOQ, a więc równość $AP = BQ$. Załóżmy, że $x > y$. Wówczas:

$$2x - y - CP = AP = BQ = CQ - x - 2y = CP - x - 2y \Rightarrow$$
$$CP = \frac{3(x+y)}{2}, AP = \frac{x-y}{2}.$$

Stąd

$$AO^2 = OP^2 + PA^2 = OP^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Widzimy jednak, że O jest obrazem punktu I w jednokładności o środku w punkcie C i skali $\frac{3}{2}$, więc $CO = \frac{3}{2}CI$ i $OP = \frac{3}{2}r$.
$OK^2 = OY^2 + YK^2 = (CO - CI - IY)^2 + EX^2 = \left(\frac{CI}{2} - IY\right)^2 + EX^2 = \frac{(x+y)^2+r^2}{4} - CI \cdot IY + r^2$, gdzie Y jest punktem przecięcia prostej CI z prostą KL, a X jest punktem przecięcia prostej CI z prostą ED.
Łatwo spostrzec, iż $\sphericalangle ECI = \sphericalangle IEX$, czyli z podobieństwa trójkątów ECI i XEI wynika $\frac{EI}{CI} = \frac{XI}{EI}$, a więc $r^2 = EI^2 = CI \cdot XI = CI \cdot YI$. Tak więc:

$$OK^2 = \frac{(x+y)^2 + r^2}{4} - r^2 + r^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \frac{4xy + r^2}{4}.$$

Ze wzoru $r = \sqrt{\frac{xy}{2}}$ mamy:

$$OK^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \frac{9r^2}{4} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + OP^2 = AO^2.$$

Dostaliśmy $OK = OA$, ale O leży na symetralnej odcinka AB, więc $OA = OB$ oraz na prostej CI, która jest symetralną odcinka ED, a więc także odcinka KL równoległego do ED, czyli $OK = OL$. Punkty A, B, K, L leżą w jednakowej odległości od punktu O, leżą więc na pewnym okręgu, co należało dowieść.

□

Komentarz.
Uczeń TO72 był uczniem II klasy VI LO w Bydgoszczy. W II etapie zdobył 36 punktów, a w III etapie 17 punktów (0, 0, 0, 6, 6, 5), za co uzyskał wyróżnienie.

Sposób 5

Wykorzystano metodę opisywaną przez Polyę jako *odgadnij i sprawdź*.

Uczeń WA67 udowodnił, że prosta CI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie X, który jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABI. Korzystając z oznaczeń $\measuredangle ECI = \alpha$ i $CE = AB = c$, stwierdził, że $\measuredangle AXB = 180^\circ - 2\alpha$. Następnie napisał:
Dowodzi to, że trójkąt AXB jest podobny do trójkąta KIL. Prosta CX jest osią symetrii trójkątów KIL i KXL.

$$QL = \frac{1}{2}ED = c\sin\alpha$$

$$XI = XB = \frac{c}{2\cos\alpha}$$

$$IQ = QL\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

Z twierdzenia Pitogarasa dla trójkąta XQL:

$$XL^2 = (XI - IQ)^2 + QL^2 =$$

$$\frac{c^2}{4\cos^2\alpha(1 - 4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha + 4\sin^2\alpha - 4\sin^4\alpha)} = XB^2.$$

Otrzymaliśmy więc, że $XK = XL = XB = XA$, a zatem punkty A, B, K, L leżą na okręgu o środku w punkcie X.

□

Komentarz.
Strategia pokazana przez ucznia WA67 polegała na wskazaniu środka okręgu opisanego na trójkącie AIB i wykazaniu, że jest to środek poszukiwanego okręgu.
Uczeń WA67 był uczniem klasy I w XIV LO w Warszawie. W II etapie zdobył 17 punktów (0, 6, 6, 5, 0, 0), a w III etapie 14 punktów (2, 0, 6, 6, 0, 0).
Bardzo podobne, co do metody, rozwiązanie przedstawili uczniowie WA76 i WA171.
Zawodnik WA76 był także uczniem klasy I w XIV LO w Warszawie. W II etapie uzyskał 24 punkty (6, 6, 0, 6, 6, 0), a w III etapie 2 punkty (0, 2, 0, 0, 0, 0).
Zawodnik WA171 był uczniem III klasy w XIV LO w Warszawie. W II etapie zdobył 29 punktów (6, 6, 6, 5, 6, 0), a w III etapie 13 punktów (2, 6, 0, 0, 0, 5).

Sposób 6

W dowodzie wykorzystano własności symetrii środkowej.

Uczeń KR04 wykorzystując rachunek na kątach wykazał, że środek O okręgu opisanego na trójkącie ABI leży na prostej CI i okręgu opisanym na trójkącie ABC. Następnie korzystając z twierdzenia sinusów obliczył, że promień okręgu opisanego na trójkącie ABI ma długość $\frac{AB}{\cos\measuredangle ICB}$ i promień okręgu opisanego na trójkącie DEI ma długość $\frac{CD}{\cos\measuredangle ICB}$. Wobec równości $AB = CD$ promienie okręgów opisanych na trójkątach ABI i DEI są równej długości. Wobec tego napisał dalej:
Niech f będzie symetrią środkową względem punktu I. Ponieważ $SI = OI$, gdzie S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEI oraz punkty S, I, O są współliniowe, więc $f(S) = O$.

Ponadto promienie okręgów ABI i DEI są równe, a więc obrazem okręgu ABI w symetrii f jest okrąg DEI. Ale punkty D, E należą do okręgu DEI, a więc punkty $f(D)$ i $f(E)$ należą do okręgu $f(DEI)$. Zatem punkty A, B, K, L, I leżą na jednym okręgu.

□

Komentarz.
Uczeń zastosował strategię prawdopodobnego wyniku i regularnej hipotezy. Jego rozbudowany aparat matematyczny oraz wiedza i intuicja spowodowały, że miał pewność, że wybrany przez niego punkt O, będący środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABI będzie jednocześnie środkiem poszukiwanego okręgu.
Uczeń zaprezentował rozwiązanie bardzo eleganckie i dobrze zapisane. Ze sposobu prowadzenia rozumowania i elegancji zapisu można wnosić, że uczeń miał pełną świadomość celu, który chciał osiągnąć i panował nad swoim rozwiązaniem.
Uczeń KR04 w II etapie uzyskał 36 punktów, w III etapie 31 punktów (6, 2, 5, 6, 6, 6) i zajął pierwsze miejsce. W MOM zdobył złoty medal.

Sposób 7

W sposobie 7 wykorzystane zostały: twierdzenie cosinusów i wzór Herona.

Uczeń KA23 przedstawił następujące rozwiązanie:
Wprowadźmy oznaczenia odległości wierzchołków trójkąta od punktów styczności okręgu wpisanego: $AE = AF = x, BF = BD = y, CD = CE = z$. Z założenia wynika, że $x + y = z$. Pokażemy, że okrąg o środku w punkcie O, takim, że O leży na półprostej CI oraz $CI = \frac{2}{3}CO$ oraz promieniu $R = OK$ zawiera punkty K, L, A, B.
Następnie zauważył, że z definicji tego okręgu wynika, że należą do niego punkty K i L. Przyjął na rysunku oznaczenia $\measuredangle EIC = \alpha, \measuredangle ECI = \beta$. Następnie napisał:

Zauważmy, że pole trójkąta ABC jest równe

$$S = \frac{1}{2}r((x + 2y) + (2x + y) + x + y) = 2(x + y)r,$$

$$S = \sqrt{p(p - x - 2y)(p - 2x - y)(p - x - y)} = (x + y)\sqrt{2xy}.$$

Mamy więc $r = \sqrt{\frac{xy}{2}}$.
Ponadto $4a^2 = r^2 + (x + y)^2 = (x + y)^2 + \frac{xy}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}\sqrt{(x + y)^2 + \frac{xy}{2}}$.
Na mocy twierdzenia cosinusów dla trójkąta IEC mamy:

$$\frac{xy}{2} = 2ar\cos\alpha.$$

Na mocy twierdzenia cosinusów dla trójkąta ILO mamy:

$$R^2 = \frac{1}{4}((x + y)^2 + \frac{xy}{2}).$$

Na mocy twierdzenia cosinusów dla trójkąta CIE mamy:

$$x + y = 2a\cos\beta.$$

Na mocy twierdzenia cosinusów dla trójkąta COA mamy:

$$OA^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{(x+y)^2+\frac{xy}{2}}\right)^2 + (2x+y)^2 - 2\cdot 3a(2x+y)\cos\beta =$$

$$\frac{9}{4}(x+y)^2 + \frac{9}{4}\frac{xy}{2} + 4x^2 + 4xy + y^2 - 3(2x+y)(x+y) = \frac{1}{4}\left((x+y)^2+\frac{xy}{2}\right).$$

Skoro $OA^2 = R^2$, więc punkt A należy do okręgu o środku O i promieniu OK.
Na mocy twierdzenia cosinusów dla trójkąta COB mamy:

$$OB^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{(x+y)^2+\frac{xy}{2}}\right)^2 + (2x+y)^2 - 2\cdot 3a(2x+y)\cos\beta =$$

$$\frac{9}{4}(x+y)^2 + \frac{9}{4}\frac{xy}{2} + 4x^2 + 4xy + y^2 - 3(2x+y)(x+y) = \frac{1}{4}\left((x+y)^2+\frac{xy}{2}\right).$$

Skoro $OB^2 = R^2$, więc punkt B należy do okręgu o środku O i promieniu OK.
Udowodniliśmy więc, że A, B, K, L należą do okręgu o środku O i promieniu OK.

□

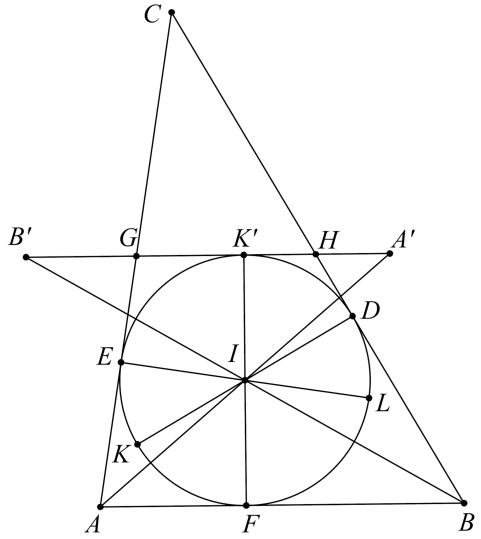
Komentarz.
Uczeń na samym początku odkrył, jaki punkt jest środkiem poszukiwanego okręgu. To ułatwiło wykazanie, że wskazany punkt istotnie jest środkiem tego okręgu.
Zwraca uwagę stosowanie twierdzenia cosinusów w sytuacjach, w których wystarczyło powołać się na definicję funkcji trygonometrycznej w trójkącie prostokątnym. Zwracają także uwagę powtórzenia w rozumowaniu, co można interpretować jako chęć przeprowadzenia bardzo precyzyjnego rozumowania ze ścisłym zapisem. Można też przypuszczać, że uczeń miał pewne kłopoty z gospodarowaniem wiedzą i kontrolą własnych poczynań.
Zawodnik w II etapie zdobył 24 punkty (6, 6, 0, 6, 6, 0), a w III etapie 14 punktów (6, 2, 0, 0, 0, 6).

Sposób 8

Rozwiązanie przedstawił uczeń GD90.
Zawodnik wykorzystał przekształcenie rysunku w symetrii środkowej, co zmieniło konfigurację punktów na czytelniejszą. Ponadto wykorzystał wzory na pole trójkąta do pokazania zależności w powstałym czworokącie.
Kluczowe dla powodzenia rozwiązania okazało się dokonanie przekształcenia, które ułatwiło wykonanie obliczeń długości odcinków. I w tym rozwiązaniu istotne okazało się także wskazanie punktu, który okazał się środkiem poszukiwanego okręgu.

Punkty K i L są dosyć „brzydkie". Dlatego odbijemy je z powrotem symetrycznie względem punktu I, wraz z punktami A i B.
Jeżeli pokażemy, że po odbiciu punkty A, B, K i L leżą na jednym okręgu, pokażemy automatycznie, że przed odbiciem też miały ta własność - bowiem symetria względem punktu zachowuje odległość i kąty, więc oba warunki są równoważne.
A zatem - niech punktem symetrycznym do punktu A względem punktu I będzie A', zaś do punktu B - punkt B'.
Punktami symetrycznymi do K i L są oczywiście odpowiednio punkty D i E. Mamy pokazać, że punkty A', B', D i E leżą na jednym okręgu.

Odcinek $A'B'$ jest symetryczny do odcinka AB względem punktu I, środka okręgu wpisanego. Musi być zatem, jak odcinek AB, styczny do tego okręgu.
Oznaczmy przez G i H punkty przecięcia się odcinka $A'B'$ odpowiednio z odcinkami AC i BC. Przez F oznaczmy punkt styczności okręgu wpisanego z odcinkiem AB.



Znanym faktem jest, że $AE = AF$, $BF = BD$ i $CD = CE$. Oznaczmy $x = AE = AF$, $y = BF = BD$ i $z = CD = CE$.
Wiemy, że $AC + BC = 3AB$. Wyciągniemy stąd dwa ważne wnioski:
Po pierwsze, zapisując boki trójkąta jako sumy wybranych długości x, y, z mamy:

$$(x + z) + (y + z) = 3(x + y)$$

Stąd $z = x + y$.

Po drugie, obwód trójkąta ABC wynosi $AC + BC + AB = 4AB$. Niech h będzie długością wysokości trójkąta ABC opuszczonej na bok AB, zaś r - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Pole trójkąta ABC wynosi $\frac{AB \cdot h}{2}$, jak również $\frac{AB+BC+AC}{2} r = 2AB \cdot r$. Stąd $\frac{AB \cdot h}{2} = 2AB \cdot r$, więc $h = 2r$. Odległość między $A'B'$ i AB wynosi $2r$, stąd $A'B'$ leży w odległości równej połowie wysokości trójkąta ABC.
Stąd $AG = \frac{z+x}{2} = \frac{(x+y)+x}{2} = x + \frac{y}{2}$. Ponieważ $AE = x$, zatem $GE = \frac{y}{2}$. Analogicznie $HD = \frac{x}{2}$.
Niech punkt K' będzie punktem styczności prostej $A'B'$ do okręgu wpisanego. Wówczas $GK' = GE = \frac{y}{2}$ i $HK' = HD = \frac{x}{2}$. Prosta FK' przechodzi przez punkt I i jest prostopadła do AB. Stąd $B'K' = BF = y$ i $A'K' = AF = x$.
Zauważamy, że $B'G = B'K' - GK' = y - \frac{y}{2}$. Analogicznie otrzymujemy $A'H = \frac{x}{2}$.
Podsumowując $B'G = K'G = EG = \frac{y}{2}$ i $A'H = K'H = DH = \frac{x}{2}$.
Niech prosta p będzie symetralną odcinka $B'E$, zaś prosta q - symetralną odcinka $A'D$. Ponieważ $B'E$ i $A'D$ nie są równoległe, proste p i q przetną się w pewnym punkcie - oznaczmy go przez S. Punkt S jest kandydatem na środek okręgu opisanego na czworokącie $A'B'ED$, bo $SB' = SE$ i $SD = SA'$. Pozostaje pokazać, że $SE = SD$.
Zauważmy, że prosta p przechodzi przez punkt G oraz jest dwusieczną kąta CGH. Analogicznie prosta q przechodzi przez punkt H i jest dwusieczną kąta CHG. A zatem punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt GHC.
Trójkąty ABC i GHC są podobne, a punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC - stąd $\measuredangle ICA = \measuredangle SCG$, a zatem punkt S leży na prostej CI.
Trójkąty CEI i CDI są podobne ($CE = CD, EI = DI, \measuredangle CEI = \measuredangle CDI = 90^\circ$), stąd punkt E jest obrazem punktu D w symetrii względem CI. Punkt S leży na prostej CI, więc $SE = SD$. A więc $SB' = SE = SD = SA'$, czyli punkt S jest środkiem okręgu, na którym leżą punkty B', A', E, D, co kończy dowód zadania.

□

Komentarz.
Zawodnik GD90 był uczniem II klasy III LO w Gdyni. W II etapie uzyskał 30 punktów (nie

zrobił tylko zadania 6), a w finale - 19 punktów (0,2,6,5,0,6) i został laureatem III stopnia.

W sposobach od 1 do 8 uczniowie zastosowali strategię regularnej hipotezy – musieli się spodziewać, że punkty przez nich wybrane są poszukiwanymi punktami. Wykorzystywali zatem strategię *odgadnij i sprawdź*. Wpływ na wybór strategii na pewno miała wiedza, jaką nabywa się w trakcie procesu rozwiązywania wielu zadań podobnego typu, jak również intuicja oparta na doświadczeniu.

Sposób 9

Zawodnik KA65 wykorzystał w dowodzie własności potęgi punktu względem okręgu.

Uczeń KA65 przyjął oznaczenia odległości wierzchołków trójkąta od punktów styczności okręgu wpisanego: $AE = AF = x, BF = BD = y, CD = CE = z$ i z założenia wyprowadził warunek $x + y = z$. Następnie poprowadził prostą k styczną do okręgu wpisanego w trójkąt ABC i równoległą do prostej AB, która przecięła odcinek AC w punkcie Y i odcinek BC w punkcie X. Uczeń wykazał, że trójkąt CXY jest podobny do trójkąta CBA w skali $\frac{1}{2}$.
Następnie napisał:
Opiszmy na czworokącie $CDIE$ okrąg ω. Niech prosta XY przecina ten okrąg w punktach Z, W tak, że Z jest po przeciwnej stronie punktu X niż Y. Korzystając z potęgi punktu X, Y względem okręgu ω mamy równości:

$$XD \cdot XC = XZ \cdot XW,$$
$$YW \cdot YZ = YE \cdot YC.$$

Wiemy, że

$$XC = \frac{1}{2}(y+z), YC = \frac{1}{2}(z+x), XD = \frac{1}{2}(z-y), YE = \frac{1}{2}(z-x),$$

$$XW = YW + XY = YW + \frac{1}{2}AB, YZ = XY + XZ = \frac{1}{2}AB + XZ.$$

Po rozwiązaniu względem XY, YW (żmudne obliczenia!) możemy stwierdzić, że

$$ZW = XZ + YW + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(z-y) + \frac{1}{2}(z-x) + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}(y+x) = y = AB.$$

Po powyższym, długim rozumowaniu, możemy wreszcie zauważyć, że $ABZW$ jest równoległobokiem, którego przekątne przecinają się w punkcie I, zatem $S(Z) = A, S(W) = B$, gdzie S oznacza symetrię środkową względem punktu I. Ponadto $S(D) = K, S(E) = L$. Skoro punkty D, E, W, Z leżą na jednym okręgu ω, to punkty A, B, K, L także leżą na jednym okręgu - jest nim $S(\omega)$.

□

Komentarz.
Uczeń KA65 otrzymał za rozwiązanie 5 punktów. Głównym powodem były luki w rozumowaniu: zawodnik pominął obliczenia (co skomentował *żmudne obliczenia*), a także nie uzasadnił, że przekątne równoległoboku $ABZW$ przecinają się w punkcie I.
Uczeń zastosował dedukcję ukierunkowaną na założenie. Miał świadomość celu, do którego

dążył wykorzystując technikę charakterystyczną dla zadań olimpijskich: potęgę punktu względem okręgu. Widoczne jest bardzo dobre panowanie nad rozwiązaniem, nie ma niepotrzebnych faktów, choć niektóre z nich są słabo uzasadnione.
Uczeń w II etapie uzyskał 17 punktów (0, 5, 6, 0, 6, 0), a w III etapie 6 punktów (0, 6, 0, 0, 0, 0).

Sposób 10

Zawodnik KR73 wykorzystał własności odcinków stycznych do okręgów dopisanych.

Uczeń KR73 wyznaczył prostą BL, która przecięła bok AC w punkcie G oraz poprowadził prostą AK, która przecięła bok BC w punkcie H. Punkty H i G są punktami styczności okręgów dopisanych do trójkąta ABC, a zatem spełnione są równości: $AG = EC = CD = HB$. Proste styczne do okręgu wpisanego w trójkąt ABC w punktach K oraz L przecinają się w punkcie Z. Uczeń dalej pisał:
$\sphericalangle LBA = \sphericalangle GBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CAB)$, gdyż $AG = AB$ i trójkąt ABG jest równoramienny.
Podobnie, skoro $HB = AB$, to trójkąt AHB jest równoramienny i $\sphericalangle AHB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CBA)$.
Z twierdzenia o kącie między styczną a sieczną mamy:

$$\sphericalangle LKZ = \sphericalangle KEL = \frac{1}{2}\sphericalangle KIL = \frac{1}{2}\sphericalangle EID =$$

$$\frac{1}{2}(360^\circ - \sphericalangle IEC - \sphericalangle IDC - \sphericalangle ACB) = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ACB),$$

gdyż punkty E, I, L leżą na jednej prostej, punkty K, I, D leżą na jednej prostej oraz $EI \perp AC$ i $DI \perp BC$.
Zatem otrzymujemy: $\sphericalangle LBA + \sphericalangle AKZ + \sphericalangle LKZ = 180^\circ$
czyli ostatecznie $\sphericalangle AKL + \sphericalangle LBA = 180^\circ$, co dowodzi tezy.

□

Komentarz.
Uczeń zaprezentował bardzo eleganckie rozumowanie, w którym dostrzegalny jest wpływ dużej wiedzy z zakresu geometrii trójkąta. Uczeń postanowił wykorzystać warunek konieczny i wystarczający wpisywalności czworokąta w okrąg. Kluczową obserwacją, która wynikała z ugruntowanej wiedzy i umiejętnego gospodarowania tą wiedzą, było zauważenie zależności długości odcinków stycznych do okręgów dopisanych. Strategia zakwalifikowania zadania do pewnego typu zadań przyniosła sukces.
Zaletą tego rozumowania jest to, że jest bardzo proste i nie odnosi się do skomplikowanych pojęć.
Zawodnik KR73 był uczniem II klasy w V LO w Krakowie. W II etapie uzyskał 30 punktów (6, 6, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 14 punktów (6, 0, 0, 6, 2, 0).

Niezwykle podobne rozwiązania (zarówno w zakresie metody, jak i zapisu) zaprezentowali uczniowie KR36, SZ20, WA23, WA63 i WA68.
Uczeń KR36 uczęszczał do V LO w Krakowie. W II etapie uzyskał 24 punkty (6, 6, 6, 6, 0, 0), a w III etapie zdobył 10 punktów (2, 2, 0, 6, 0, 0).
Uczeń SZ20 uczęszczał do II klasy w XIII LO w Szczecinie. W II etapie uzyskał 23 punkty (5, 6, 6, 6, 0, 0), a w III etapie zdobył 8 punktów (0, 2, 0, 6, 0, 0).
Zawodnik WA23 był uczniem III klasy w XIV LO w Warszawie. W II etapie zdobył 18 punktów (0, 6, 6, 6, 0, 0), a w III etapie 8 punktów (0, 2, 0, 6, 0, 0).
Zawodnik WA63 był uczniem II klasy w XIV LO w Warszawie. W II etapie zdobył 29 punktów

(6, 6, 6, 0, 6, 5), a w III etapie 6 punktów (0, 0, 6, 0, 0, 0).
Zawodnik WA68 był uczniem III klasy w XIV LO w Warszawie. W II etapie zdobył 36 punktów, a w III etapie 28 punktów (2, 2, 6, 6, 6, 6) i zajął 3 miejsce. Był reprezentantem Polski na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej.

Sposób 11

Uczeń KR75 oparł swój sposób rozwiązania na podobieństwie trójkątów (w fazie dedukcji) i na warunku koniecznym i wystarczającym wpisywalności czworokąta w okrąg (w fazie redukcji).

Zawodnik KR75 najpierw udowodnił, że punkty K i L leżą poza trójkątem AIB. A następnie napisał:

$$\frac{1}{2}AI \cdot BI \sin \measuredangle AIB = \frac{1}{2}CI \cdot CI \sin \measuredangle ICD,$$

czyli $AI \cdot BI = CI \cdot DI$ *stąd otrzymujemy proporcje:*
$\frac{AI}{CI} = \frac{DI}{BI} = \frac{KI}{BI}$ *oraz* $\frac{BI}{CI} = \frac{DI}{AI} = \frac{LI}{AI}$.
Ponieważ $\measuredangle BIK = \measuredangle AIC$ *oraz* $\frac{IK}{BI} = \frac{AI}{CI}$, *to trójkąty* BIK *i* CIA *są podobne, a stąd* $\measuredangle IBK = \measuredangle ICA$.
Zauważmy teraz, że $\measuredangle IBK = \measuredangle ILK$, *wobec czego czworokąt* $BLIK$ *jest wpisany w okrąg. Stąd* $\measuredangle IBL = \measuredangle IKL$.
Ponadto, ponieważ $\measuredangle AIL = \measuredangle BIC$ *oraz* $\frac{BI}{CI} = \frac{IL}{AI}$, *to trójkąty* BIC *i* LIA *są podobne, a stąd* $\measuredangle IAL = \measuredangle BCI$.
Zauważmy, że $\measuredangle IAL = \measuredangle IKL$, *wobec czego czworokąt* $AKIL$ *jest wpisany w okrąg. Stąd* $\measuredangle IAK = \measuredangle ILK$, *czyli* $\measuredangle KAL = \measuredangle KBL$, *a stąd już widać, że czworokąt* $ABLK$ *jest wpisany w okrąg, co dowodzi tezy zadania.*

□

Komentarz.
Zastosowana metoda ma charakter redukcyjno-dedukcyjny. Strategia rozkładu problemu na kilka problemów mniejszych dała dobry rezultat. Widoczne jest dobre panowanie nad sytuacją, zwłaszcza w momencie, gdy uczeń wykazał, że punkty K i L leżą poza trójkątem AIB. Miał świadomość, że bez tego subtelnego szczegółu wnioskowanie o równości kątów w czworokątach $BLIK$ i $AKIL$ byłoby niemożliwe. Dostrzegalne jest także wyraźne prowadzenie rozumowania precyzyjnie do celu.
Zawodnik KR75 uzyskał w II etapie 12 punktów (6, 6, 0, 0, 0, 0), a w etapie III zdobył 5 punktów (0, 0, 0, 5, 0, 0).

Sposób 12

Zawodnik WA11 wykorzystał rachunek na kątach i podobieństwo trójkątów.

Uczeń WA11 wykazał, że na czworokącie $CDIE$ można opisać okrąg, którego środek O leży na prostej CI, dwusiecznej kąta ACB. Następnie na trójkącie BIA opisał okrąg o środku X i przyjął oznaczenia: $\measuredangle BIF = \measuredangle BID = \alpha, \measuredangle DIC = \measuredangle EIC = \beta, \measuredangle AIE = \measuredangle AIF = \gamma$. Następnie napisał:
$\measuredangle EIC$ *jest oparty na mniejszym łuku cięciwy* CE. $\measuredangle BIA$ *jest oparty na łuku ograniczonym*

cięciwą BA. Miara tego kąta jest równa $\alpha+\gamma$, czyli miara dowolnego kąta wpisanego w okrąg o środku X, opartego na drugim łuku ograniczonym przez cięciwę BA będzie równa $180^\circ - (\alpha+\gamma) = \beta$. Skoro miary kątów wpisanych opartych na łukach równych długości ($AB = CE$) w obu okręgach są równe, to znaczy, że oba te okręgi są równej wielkości.
Kąt pomiędzy styczną do okręgu o środku X w punkcie I a cięciwą BI jest równy $90^\circ - \gamma$, bo kąt wpisany oparty na łuku BI jest równy $90^\circ - \gamma$.
Kąt pomiędzy styczną do okręgu o środku O w punkcie I a cięciwą DI jest równy $90^\circ - \beta$, bo kąt wpisany oparty na łuku DI jest równy $90^\circ - \beta$.
Ponieważ kąt DIB jest równy α, a suma kątów pomiędzy cięciwą DI i styczną do okręgu o środku O w punkcie I oraz cięciwą BI i styczną do okręgu o środku X w punkcie I jest równa $(90^\circ - \beta) + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ - (\beta+\gamma) = \alpha$, to styczne do obu okręgów w punkcie I są tą samą prostą i okręgi są styczne w punkcie I.
Poprowadźmy średnicę IZ w okręgu o środku X.
Następnie uczeń bardzo niejasno opisuje konstrukcję punktów M, N, którą można streścić następująco: punkt N należy do prostej DI i okręgu o środku X, a punkt M należy do prostej EI i okręgu o środku X. Dalej napisał:
$ZN = ZM = DC = CE$, bo są na nich oparte równe kąty wpisane w okręgach o równych wielkościach, więc trójkąty DIC, CIE, ZNI, ZMI są podobne z cechy bok, kąt, bok. Skoro LI jest tej samej długości co MI i nachylona pod tym samym kątem do ZI, to $L = M$. Analogicznie $KI = NI$, więc $K = N$. Więc punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

□

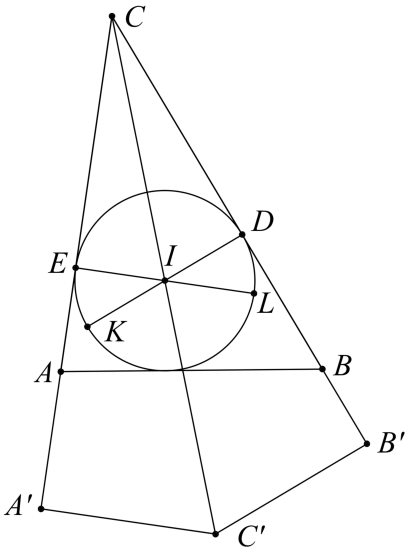
Komentarz.
Uczeń miał dobry pomysł na rozwiązanie zadania, umiał ten pomysł wykorzystać, ale zwraca uwagę poważny problem z zapisem (zwłaszcza z terminologią). Fragmenty pracy są wręcz nieczytelne. Strategia rozwiązania polegała na pokazaniu i wykorzystaniu przystawania odpowiednich okręgów. Pomysł narodził się najprawdopodobniej na podstawie analizy dokładnego rysunku.
Zawodnik WA11 był uczniem klasy II w XIV LO w Warszawie i w II etapie zdobył 14 punktów (0, 6, 0, 2, 6, 0), w III etapie 6 punktów (0, 0, 0, 6, 0, 0).

Sposób 13

Zawodnik WR33 oparł swoje rozumowanie na analizie przystawania trójkątów.

Uczeń WR33 zaprezentował nieco chaotyczne, nieprecyzyjnie zapisane rozwiązanie, które jednak jest poprawne. Jedynym mankamentem są skoki w rozumowaniu, do których brak precyzyjnego uzasadnienia.
Przedłużmy bok AC o długość DB, a bok BC o długość AE. Wówczas $IB' = IA' = CI$.
Niech C' będzie punktem symetrycznym do C względem I. Widać, że $\sphericalangle CB'I = \sphericalangle CA'I = \sphericalangle ACI = \gamma$. Zatem $\sphericalangle CIB' = \sphericalangle CIA' = 180^\circ - \gamma$ i $\sphericalangle B'IC' = \sphericalangle A'IC' = \gamma$ co daje wobec równoramienności trójkątów $A'IC'$ i $B'IC'$: $\sphericalangle IA'C' = \sphericalangle B'IC' = 90^\circ - \frac{1}{\gamma}$, więc $\sphericalangle BB'C' = \sphericalangle AA'C' = 90^\circ$.

Dalej widzimy, że $C'K = C'L = CD$.
Widzimy, że $C'B' = A'C'$, zatem trójkąty $C'B'B$ i AEL oraz trójkąty $A'AC'$ i KDB są przystające, co daje od razu $C'B = AL$ i $C'A = KB$.
Zatem trójkąt $C'AK$ jest przystający do trójkąta BAK, czyli $\sphericalangle AC'K = \sphericalangle ABK$, czyli punkty A, K, B, C' leżą na jednym okręgu.
Podobnie trójkąt $C'BL$ jest przystający do trójkąta ABL, czyli $\sphericalangle BC'L = \sphericalangle BAL$, czyli punkty A, L, B, C' leżą na jednym okręgu.
To znaczy, że na okręgu przechodzącym przez punkty A, B, C' leżą również punkty K oraz L.
A, B, L, K leżą zatem na jednym okręgu.



□

Komentarz.
Zawodnik WR33 był uczniem III klasy w III LO we Wrocławiu. W II etapie zdobył 22 punkty (5, 6, 6, 5, 0, 0), a w III etapie 2 punkty (0, 2, 0, 0, 0, 0).

Sposób 14

Uczeń KA62 zaprezentował na czterech stronach rozwiązanie analityczne. Poniżej je prezentujemy (pomijając oczywiste rachunki).

Dobierzmy taki układ współrzędnych, by punkt I był jego środkiem $(0, 0)$ i prosta AB miała równanie $y = -1$. Niech punkt A ma współrzędne $(-a, -1)$ i punkt $B(b, -1)$, a promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC był równy 1.
Przypadek 1
$a \neq b \Leftrightarrow AC \neq BC$ i $\sphericalangle BAC \neq 90°, \sphericalangle ABC \neq 90°$.
Stąd $a, b \neq 1$.
Wyliczymy współrzędne punktów E, D i C:

$$E(e_1, e_2),$$
$$EI = 1 \Rightarrow e_1^2 + e_2^2 = 1,$$
$$AE = a \Rightarrow \sqrt{(e_1 + a)^2 + (e_2 + a)^2} = a \Rightarrow$$
$$e_2 = -ae_1 - 1 \Rightarrow e_2^2 = a^2 e_1^2 + 2ae_1 + 1 \Rightarrow$$
$$1 - e_1^2 = a^2 e_1^2 + 2ae_1 + 1 \Rightarrow e_1((a^2 + 1)e_1 + 2a) = 0.$$

Ale oczywiście $e_1 \neq 0$, gdyż E nie należy do prostej AB. Zatem

$$(a^2 + 1)e_1 + 2a = 0 \Rightarrow e_1 = -\frac{2a}{a^2 + 1} \qquad \text{i} \qquad e_2 = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}.$$

Czyli $E = \left(-\frac{2a}{a^2+1}, \frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$. Analogicznie wyliczamy $D = \left(\frac{2b}{b^2+1}, \frac{b^2-1}{b^2+1}\right)$.
Zatem prosta AE ma wzór: $y = \frac{2a}{a^2+1}x + \frac{a^2-1}{a^2+1}$.

Analogicznie prosta BD ma wzór: $y = -\frac{2b}{b^2+1}x + \frac{b^2-1}{b^2+1}$.
Współrzędne punktu C wyliczymy rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{2a}{a^2+1}x + \frac{a^2-1}{a^2+1} \\ y = -\frac{2b}{b^2+1}x + \frac{b^2-1}{b^2+1} \end{cases}$$

Otrzymujemy zatem $x = \frac{a-b}{ab-1}, y = \frac{ab+1}{ab-1}$.
Oczywiście $ab \neq 1$, gdyż wówczas $AE \parallel BD$ i $ab > 1$, gdyż C jest ponad osią OX. Czyli współrzędne punktu C wynoszą $\left(\frac{a-b}{ab-1}, \frac{ab+1}{ab-1}\right)$.
Zobaczmy teraz, co daje założenie $AC + BC = 3AB$: $AC = b\frac{ab+1}{ab-1}$.
Analogicznie: $BC = a\frac{ab+1}{ab-1}$.

$$AB = a + b,$$
$$AC + BC = 3AB \Rightarrow b\frac{ab+1}{ab-1} + a\frac{ab+1}{ab-1} = 3a + 3b \Rightarrow ab = 2.$$

Wobec tego $C(a-b, 3)$. Współrzędne punktów K i L otrzymujemy przekształcając punkty D i E względem punktu $I(0,0)$. Zatem $K = -D = \left(-\frac{2b}{b^2+1}, -\frac{b^2-1}{b^2+1}\right)$.
Analogicznie $L = -E = \left(\frac{2a}{a^2+1}, -\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$.

$$AK = \frac{\sqrt{a^2+4}}{b^2+1}, BL = \frac{\sqrt{b^2+4}}{a^2+1}, KL = \frac{2a+2b}{\sqrt{a^2+b^2+5}},$$
$$AB = a + b, AL = \sqrt{a^2+4}, BK = \sqrt{b^2+4},$$
$$AK \cdot BL + KL \cdot AB = 2\sqrt{a^2+b^2+5},$$
$$AL \cdot BK = 2\sqrt{a^2+b^2+5}.$$

Czyli $AK \cdot BL + KL \cdot AB = AL \cdot BK$, więc na podstawie twierdzenia Ptolemeusza na czworokącie $AKLB$ można opisać okrąg, czyli punkty A, K, L, B leżą na jednym okręgu.
Przypadek 2
$a = b \Rightarrow AC = BC \Rightarrow AE = BD$ i $ED \parallel AB \Rightarrow$ czworokąt $ABED$ jest trapezem równoramiennym, a $EDKL$ prostokątem, czyli $AKLB$ również jest trapezem równoramiennym, czyli da się na nim opisać okrąg.
Przypadek 3
Bez straty ogólności możemy przyjąć $\measuredangle BAC = 90°$.
Punkt D ma współrzędne analogicznie jak w przypadku 1, czyli $D = \left(\frac{2b}{b^2+1}, \frac{b^2-1}{b^2+1}\right)$ i prosta BC też ma takie samo równanie $y = -\frac{2b}{b^2+1}x + \frac{b^2-1}{b^2+1}$. Dla $x = -1$ dostajemy $y = \frac{b+1}{b-1}$. Czyli $C\left(-1, \frac{b+1}{b-1}\right)$.
Z założenia $AC + BC = 3AB$.

$$AC = \frac{2b}{b-1}, BC = \frac{b^2+1}{b-1}, AB = b + 1,$$

czyli $\frac{2b}{b-1} + \frac{b^2+1}{b-1} = 3(b+1)$.

$$\frac{(b+1)^2}{b-1} = 3(b+1) \Rightarrow b = 2,$$

zatem $D\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $K\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ i $L(1,0)$.

$$AK = \sqrt{\frac{1}{5}}, BL = \sqrt{2}, AB = 3, KL = 3\sqrt{\frac{2}{5}}, AL = \sqrt{5}, BK = 2\sqrt{2},$$

$AK \cdot BL = \sqrt{\frac{2}{5}}$,
$AB \cdot KL = 9\sqrt{\frac{2}{5}}$,
$AK \cdot BL + AB \cdot KL = 2\sqrt{10}$,
$AL \cdot BK = 2\sqrt{10}$.
Zatem $AK \cdot BL + AB \cdot KL = AL \cdot BK$*, czyli tak jak w przypadku* 1*, na* $ABKL$ *można opisać okrąg.*

□

Komentarz.
Uczeń KA62 rozwiązał zadanie metodą analityczną. Uczeń wykazał się dużą sprawnością w posługiwaniu się tą metodą, zarówno w sferze planowania rozwiązania jak i w sferze rachunkowej. O dużej sprawności ucznia świadczy także to, że tego samego dnia zdążył zrobić jeszcze jedno zadanie.
Rozwiązujący miał pomysł, jak wykorzystując metodę analityczną doprowadzić rozwiązanie do końca. O tym, że nie jest to proste świadczy fakt, że również inni uczniowie próbowali (nieskutecznie) stosować tę metodę. Kluczowe okazało się zastosowanie twierdzenie Ptolemeusza, które umożliwiło osiągnięcie sukcesu.
Ważne jest także to, że zawodnik ustrzegł się pułapek: rozważył wszystkie niezbędne przypadki. Wszystko to wskazuje na dobre opanowanie metody analitycznej i duże doświadczenie w tym względzie.
Uczeń w II etapie uzyskał 17 punktów (0, 6, 6, 0, 5, 0) i dostał się do finału, w którym uzyskał 13 punktów (6, 2, 0, 0, 0, 5).

Spośród 560 uczestników II etapu 57 Olimpiady Matematycznej, 24 uczniów przedstawiło rozwiązania, które zostały ocenione na 5 lub 6 punktów, a zatem 4,3% uczniów rozwiązało zadanie. Spośród uczniów, którzy rozwiązali zadanie 2, tylko jeden uczeń nie dostał się do finału OM. Oto lista uczniów, którzy rozwiązali zadanie: GD90, KA23, KA33, KA62, KA65, KR04, KR36, KR70, KR73, KR75, SZ20, TO72, WA90, WA11, WA61, WA22, WA23, WA63, WA76, WA67, WA68, WA171, WA102, WR33. Zwraca uwagę fakt, że dwudziestu uczniów pochodziło z trzech okręgów: czterech zawodników z katowickiego, pięciu z krakowskiego i jedenastu z warszawskiego. Spośród tych 24 zawodników aż 14 uczęszczało do dwóch szkół: dziesięciu uczniów do XIV LO w Warszawie, czterech do V LO w Krakowie.
Wystawia to jak najlepsze świadectwo renomowanym szkołom, w szczególności XIV LO w Warszawie i V LO w Krakowie, ale z drugiej strony daje wyraźny sygnał, że wyżyny olimpijskie są tylko dla specjalnie przygotowanych członków stajni. W tym sensie OM nie pełni dawnej roli wyławiacza talentów. Obserwacja ta nie jest zaskakująca, ale w prezentowanej rozprawie pokazuję obraz liczbowy tego zjawiska i konstatuję, że jego skala jest znacznie większa, niż może się wydawać bez szczegółowej analizy.
W omawianym tu zadaniu 2.2.57 prawie wszyscy, którzy je rozwiązali (23 z 24) dostali się do finału. Nie świadczy to jednak silnie o ważności tego zadania do awansu. Z powodu bardzo słabych ogólnych wyników wystarczyło bowiem rozwiązać tylko dwa zadania, by być w finale. O tym, że zadanie 2.2.57 wybrało uczniów najlepszych, świadczy też to, że wśród wśród 21 uczniów którzy je rozwiązali, 15 rozwiązało też zadanie pierwsze, 17 - zadanie trzecie, 18 - zadanie czwarte, 14 - zadanie piąte i 4 - zadanie szóste.

3.1.2 Rozwiązania, które zawierały błędy

Strategie, które mogły zakończyć się powodzeniem

Wśród 560 uczestników II etapu 330 zawodników oddało prace, które nie zawierały żadnych zapisów.
15 uczniów zaprezentowało strategie, które mogły przynieść sukces. Najczęściej pomysły rozwiązań były poprawne, lecz zabrakło czasu lub umiejętności do ich realizacji. Poniżej prezentuję takie prace.

Uczeń WA102 przedstawił bardzo skrótowy dowód:
Niech X będzie środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC i stycznego do prostej AB. Punkty C, I, X są współliniowe. Niech M będzie środkiem odcinka IX. Zauważmy, że symetralna odcinka KL jest dwusieczną kąta ACB, więc przechodzi przez M. Punkty T, Y, Z są punktami styczności okręgu dopisanego do trójkąta ABC ($T \in AB, T \in CA, Z \in BC$). Z treści zadania i najmocniejszego twierdzenia geometrii: $CD = CE = DZ = EY = AB$.
$\measuredangle XLI = 90^\circ$, bo $XI = CI$ z twierdzenia Talesa, więc trójkąt CID jest przystający do trójkąta XLI, więc M leży na symetralnej odcinka $XL = CD$, więc środek okręgu opisanego na ABL to M i analogicznie na XKI, więc punkty A, B, L, K leżą na okręgu o środku M.
Rozwiązanie ucznia WA102 budzi szereg wątpliwości:
1) Prawdą jest, że $CD = CE = DZ = EY = AB$, ale nie ma żadnych obliczeń potwierdzających ten fakt (który wynika z założenia $AC + BC = 3 \cdot AB$).
2) Dlaczego z faktu, że punkt M leży na symetralnej odcinka XL ma wynikać, że M jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABL? Uczniowi najprawdopodobniej chodziło o trójkąt XIL.
3) Zawodnik udowodnił, że punkty K, I, L leżą na okręgu o środku M, ale nie wykazał, że także punkty A i B leżą na nim (chociaż jest to oczywiste: półproste BI i BX są dwusiecznymi, odpowiednio, kąta wewnętrznego i kąta zewnętrznego, a zatem $\measuredangle IBX$ jest kątem prostym.
Zawodnik za podane rozwiązanie otrzymał 5 punktów, ale właściwie przedstawił rozwiązanie typu *zrób to sam.*

Uczeń GD12 zaprezentował w swojej pracy następujący szkic rozwiązania.
Niech $\beta = \measuredangle CAK, \gamma = \measuredangle CBL, \alpha = \measuredangle AEK = \measuredangle ACI = \measuredangle DCI = \measuredangle LDB$ (jest tak dlatego, iż $EDLK$ to prostokąt oraz $CE = CD$). Niech F będzie punktem styczności okręgu wpisanego z AB. Oznaczmy $x = EA = FA, y = FB = DB, x + y = CE = CD$ (na mocy założenia $AC + BC = 3AB$). Korzystając z powyższych oznaczeń możemy obliczyć długości odcinków ED, KL, EK, DL. Przy pomocy twierdzenia o rzutach można obliczyć długości AK i BL. Łatwo sprawdzić, że $\measuredangle AKL = 90^\circ + \alpha + \beta$. Należy udowodnić, że kąt LBA ma miarę $90^\circ - \alpha - \beta$. Można to uczynić taką metodą: zauważmy, że przy ustalonych długościach odcinków AB i LB jest tylko jeden taki kąt, żeby była pewna określona długość AL. Tę określoną długość liczymy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AKL. Wstawiamy potem za $\measuredangle LBA = 90^\circ - \alpha - \beta$ i stwierdzamy, że długość tego odcinka policzonego na te dwa sposoby jest równa. W tych rozważaniach brakuje obliczeń, gdyż nie starczy mi czasu.

Rozwiązanie ucznia GD12 jest ledwie szkicem, który jednak nasuwa szereg wątpliwości. Na jakie twierdzenie powołuje się rozwiązujący pisząc o *twierdzeniu o rzutach*? Na jakie fakty powołuje, gdy stwierdza, że AL jest jednoznacznie wyznaczona? Ponadto nasuwa się poważna wątpliwość: długość odcinka LB będzie uzależniona od kąta γ, zatem będą potrzebne dodatkowe związki łączące kąt γ z kątami α i β, o czym w szkicu uczeń nie wspomina. Ostatnia uwaga o braku czasu może być prawdziwa, gdyż uczeń rozwiązał pozostałe dwa zadania z pierwszego dnia zawodów II stopnia, a w drugim otrzymał noty: 5, 6, 6. Zawodnik dostał się do finału,

gdzie uzyskał 30 punktów (6, 6, 6, 6, 0, 6) i zajął drugie miejsce. Można zatem przypuszczać, że uczeń znalazł poprawny pomysł, prowadzący do rozwiązania zadania, lecz z braku czasu nie mógł go zrealizować.

Uczeń GD42 zauważył, że prosta CI jest jednocześnie symetralną odcinka KL. Na podstawie tego wywnioskował, że jeżeli czworokąt $ABLK$ jest wpisany w okrąg, to środkiem tego okręgu musi być punkt P przecięcia prostej CI i symetralnej boku AB. Nie skojarzył, że w takiej sytuacji punkt P musi leżeć na okręgu opisanym na trójkącie ABC (na podstawie znanego twierdzenia). Następnie, korzystając z twierdzenia o dwusiecznej i twierdzenia cosinusów, próbował bezskutecznie wykazać, że $PL = PB$.
Uczeń odkrył poprawną strategię rozwiązania zadania, ale zabrakło mu determinacji w dążeniu do celu (porzucił obliczenia). Nie zmienia to faktu, że zauważył kluczowe dla rozwiązania zadania fakty. Stąd decyzja oceniających o przyznaniu 2 punktów.

Uczeń KA41 poprowadził styczne do okręgu w punktach K i L, które przecięły się w punkcie W. Następnie poprawnie zauważył, że $KW = LW = AB$ oraz $LW \parallel AC, KW \parallel CB$. Wówczas napisał: *Prosta AK jest równoległa do BW, co wynika z faktu, że punkt K jest symetryczny do punktu D względem I, a punkt B jest punktem przecięcia się stycznych do okręgu oraz z faktu $AB = KW$.*
Ostatni fragment rozumowania ucznia nie wiąże w związek przyczynowo-skutkowy tezy i uzasadnienia. Uczeń intuicyjnie wyczuł, że fakt ten jest prawdziwy, lecz nie potrafił go udowodnić. Postanowił wobec tego podać przesłanki, które w jego ocenie mogły uchodzić za uzasadnienie jego intuicji. Oczywiście, podane uzasadnienie nie ma nic wspólnego z faktem $AB = KW$.
Dalszy ciąg rozumowania jest poprawny i prowadzi do rozwiązania:
Skoro tak, to punkty A, K, B, W tworzą trapez o równych przekątnych, czyli możemy na nich opisać okrąg.
Taka sama sytuacja dzieje się z prostymi LB i AW, więc na punktach A, W, L, B również możemy opisać okrąg. Skoro tak, to powstałe okręgi pokrywają się, więc punkty A, W, B, L, K leżą na jednym okręgu, czyli i A, B, L, K leżą na jednym okręgu.
Jedyną przeszkodą zatem, jaka wystąpiła w trakcie rozwiązania zadania, to brak dowodu faktu, że prosta AK jest równoległa do prostej BW. Poniżej przedstawiam dowód tego faktu.
Prosta BL przecina odcinek AC w punkcie G, który jest punktem styczności okręgu dopisanego. Wobec tego $CG = AE$, czyli $CE = AG$. Ponieważ $WL = CE = AG$ i odcinek WL jest równoległy do odcinka CE, czworokąt $AGLW$ jest równoległobokiem. Wobec tego prosta AW jest równoległa do prostej BL, co należało wykazać. W dowodzie nie został wykorzystany warunek $AC + BC = 3 \cdot AB$, a zatem równoległość prostych BL i AW nie zależy od wyboru trójkąta.

Uczeń KR95 poprawnie wykazał, że środek $\acute{C}$ okręgu opisanego na trójkącie BKL i środek $\acute{A}$ okręgu opisanego na trójkącie AKL leżą na dwusiecznej CI. Następnie stwierdził, że wystarczy pokazać, że $\acute{A}$=$\acute{C}$. Uczeń napisał:
Oznaczmy przez Z środek okręgu dopisanego do AB, a promień okręgu dopisanego przez r_C.
Z założenia $AB = \frac{p}{2}$, gdzie p jest połową obwodu trójkąta ABC.

$$p - AB = AB,$$
$$\frac{S}{p - AB} = \frac{S}{AB}.$$

To przejście jest z „Geometrii trójkąta" Zetela:

$$r_C = \frac{S}{AB},$$

$$r_C = \frac{pr}{\frac{p}{2}},$$

$r_C = 2r$, *więc* $\frac{CI}{CZ} = \frac{1}{2}$.

W tym miejscu uczeń przerwał zapis rozwiązania. Znalazł pewien pomysł, który, w wyniku rozwinięcia, mógł doprowadzić do sukcesu. Zawodnik nie potrafił wykorzystać swojej obserwacji oraz powiązać jej z położeniem punktów $\acute{A}$ i $\acute{C}$.
Zawodnik KR95 był jedynym uczniem, który powoływał się w trakcie rozwiązywania tego zadania na literaturę.
Zwraca uwagę charakterystyczny sposób oznaczania za pomocą liter z polskiego alfabetu. Ponieważ zawodnik był uczniem klasy pierwszej, może to oznaczać pewną niedojrzałość i chęć oryginalnego zaprezentowania się.

Poprawne rozwiązanie analityczne zaprezentował jedynie zawodnik KA62. Zawodnicy KA70, KA75, LU05, LU14, LU83, PO22, WR92 próbowali stosować metodę analityczną, lecz ich próby zakończył się na wprowadzeniu układu współrzędnych i opisaniu współrzędnych punktów z zadania.
Zawodnicy KR06, TO20, WR50, WR70 podjęli próby dokonania obliczeń, lecz żadna z tych prób nie zakończyła się powodzeniem. Poniżej prezentuję te próby.

Uczeń KA70 umieścił trójkąt ABC w układzie współrzędnych w ten sposób, że punkt I leżał w środku układu współrzędnych. A następnie napisał: *Obliczając współrzędne punktów D i E oraz ich obrazów w symetrii środkowej stwierdzamy, że wszystkie cztery punkty: A, B, C, D spełniają równanie pierwszego okręgu. A zatem wszystkie cztery punkty leżą na jednym okręgu. Co należało okazać.*
Uczeń nie ma żadnego pomysłu na rozwiązanie zadania, a metoda analityczna jest w przypadku tego zadania wyjątkowo praco- i czasochłonna. Osiągnięcie sukcesu na tej drodze jest zatem mocno wątpliwe. Ponadto uczeń myli w zapisie punkty, których dotyczy teza zadania.

Zawodnik KA75 rozpoczął swoje rozwiązanie tak, jak to zostało opisane w sposobie 14. Wyliczył współrzędne punktów D, E, C, K, L w zależności od współrzędnych punktów A, B. Barierą nie do przejścia okazał się warunek $AC + BC = 3AB$. Uczeń zapisał go za pomocą wyliczonych wielkości, ale nie potrafił wyciągnąć wniosków.
Dostrzegalna była w pracy ucznia niepewność w stosowaniu metody analitycznej, a zwłaszcza stosowaniu strategii rachunkowej w metodzie analitycznej - uczeń, jak się wydaje, nie dostrzegał związków algebraicznych ułatwiających obliczenia.

Także uczeń PO22 próbował rozwiązać zadanie metodą analityczną. Wykorzystał następującą równoważność:
$AC + BC = 3 \cdot AB \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$.
Uczeń nie miał pomysłu na metodę analityczną, a zapisana przez niego równoważność świadczy o małym pojęciu na temat geometrii płaskiej.

Uczeń KR60 wyznaczył współrzędne punktów K, L, D, E, I w zależności od długości odcinka AE, długości okręgu wpisanego i funkcji trygonometrycznych kątów CAB i ABC. Następnie stwierdził:
Znając położenie punktów A, B, K, L możemy skorzystać z twierdzenia Ptolemeusza, aby sprawdzić, czy leżą na jednym okręgu. Jeśli tak, wtedy $AB \cdot KL + AK \cdot LB = AL \cdot KB$ i odwrotnie, jeśli zachodzi ta równość, punkty leżą na jednym okręgu.
Na tym kończył się zapis rozwiązania - uczeń miał zapewne świadomość, że operacja, jaką proponował, była złożona i nie miała szans na powodzenie w czasie trwania II etapu.

Zawodnicy WR50 i WR70 zapisali związki między współrzędnymi punktów A, B, D, E, ale do celu, czyli wykazania, że punkty te leżą na jednym okręgu, było bardzo daleko. W ich rozwiązaniach trudno się dopatrzyć, w jaki sposób z równań, które otrzymali, można uzyskać równanie opisujące okrąg opisany na czworokącie $ABDE$.

Metoda analityczna daje pozytywne skutki, gdy uczeń potrafi ją poprawnie stosować: umiejętnie umieszcza rysunek w układzie współrzędnych, dobiera właściwe współrzędne punktów i wie, jaka jest strategia rachunkowa prowadząca do cel. Ponadto rozwiązywanie metodą analityczną wymaga wyjątkowego skupienia i uwagi; każdy błąd rachunkowy, drobne przeoczenie, powoduje niemożność uzyskania oczekiwanego rezultatu.
Stąd na dwunastu uczniów, którzy próbowali stosować metodę analityczną, tylko jeden uczeń uzyskał prawidłowe rozwiązanie.

Dwóch uczniów (obaj z Krakowa) próbowali stosować metodę liczb zespolonych w geometrii.

Uczeń KR11 postanowił udowodnić tezę zadania za pomocą metody zespolonej. W tym celu punkt I umieścił w punkcie 0, punkt C na osi urojonej, a promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt ABC przypisał długość 1 . Nie udało się dokończyć rozwiązywania zadania, gdyż po długich, trzystronnicowych rachunkach pozostało mu do uzasadnienia, że pierwiastki dwóch równań wielomianowych są równe.
Zawodnik był uczniem II klasy w V LO i w II etapie zdobył 26 punktów (6, 2, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 18 punktów (6, 6, 0, 6, 0, 0) i został wyróżniony.

Podobnie rozpoczął rozwiązywanie zadania uczeń KR32. Przeprowadził zapisane na trzech stronach obliczenia, które doprowadziły go do następującej konkluzji:

Ponieważ $p, q \in \mathbb{R}$, to teza przyjmuje postać:

$$\frac{\frac{\left(i\frac{q}{\sqrt{2}}-p\right)\left(q-i\frac{p}{\sqrt{2}}\right)-\left(i\frac{q}{\sqrt{2}}+p\right)\left(q+i\frac{p}{\sqrt{2}}\right)}{\left(i\frac{q}{\sqrt{2}}+p\right)\left(q-i\frac{p}{\sqrt{2}}\right)}}{-\frac{iq}{\sqrt{2}}+p+\frac{q}{\sqrt{2}}\frac{i\frac{p}{\sqrt{2}}+q}{q-\frac{ip}{\sqrt{2}}}}\left(\frac{ip}{\sqrt{2}}-q-\frac{p}{\sqrt{2}}\frac{i\frac{q}{\sqrt{2}}-p}{\frac{q}{\sqrt{2}}+p}\right)\in\mathbb{R}.$$

Co po prostych przekształceniach okazuje się, rzecz jasna prawdą.

W trakcie rozwiązania uczeń popełnił dwa błędy, które wynikały z nieprawidłowego rozpoznania argumentu liczby zespolonej.
Metoda zaproponowana przez ucznia nie prowadzi do uzyskania rozwiązania, zatem ta strategia nie przynosi oczekiwanego rezultatu.
Zawodnik KR32 był uczniem I klasy V LO w Krakowie i w II etapie uzyskał 22 punkty (6, 2, 6, 6, 2, 0), a w III etapie 19 punktów (6, 5, 0, 6, 0, 2) i zdobył nagrodę III stopnia.

Trzeba zadać pytanie, czy metoda liczb zespolonych mogła przynieść sukces?
Odpowiedź jest pozytywna. Poniżej prezentuję rozwiązania z użyciem metody zespolonej.

Sposób 1

Przyjmijmy, że okrąg wpisany w trójkąt ABC ma środek 0 na płaszczyźnie zespolonej i promień 1. Przypiszmy punktom płaszczyzny A, B, C, D, E, F liczby zespolone a, b, c, d, e, f. Wówczas zachodzą związki:

$$a=\frac{2ef}{e+f}, b=\frac{2df}{d+f}, c=\frac{2ed}{e+d}.$$

Ponieważ punkty D, E, F leżą na okręgu jednostkowym o środku 0, więc $|d| = |e| = |f| = 1$, co pociąga za sobą $d\overline{d} = 1, e\overline{e} = 1, f\overline{f} = 1$.
Założenie $AC + BC = 3 \cdot AB$ zapisujemy w postaci: $|b-a| = |c-d|$. Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\left|\frac{2df}{d+f} - \frac{2ef}{e+f}\right| = \left|\frac{2ed}{e+d} - d\right|,$$

$$2\left|\frac{d}{d+f} - \frac{e}{e+f}\right| = \left|\frac{ed-d^2}{e+d}\right|,$$

$$2\left|\frac{d-e}{(d+f)(e+f)}\right| = \left|\frac{e-d}{e+d}\right|,$$

$$2|e+d| = |(d+f)(e+f)|.$$

$$4(e+d)(\overline{e}+\overline{d}) = (d+f)(\overline{d}+\overline{f})(e+f)(\overline{e}+\overline{f})$$

$$4(e+d)\frac{e+d}{ed} = (d+f)\frac{d+f}{df}(e+f)\frac{e+f}{ef}$$

$$4(e+d)^2f^2 = (d+f)^2(e+f)^2$$

$$\left(\frac{f(e+d)}{(d+f)(e+f)}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{f(e+d)}{(d+f)(e+f)} = -\frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \frac{f(e+d)}{(d+f)(e+f)} = \frac{1}{2}.$$

Przyjmijmy, że x jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABLK$. Punktom L i K przypisujemy, odpowiednio, liczby zespolone $-e$ i $-d$ (punkty D i K oraz E i L są symetryczne względem 0). Wówczas spełnione muszą być warunki:

$$|a-x| = |b-x| = |d+x| = |e+x|.$$

Przekształćmy $|d+x| = |e+x|$ do postaci:

$$(d+x)\left(\frac{1}{d}+\overline{x}\right) = (e+x)\left(\frac{1}{e}+\overline{x}\right),$$

$$\overline{x}(d-e) = x\frac{d-e}{ed}.$$

Ponieważ $e \neq d$ otrzymujemy:

$$\overline{x} = x\frac{1}{ed}.$$

Przekształćmy $|a-x| = |b-x|$ do postaci:

$$\left|\frac{2ef}{e+f} - x\right| = \left|\frac{2df}{d+f} - x\right|,$$

$$\left(\frac{2ef}{e+f} - x\right)\left(\frac{2}{e+f} - \overline{x}\right) = \left(\frac{2f}{d+f} - x\right)\left(\frac{2}{d+f} - \overline{x}\right),$$

$$x\left(\frac{1}{d+f}-\frac{1}{e+f}\right)+\overline{x}\left(\frac{df}{d+f}-\frac{ef}{e+f}\right)=2\left(\frac{df}{(d+f)^2}-\frac{ef}{(e+f)^2}\right).$$

Podstawiając $\overline{x}=x\frac{1}{ed}$ i wyliczając x otrzymujemy

$$x=\frac{2edf}{(d+f)(e+f)},$$

$$x=\frac{2ed}{e+d}\cdot\frac{f(e+d)}{(d+f)(e+f)},$$

Ponieważ $\frac{f(e+d)}{(d+f)(e+f)}=-\frac{1}{2}$ lub $\frac{f(e+d)}{(d+f)(e+f)}=\frac{1}{2}$, to $x=\frac{c}{2}$ lub $x=-\frac{c}{2}$.

Środek okręgu opisanego na czworokącie $ABLK$ nie może leżeć na półprostej $IC^{\rightarrow}$, zatem $x=-\frac{c}{2}$. Pozostaje sprawdzić, że zachodzi

$$\left|b+\frac{c}{2}\right|=\left|d-\frac{c}{2}\right|.$$

Przekształcając równoważnie otrzymujemy:

$$\left|\frac{2df}{d+f}+\frac{ed}{e+d}\right|=\left|d-\frac{ed}{e+d}\right|,$$

$$\left|\frac{2f(e+d)}{d+f}+e\right|=1,$$

$$|2f(e+d)+e(d+f)|=|d+f|,$$

$$(2f(e+d)+e(d+f))\left(\frac{2(e+d)}{edf}+\frac{d+f}{edf}\right)=\frac{(d+f)^2}{df}.$$

Wykorzystując fakt, że $e\neq d$ dostajemy

$$2f(e+d)+f(d+f)+e(d+f)=0,$$

$$(f+e)(d+f)=-2f(d+f),$$

$$\frac{f(e+d)}{(d+f)(e+f)}=-\frac{1}{2},$$

co kończy dowód.

□

Sposób 2

Sposób 2 opiera się na twierdzeniu:

Twierdzenie 12. *Parami różne punkty a,b,c,d płaszczyzny zespolonej są współliniowe lub współokręgowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}$ jest liczbą rzeczywistą.*

Korzystamy z oznaczeń i wyboru punktów opisanych w sposobie 1. Wykorzystajmy wnioski z warunku $|b-a| = |c-d|$:

$$\frac{f(e+d)}{(d+f)(e+f)} = -\frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad \frac{f(e+d)}{(d+f)(e+f)} = \frac{1}{2}.$$

Przekształcamy go do postaci

$$f^2 = -3ef - 3fd - de \qquad \text{lub} \qquad f^2 = ef + fd + de.$$

Drugi warunek jest równoważny warunkowi:

$$1 = \frac{e}{f} + \frac{d}{f} + \frac{d}{f} \cdot \frac{e}{f}$$

a to oznacza, że $\measuredangle f0e + \measuredangle f0d + (\measuredangle f0e + \measuredangle f0d)$ ma miarę będącą całkowitą wielokrotnością 2π. A wówczas nie istnieje trójkąt o wierzchołkach a, b, c.

Trzeba wykazać, że punkty $a, b, -e, -d$ leżą na jednym okręgu, a zatem trzeba wykazać, że liczba $\frac{a+e}{b+e} : \frac{a+d}{b+d}$ jest liczbą rzeczywistą.

$$\frac{a+e}{b+e} : \frac{a+d}{b+d} =$$

$$\frac{\frac{2ef}{e+f} + e}{\frac{2df}{d+f} + e} \cdot \frac{\frac{2df}{d+f} + d}{\frac{2ef}{e+f} + d} =$$

$$\frac{ed(9f^2 + 3fd + 3ef + de)}{5edf^2 + 3efd^2 + 3fde^2 + e^2d^2 + 2d^2f^2 + 2e^2f^2} =$$

$$\frac{ed(9f^2 + 3fd + 3ef + de)}{5edf^2 + ed(3fd + 3fe + ed) + 2d^2f^2 + 2e^2f^2}$$

Wykorzystując warunek $f^2 = -3ef - 3fd - de$ otrzymujemy:

$$\frac{9ed(-de - 3ef - 3fd) + 3efd^2 + 3dfe^2 + e^2d^2}{5edf^2 - edf^2 + 2d^2f^2 + 2e^2f^2} =$$

$$\frac{-8ed(ed + 3ef + 3fd)}{2f^2(e+d)^2} = \frac{-4edf^2}{f^2(e+d)^2} =$$

$$\frac{-4ed}{(e+d)^2} = \frac{-4c}{e+d}.$$

ponieważ liczby c oraz $e+d$ mają równe argumenty, więc liczba $\frac{-4c}{e+d}$ jest liczbą rzeczywistą, wobec tego $a, b, -e, -d$ leżą na jednym okręgu.

□

Stosowanie metody wykorzystującej liczby zespolonych w zadaniach geometrycznych wymaga sporej wprawy i umiejętności doboru właściwych narzędzi. Nie jest to metoda do bezrefleksyjnego stosowania - na ogół wymaga precyzyjnego planu obliczeń oraz dostrzegania możliwości ich upraszczania. Na pewno metoda ta nie może być stosowana przez zawodników przeciętnych.

Kilku uczniów próbowało, nieskutecznie, rozwiązać zadanie wykorzystując metodę algebraiczną. Najczęściej uczniowie natrafiali na trudność rachunkową, która uniemożliwiała dokończenie rozwiązania według zaproponowanej metody.

Uczeń KR01 postanowił pokazać, że $\measuredangle KAL = \measuredangle KBL$. W tym celu zapisał cosinusy tych kątów w zależności od długości boków KA, AL, KL, KB, BL. Po czym napisał: *Musimy jakoś wyliczyć* KA, AL, KL, KB, BL. Po bardzo długich obliczeniach nie otrzymawszy tezy napisał: *Kontynuując obliczenia, przy większej ilości czasu, dostajemy tezę.* Uczeń próbował uzależnić poszukiwane wielkości od miar kątów trójkąta ABC, jednakże poziom skomplikowania rachunków uniemożliwił osiągnięcie sukcesu. Strategia okazał się dobra pod względem merytorycznym, lecz zbyt skomplikowana i czasochłonna, aby mogła być w pełni zrealizowana. Cechą charakterystyczną tego rozumowania był brak dostrzegania zależności między elementami z zadania i chęć „siłowego" (rachunkowego) podejścia.
Zawodnik był uczniem III klasy w V LO i w II etapie zdobył 26 punktów (6, 2, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 24 punkty (6, 6, 0, 6, 0, 6) - zajął 5 miejsce i zdobył nagrodę II stopnia oraz był reprezentantem na MOM.

Uczeń LU02 zapisał cosinusy kątów KAL i KBL w zależności od długości odcinków AK, AL, KL, BK, BL. Ponadto wyznaczył długości odcinków AK, AL, KL, BK, BL w zależności od długości boków trójkąta ABC i promienia okręgu wpisanego. Następnie stwierdził:
Podstawiając otrzymane wzory na AK, AL, KL, BK, BL *można prawdopodobnie po długich rachunkach dojść do tego, że* $\cos\measuredangle KAL = \cos\measuredangle KBL$*, skąd wynikała by teza.*
Ta strategia nie prowadzi do sukcesu; uczeń powinien jeszcze dostrzec dodatkowe zależności umożliwiające rozwiązanie zadania.

Strategie, które nie zakończyły się sukcesem

Uczeń GD10 skonstruował trójkąt CPQ taki, że $CP = 2CA, CQ = 2CB$ i $A \in \overline{CP}, B \in \overline{CQ}$. Na podstawie warunku $AC + BC = 3AB$ wywnioskował, że $AB + PQ = 3AB = AC + CB = AP + BQ$, co oznacza, że w trapez $ABQP$ można wpisać okrąg. Wówczas uczeń stwierdził: *Trójkąt* PQC *jest podobny do trójkąta* ABC *zatem jeśli wykażemy, że analogiczne punkty w trapezie do punktów* A, B, K, L *leżą na okręgu, uzyskamy tezę zadania.* I na tym zakończył rozwiązanie.
Uczeń próbował zrobić zadanie przez sprowadzenie do zadania podobnego, lecz zadanie podobne okazało się zadaniem identycznym; zatem zabieg ten nie mógł pomóc w rozwiązaniu.

Uczeń LU44 poprowadził styczne do danego okręgu w punktach K i L i stwierdził, że punkt C' przecięcia tych stycznych jest równo oddalony od punktów A, B, L, K. Jednak zaznaczył, że *jak na razie nie wiem z czego to wynika, ale mam przeczucie, że punkty* A, B, L, K *leżą na okręgu o środku* C' *i promieniu* $C'K = C'L$.
Uczeń zatem miał świadomość, że nie miał uzasadnienia tezy i przekonania, że zakończył dowód.

Uczeń WR22 wymyślił sposób oparty na twierdzeniu: jeżeli proste AK i BL przecinają się w punkcie O, to czworokąt $ABLK$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $OK \cdot OA = OL \cdot OB$.
Zapis w postaci równoważności świadczy o braku dobrej znajomości tego twierdzenia. Uczeń nie miał pomysłu, jak wykazać, że zachodzi warunek $OK \cdot OA = OL \cdot OB$. Strategia oparta na tym twierdzeniu nie przynosi rezultatu i nie widać, jak można ją zrealizować.

Uczeń LU74 stwierdził, że trójkąty IDL i ECD są podobne (uzasadnił to poprawnie) i na tej podstawie wywnioskował, że $\frac{DL}{ID} = \frac{CD}{ED}$. Oczywiście powinno być $\frac{DL}{ID} = \frac{ED}{CD}$. Ten błąd spowodował, że zawodnik nie był w stanie poprawnie wykazać tezy zadania.

Uczeń ŁÓ41 przekształcił punkt C w symetrii względem punktu I i otrzymał C'. Wówczas

napisał:
Zauważam, że AB i $C'K$ są równymi przekątnymi czworokąta $AC'BK$, AB i $C'L$ są równymi przekątnymi czworokąta $AC'BL$. Wykażę, że $\measuredangle ABK = \measuredangle KC'A$ i $\measuredangle BAL = \measuredangle BC'L$: trójkąt ABK i $AC'K$ mają wspólny bok AK oraz wspólny bok AB i jeszcze jeden bok równy: $BK = C'A$; trójkąt BAL i $BC'L$ mają wspólny bok BL oraz wspólny bok AB i jeszcze jeden bok równy: $AL = C'B$. Wtedy punkty B, A, L, C' leżą na jednym okręgu oraz B, A, K, C' leżą na jednym okręgu. Korzystając z tego, że trzy punkty leżące na okręgu jednoznacznie określają ten okrąg będę miał, że: punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.
Pomysł był dobry, jednak uczeń nie wykazał, że $BK = C'A$ oraz $AL = C'B$, na czym opierał się dowód tezy zadania. Zawodnik nie podjął próby wykazania tych równości, co świadczy o tym, że zdawał sobie sprawę z istotnej luki w dowodzie.

Uczeń WA22 przyjął oznaczenia: $AF = AE = a, BF = BD = b, \measuredangle ECI = \alpha$ i wykazał, że $CE = CD = a + b$. Korzystając ze wzorów na pole trójkąta wykazał także, że $r = \sqrt{\frac{ab}{2}}$. Następnie napisał:
Z podobieństwa trójkątów CIE i LEK: $\frac{CI}{CE} = \frac{2r}{KL}$. czyli $KL = \frac{2\sqrt{\frac{ab}{2}}(a+b)}{\sqrt{(a+b)^2+\frac{ab}{2}}}$.
Z twierdzenia Pitagorasa: $AL = \sqrt{a^2 + 2ab}, BK = \sqrt{b^2 + 2ab}$.
Z twierdzenie cosinusów:

$$AK = \sqrt{AE^2 + EK^2 - 2 \cdot AE \cdot EK \cos\alpha}, BL = \sqrt{BD^2 + DL^2 - 2 \cdot BD \cdot DL \cos\alpha}.$$

Z podobieństwa:

$$\frac{EK}{2r} = \frac{r}{CI} \Rightarrow EK = \frac{ab}{\sqrt{(a+b)^2 + \frac{ab}{2}}},$$

$$\frac{DL}{2r} = \frac{r}{CI} \Rightarrow DL = EK = \frac{ab}{\sqrt{(a+b)^2 + \frac{ab}{2}}},$$

$$\cos\alpha = \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2 + \frac{ab}{2}}}.$$

Teza zadania jest równoważna warunkowi $AB \cdot KL + BL \cdot AK = AL \cdot BK$ (z twierdzenia Ptolemeusza).

$$AK = \sqrt{a^2 + \frac{a^2b^2}{(a+b)^2 + \frac{ab}{2}} - \frac{2a^2(a+b)}{(a+b)^2 + \frac{ab}{2}}} = a\sqrt{\frac{a^2 + \frac{b}{2}}{(a+b)^2 + \frac{ab}{2}}},$$

$$BL = b\sqrt{\frac{b^2 + \frac{a}{2}}{(a+b)^2 + \frac{ab}{2}}}.$$

Wówczas uczeń postanawił wstawić wyliczone wartości do równości $AB \cdot KL + BL \cdot AK = AL \cdot BK$ i komentuje: *wystarczy teraz przeliczyć...*
Na tym uczeń zakończył swoje rozwiązanie. Nie wykazał, że równość z twierdzenia Ptolemeusza zachodzi oraz popełnił błędy rachunkowe, gdyż powinien otrzymać:

$$AK = a\sqrt{\frac{a^2 + \frac{ab}{2}}{(a+b)^2 + \frac{ab}{2}}}, BL = b\sqrt{\frac{b^2 + \frac{ab}{2}}{(a+b)^2 + \frac{ab}{2}}}.$$

Strategia, jaką zaproponował uczeń nie prowadziła do celu - obliczenia okazały się zbyt trudne, by można je było wykonać w czasie zawodów trwania II stopnia.

Uczeń ŁÓ92 zapisał $\cos\measuredangle LBA = \frac{BL^2+AB^2-AL^2}{2\cdot BL\cdot AB}$ i $\cos\measuredangle LKA = \frac{AK^2+KL^2-AL^2}{2\cdot AK\cdot KL}$. Podał także długości odcinków BL, AB, AL, AK w zależności od x, y, z, r: $AL = \sqrt{4r^2+x^2}, KL = \frac{2rz}{\sqrt{z^2+r^2}}, AK = x^2 + \frac{4r^4-4xzr^2}{z^2+r^2}, BL = y^2 + \frac{4r^4-4yzr^2}{z^2+r^2}$. Następnie stwierdził:
Wykorzystując zależności i wzór $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ *oraz równość* $z = x + y$ *z założenia można pokazać, że* $\cos(\measuredangle LKA + \measuredangle LBA) = -1$*, więc* $\measuredangle LKA + \measuredangle LBA = 180°$.
Strategia ta dałaby pozytywne skutki, gdyby uczeń wiedział, że r powinno zostać uzależnione od x, y, z.

Uczeń SZ32 napisał:
Narysujmy styczne do okręgu w punktach K *i* L*, które przecięły się w punkcie* C'*. Na czworokącie* $KILC'$ *da się opisać okrąg. Zaznaczmy punkty przecięcia tego okręgu z prostą* AB *jako* A' *oraz* B'.

Następnie całe rozumowanie przeprowadził na rysunku i napisał:
Po opisaniu odpowiednich kątów w okręgu stwierdzamy, że czworokąt $A'C'B'K$ *jest trapezem równoramiennym.*
Przekątne w trapezie równoramiennym są równej długości. Jedną z tych przekątnych jest $C'K$*, a wiadomo, że* $C'K = EC$*. Druga przekątna to* $A'B'$*, która musi mieć długość także równą długości* EC*. A wiadomo, że* $AF + BF = EC$*, więc punkty* A, K, L, B *leżą na jednym okręgu.*
Uczeń zaznaczył na rysunku bardzo wiele kątów, ale trudno ustalić, w jaki sposób uzyskał równości między odpowiednimi kątami, na które to równości się powoływał.

Uczeń SZ61 w trakcie zapisu rozwiązania napisał, że obwód trójkąta utworzonego przez styczną do okręgu wpisanego w trójkąt ABC i równoległą do boku AB jest 2 razy mniejszy od obwodu trójkąta ABC. Nie podał przy tym żadnego uzasadnienia. Można to potraktować błąd charakterystyczny dla walki o wynik.

Uczeń WA80 na samym początku rozwiązania wykazał, że środek okręgu opisanego na czworokącie $ABLK$ powinien leżeć na przecięciu prostej CI i symetralnej boku AB. Nie rozważył, co się stanie, gdy trójkąt ABC będzie równoramienny. Następnie stwierdził:
Niech G *będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta* ACB *z odcinkiem* AB.
Budujemy okrąg Apoloniusza przechodzący przez punkty A, B, I*:* $\frac{GB}{BC} = \frac{AG}{AC} = \frac{GI}{IC}$*. Jego środek leżeć będzie na dwusiecznej* CAB*. Ten okrąg przecina okrąg wpisany w dwóch punktach: nazwijmy je* M *i* N*. Zatem* $\frac{GM}{MC} = \frac{GN}{NC} = \frac{GI}{IC}$*. Pozostaje udowodnić, że punkty* M, N *to punkty* K *i* L*. Jeśli udowodnimy, że* $MI = NI = r$ *i* $MI \perp BC$ *i* $NI \perp AC$*, to jednoznacznie będzie oznaczać, że* M *i* N *leżą na prostej* EI*, w odległości* $2r$*, czyli* $M = K$ *i* $N = L$.
Dalsze próby pokazania, że podana wyżej strategia jest skuteczna były chaotyczne i nie przynoszące sukcesu. Strategia rozwiązania z wykorzystaniem okręgu Apoloniusza okazała się błędna.

Czterech uczniów próbowało zastosować do rozwiązania zadania inwersję względem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wszystkie próby były nieudane. Wpływ na to miał fakt, że przekształcenie w inwersji okręgu opisanego na czworokącie $ABLK$ nie zmienia w istocie treści zadania - można stwierdzić, że zmienia zadanie na inne - o podobnym lub wyższym stopniu trudności. Ponadto wszyscy zawodnicy zakładali po cichu, że obrazem okręgu opisanego na czworokącie $ABLK$ będzie prosta, czyli że okrąg opisany na czworokącie $ABLK$ przechodzi także przez punkt I.

Uczeń ŁÓ72 zaprezentował bardzo interesujący pomysł na rozwiązanie zadania: *aby wykazać, że punkty* A, B, K, L *leżą na jednym okręgu, wystarczy wykazać, że obrazy punktów* A, B, K, L *w inwersji o środku* I *i promieniu* r *(gdzie* r *jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt* ABC*) leżą na jednej prostej. Punkt* L *jest symetryczny względem punktu* I *do punktu*

E, więc leży na naszym okręgu inwersyjnym. Podobnie punkt K. Wystarczy wykazać, że obrazy punktów B i A leżą na prostej KL. Rozpatrzmy punkt B' będący punktem przecięcia odcinków KL i BI. Wykażę, że $r^2 = IB \cdot IB'$.
Uczniowi nie udało się zrealizować ostatniej zapowiedzi. Obliczenia, które zaprezentował, nie zbliżyły go do uzasadnienia ostatniego warunku. Ponadto uczeń założył (chociaż nigdzie o tym nie napisał), że poszukiwany okrąg powinien przechodzić przez punkt I. Tylko wtedy obrazem tego okręgu w inwersji jest prosta przechodzącą przez punkty K i L.

Uczeń SZ44 poprowadził prostą KL, która przecięła proste AI i BI w punktach, odpowiednio, S i T. Proste AI i BI przecięły okrąg wpisany w trójkąt ABC w punktach, odpowiednio, X i Y. Następnie napisał:
Aby udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu, wystarczy pokazać, że czwórki AS, XI oraz BT, YI są harmoniczne (dwustosunek ich podziału jest równy -1). Wtedy bowiem punkty A i B będą leżały na okręgu będącym inwersją prostej KL względem okręgu wpisanego w dany w zadaniu trójkąt ABC, na którym będą także leżały punkty K i L, ponieważ leżą one na okręgu, względem którego dokonujemy inwersji, ich inwersja będzie zatem identycznością.
Rozwiązanie nie ma większego sensu, gdyż punkty A, X, S, I w ogólnej sytuacji nie mogą tworzyć harmonicznej czwórki punktów, gdy obrazem punktu A w inwersji względem okręgu o środku I i promieniu XI jest punkt S, a zatem mamy do czynienia z blefem i błędem powierzchownej wiedzy.

Uczeń TO32 przekształcił punkt C w symetrii względem punktu I i otrzymał punkt C'. Następnie zaproponował dwa sposoby rozwiązania. W pierwszym sposobie wykorzystał fakt: $C'A \parallel LB$ (co próbował uzasadnić następująco: *wynika z symetrii tego układu*). Fakt ten nie jest oczywisty do udowodnienia, zatem dowód był obarczony poważną usterką. W drugim sposobie uczeń stwierdził: *AC' jest dwusieczną kąta dopisanego przy wierzchołku A.* Tego faktu także nie uzasadnił; także sposób drugi nie jest poprawny.

Uczeń TO03 skorzystał z twierdzenia cosinusów dla boków i kątów trójkąta ABC i otrzymał równanie $c = b\cos\alpha + a\cos\beta$. Po wykorzystaniu założenia otrzymał równanie: $b + a = 3b\cos\alpha + 3a\cos\beta$. A następnie napisał: *Aby równanie było prawdziwe spełnione muszą być warunki:* $3\cos\alpha = 1$ *oraz* $3\cos\beta = 1$.
Uczeń bardzo chciał wykazać, że trójkąt jest równoramienny, więc popełnił poważny błąd, który kwalifikuję jako *walki o wynik*.

Błędy wynikające z słabej znajomości geometrii płaskiej

Poniżej prezentujemy kolekcję błędów, jakie popełnili zawodnicy 57 OM, a które wynikają ze słabej znajomości podstawowych faktów geometrii płaskiej.

Uczeń GD30 stwierdził, że jeżeli na trójkątach AKL i KLB zostały opisane okręgi, to na czworokącie $AKLB$ można opisać okrąg.

Uczeń KA44 zauważył, że obrazem okręgu opisanego na czworokącie $CDIE$ w symetrii środkowej względem punktu I jest okrąg Γ opisany na trójkącie KIL. Następnie na zewnątrz trójkąta ABC zbudował taki trójkąt ABG, że $\measuredangle ABG = 90^\circ$ i $BG = DI$. Ponieważ trójkąt ABG jest przystający do trójkąta CDI wywnioskował poprawnie, że okręgi opisane na trójkątach ABG i CDI mają równe promienie. Na tej podstawie stwierdził, że okrąg opisany na trójkącie ABG przechodzi przez punkt I i pokrywa się z okręgiem Γ.
Uczeń na podstawie równości promieni okręgów wywnioskował ich pokrywanie się. Powodem takiego błędu był najprawdopodobniej narysowany w początkowej fazie rozwiązania bardzo

sugestywny rysunek, na którym punkty A, B, L, I, K leżały na jednym okręgu.

Uczeń GD31 napisał:
Przedłużmy prostą Y, która jest dwusieczną kąta ABC i przecina środek okręgu w punkcie I. Poprowadźmy przez punkt A prostą X, gdzie $X \parallel Y$. Dwusieczna kąta ACB przecina prostą X w punkcie H, środek okręgu w punkcie I oraz podstawę AB trójkąta ABC w punkcie Z. Z tego wynika, że $AH = BH$.
W tym miejscu uczeń popełnia błąd: dwusieczna kąta ACB nie jest symetralną odcinka AB. Dalsze rozumowanie oparte zostało na tym fałszywym wniosku. U ucznia nie wzbudził niepokoju fakt, że w rozwiązaniu zadania nie wykorzystał warunku $AC + BC = 3AB$.

Uczeń KR15 przyjął, że punkt styczności okręgu do odcinka AB należy do dwusiecznej kąta ACB. Zawodnik rozwiązał zadanie w szczególnym przypadku: gdy trójkąt ABC jest równoramienny.

Uczeń LU75 popełnił charakterystyczny błąd: stwierdził, że przez punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC do boków trójkąta muszą przechodzić dwusieczne odpowiednich kątów. Ten błąd spowodował, że uczeń otrzymał, iż trójkąt ABC jest równoramienny.

Uczeń SZ10 założył, że punkty E i D leżą na dwusiecznych kątów ACB i BAC.

Uczeń ŁÓ82 stwierdził, że odcinek BE przechodzi przez punkt I i jest prostopadły do prostej AC.

Zawodnicy GD31, KR15, LU75, SZ10, ŁÓ82 popełnili ten sam błąd: przyjęli, że dwusieczna kąta w trójkącie przecina przeciwległy bok w punkcie styczności okręgu wpisanego w trójkąt. Jaka może być przyczyna takiego błędu? Na pewno ma to związek z nieugruntowaną wiedzą na temat okręgu wpisanego w trójkąt, ale może także zdarzać się "z rozpędu". Taki błąd nasuwa się przez regularność - taki fakt byłby elegancki i ładnie łączył elementy w trójkącie. Dla ucznia, który nie miał dostatecznej wiedzy, fakt ten był pociągający i łatwo można było go przyjąć jako stwierdzenie prawdziwe.

Uczeń PO22 próbował rozwiązać zadanie metodą analityczną. Wykorzystał następującą równoważność:
$AC + BC = 3 \cdot AB \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$.
Uczeń nie miał pomysłu na metodę analityczną, a zapisana przez niego równoważność świadczy o bezradności.

Uczeń TO45 pomylił warunek opisania okręgu na czworokącie z warunkiem wpisania okręgu w czworokąt.

Uczeń WA12 oznaczył przez T punkt przecięcia prostej EK z prostą AB, a przez S - punkt przecięcia prostej DL z prostą AB. Następnie uzasadnił, że trójkąty AHC i ATE oraz CHB i DSB są podobne. Stąd wywnioskował nieprawidłowo, że $\frac{AT}{SB} = \frac{AH}{HB} = \frac{TH}{HS} = 1$, skąd łatwo wynikało, że trójkąt ABC jest równoramienny. Dalsza część rozwiązania oparta była na tym błędnym wnioskowaniu, a uczeń był przekonany, że dobrze rozwiązał zadanie. Nie wzbudził jego nieufności fakt, iż nigdzie nie wykorzystał w dowodzie założenia $AC + CB = 3 \cdot AB$. Widoczna jest u ucznia pobieżna znajomość podstawowych własności trójkątów podobnych i niski poziom samokontroli rozwiązania.

Uczeń WA54 najpierw podał błędny warunek: *na czworokącie $ABLK$ można opisać okrąg*

wtedy i tylko wtedy, gdy sumy naprzeciwległych boków się równają. Następnie rozważył trójkąt prostokątny o bokach 3, 4, 5 jako szczególny przypadek trójkąta spełniającego warunki zadania. Widoczne są próby rozumowania indukcyjnego, poprzez analizę przypadków, ale poważne braki w aparacie matematycznym powodują brak możliwości rozwiązania zadania.

Brak wykorzystania założenia

Wielu uczniów nie wiedziało, w jaki sposób wykorzystać założenie $AC + BC = 3 \cdot AB$. Natomiast zawodnicy GD31, KA95, LU20, LU30, TO31 i TO51 byli przekonani, że rozwiązali zadanie, mimo że nie wykorzystali tego założenia. Zabrakło zatem podstawowej refleksji: skoro podane zostały założenia, to w pewnym miejscu dowodu muszą one odegrać jakąś istotną rolę. Mamy tu do czynienia z brakiem kontroli nad rozwiązaniem zadania.

Uczeń SZ13 stwierdził, że okręgi opisane na trójkątach AFK i FBL są styczne zewnętrznie. Nie przedstawił jednak żadnego dowodu tego faktu. Co więcej, uczeń nigdzie nie wykorzystał założenia $AC + BC = 3AB$. Dowód został przez zawodnika uznany za poprawny.

Uczeń TO51 chciał skorzystać z twierdzenia Ptolemeusza. Zapisał długości odpowiednich odcinków za pomocą długości boków trójkąta i funkcji trygonometrycznych kąta ACB. Następnie napisał:
Nietrudno zauważyć, iż równość jest prawdziwa, co oznacza, że zachodzi twierdzenie Ptolemeusza i że czworokąt $AKLB$ można wpisać w okrąg. A co za tym idzie punkty A, K, L, B leżą na jednym okręgu.
Równość, którą uczeń opisał, nie jest oczywista, zwłaszcza, że nie wykorzystał założenia $AC + BC = 3AB$.

Uczeń WA12 oznaczył przez T punkt przecięcia prostej EK z prostą AB, a przez S - punkt przecięcia prostej DL z prostą AB. Następnie uzasadnił, że trójkąty AHC i ATE oraz CHB i DSB są podobne. Stąd wywnioskował nieprawidłowo, że $\frac{AT}{SB} = \frac{AH}{HB} = \frac{TH}{HS} = 1$, skąd łatwo wynika, że trójkąt ABC jest równoramienny. Dalsza część rozwiązania oparta była na tym błędnym wnioskowaniu, a uczeń był przekonany, że dobrze rozwiązał zadanie. Nie wzbudził jego nieufności fakt, iż nigdzie nie wykorzystał w dowodzie założenia $AC + CB = 3 \cdot AB$. Widoczna jest u ucznia pobieżna znajomość podstawowych własności trójkątów podobnych i niski poziom autokontroli rozwiązania.

Blefy

Poniżej prezentuję przykładowe rozumowania, które zawierają ewidentne blefy.

Uczeń GD41 bez żadnego uzasadnienia stwierdził, że czworokąt $ABLK$ jest trapezem. Najprawdopodobniej używał tego terminu omyłkowo, gdyż nie korzystał z tej własności w dalszej części rozwiązania. Następnie, wykorzystując fakt $AB = CE = CD$ (który uzasadniał poprawnie), na odcinkach EC i CD na zewnątrz trójkąta ABC zbudował czworokąty $ECL'K'$ i $CDL''K''$ przystające do czworokąta $ABLK$. Bez żadnego uzasadnienia stwierdził: *oczywiście wielokąt $IDL''K''CL'K'E$ da się wpisać w okrąg, stąd wniosek, że czworokąt $AKLB$ też można wpisać w okrąg.*
Należy uznać, że uczeń wiedział, że nie udało mu się rozwiązać zadania i zdecydował się zablefować.

Uczeń KA91 napisał:
Umieśćmy trójkąt dany w zadaniu na płaszczyźnie i rozpatrujemy kulę znajdującą się pod płasz-

czyzną. Zrzutujmy proste i okręgi na kulę. Następnie obróćmy kulę w taki sposób, by punkt C znajdował się na równiku tej kuli. Tak otrzymana figurę ponownie zrzutujmy na płaszczyznę. Na mocy przekształceń RPII mamy następującą sytuację: okrąg przeszedł na elipsę lub inny okrąg, ale na mocy przekształceń afinicznych możemy z powrotem przekształcić w okrąg. Prosta AC i BC stały się równoległe. Punkt K przeszedł na D, a punkt L przeszedł na E. Mamy $AB \perp AE$ oraz $AE \perp EI$. Zatem punkty E, A, D, B leżą na jednym okręgu, ale $E = L$ i $K = D$, zatem punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

Uczeń zaprezentował pozorną znajomość geometrii rzutowej i afinicznej. Nie określił, w jaki sposób chciał rzutować płaszczyznę na kulę. Zawodnik nie zwrócił uwagi na to, że w istocie wykazał jedynie, że na czworokącie $ABLK$ jest opisana elipsa lub okrąg. Nie zwrócił także uwagi na to, że nie wykorzystał w trakcie dowodu zależności łączącej długości boków. Nie miał także świadomości, że własności metryczne nie przenoszą się w trakcie rzutowania.
Uczeń miał styczności z pojęciami i metodami, które próbował stosować, ale jego wiedza i umiejętności stosowania były bardzo powierzchowne.

Uczeń KR63 napisał:
$\measuredangle LAK = \measuredangle LBK$ co wynika z wielu twierdzeń. A to już dowodzi, że $AKBL$ leżą na jednym okręgu! Można np. trójkąt dowolny przekształcić afinicznie w trójkąt równoramienny o bokach $3a, 3a, 2a$; dla takiego trójkąta teza zadania jest oczywista. I potem licząc stosunek dwuharmoniczny boków i cosinusów kątów dojdziemy do tezy.
Uczniowi pewne hasła obiły się o uszy i postanowił zrobić wrażenie na oceniających. Brak w jego „rozwiązaniu" uzasadnień; pojawia się tylko pewien szkic rozwiązania, które nie ma sensu.

Uczeń LU52 przekształcił okrąg opisany na trójkącie AKB w symetrii względem symetralnej odcinka EK i otrzymał okrąg przechodzący przez punkt E. Następnie poprowadził przystający do niego okrąg przechodzący przez punkty C i E (z uzasadnieniem, że $CE = AB$). Następnie napisał:
Okrąg przechodzący przez EC i okrąg przechodzący przez E odbijamy symetrycznie względem dwusiecznej kąta przy wierzchołku C. Jakoże punkty E i D są względem niej symetryczne, obraz okręgu przechodzącego pierwotnie przez E i C będzie teraz przechodził przez C i D. Oznacza to, że był tam od samego początku. Skoro zaś posiada punkt wspólny E (teraz D) z okręgiem będącym obrazem okręgu opisanego na trójkącie AKB, to znaczy, że okrąg ten przechodził zarówno przez punkt E i D. Jeśli tak, to okrąg opisany na ABI przechodził nie tylko przez A, K i B, ale i przez L. Co kończy dowód.
Uczeń LU52 nie wykazał, że obraz okręgu opisanego na trójkącie AIB jest symetryczny względem prostej CI.

Uczeń WR93 zaproponował następujące rozumowanie:
Proste CA i CB są styczne do obydwu okręgów odpowiednio w punktach D, B i E, A, dzięki temu wiemy, że zarówno A jak i B należą do okręgu; pozostaje udowodnić, że K i L również. Ciągnąc myśl dochodzimy do faktu, że środek okręgu O leży na dwusiecznej kąta ACB i jednocześnie przechodzi przez I, który również należy do okręgu O. Z twierdzenia o motylku udowodniamy, że $HJ = GJ$, co w konsekwencji upewnia nas, że K i L leżą na tym samym okręgu co A i B.
Uczeń wykorzystuje oznaczenie O zarówno dla środka okręgu jak i samego okręgu. Punkty H, G, J są zaznaczone na rysunku, ale nieznany jest sposób ich konstrukcji. Brakuje także dowodu, że proste AC i BC są styczne do okręgu O. Ponadto nie wiadomo, jakie twierdzenie o motylku próbuje wykorzystać uczeń. Całość wskazuje na jeden wielki blef w wykonaniu zawodnika.

Szczególny przypadek

Strategia szczególnych przypadków w rozwiązaniach analizowanego zadania była wykorzystywana nieumiejętnie. Uczniowie dobierali przykładowe długości boków trójkąta tak, aby spełnione było założenie $AC + BC = 3 \cdot AB$. Analiza takich przypadków jednakże nie nasunęła żadnemu uczniowi pomysłu, jakim punktem powinien być środek okręgu opisanego na czworokącie $ABLK$, ani jaka mogła by być strategia pozwalająca na przeprowadzenie dowodu.

Uczeń KA50 rozważył szczególny przypadek, gdy czworokąt $ABLK$ jest trapezem. Zastosował metodę analityczną, która nie doprowadziła do rozwiązania w tym szczególnym przypadku.

Uczeń WA54 najpierw podał błędny warunek: *na czworokącie $ABLK$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy naprzeciwległych boków się równają.* Następnie rozważył trójkąt prostokątny o bokach 3, 4, 5 jako szczególny przypadek trójkąta spełniającego warunki zadania. Widoczne są próby rozumowania indukcyjnego, poprzez analizę przypadków, ale poważne braki w aparacie matematycznym powodują brak możliwości rozwiązania zadania.

Założenie tezy

Kilku uczniów przeprowadziło dowód z wykorzystaniem warunku równoważnego tezie zadania, przy czym warunku tego w żaden sposób nie uzasadniali.

Uczeń SZ01 na samym początku rozwiązania napisał:
Należy zauważyć, że odcinek BI dzieli kąt LBK na połowy, a odcinek AI dzieli na połowy kąt KAL.
Błąd ten był spowodowany najpewniej bardzo sugestywnym rysunkiem. Uczeń nie widział potrzeby uzasadnienia tego faktu, mimo, że jest on równoważny tezie, gdyż z faktów tych wynika, że na czworokątach $KILB$ i $AKIL$ można opisać okręgi. A wobec tego, że punkty K, I, L należą do tych okręgów, punkty A, K, I, L, B leżą na jednym okręgu.

Uczeń WR60 przyjął warunek równoważny tezie jako oczywisty i łatwo zapisał błędne rozwiązanie zadanie.

Rozwiązania kuriozalne

Uczeń TO66 napisał (fragment):
Oczywiste jest, że punkty K i L leżą na okręgu, który przechodzi przez punkty D, E. Udowodnijmy, że czworokąt $KLDE$ jest kwadratem. $\measuredangle KED = \measuredangle EDL = \measuredangle DLK = \measuredangle LKE = 90^\circ$ oraz $KD = LE$, z czego wynika teza.
Całe dalsze rozumowanie, prowadzące do sprzeczności z tezą zadania, uczeń oparł na zdumiewającym wniosku zacytowanym powyżej. Można uznać ten błąd za błąd krytyczny.

Uczeń KA72 przedstawił zaskakujące rozumowanie (fragment):
Łatwo możemy spostrzec, że wraz ze zmianą długości boków trójkąta punkty E i D, i co za tym idzie ich symetryczne K i L, podróżują po okręgu zależnie od siebie. Wystarczy pokazać, że teza zachodzi choć w jednym konkretnym przypadku (musi spełniać wszystkie zależności i spostrzeżenia). Jest tak dzięki własności orbiteli okręgu w trójkącie. Sytuacja ta jest stałą zależnością między punktami.
Trudno zrozumieć, co uczeń chciał powiedzieć w cytowanym fragmencie. Zwraca uwagę duża nieporadność w formułowaniu myśli oraz zaskakujące terminy (*orbitele*).
KA72 był uczniem III klasy i za swoje rozwiązania w II etapie uzyskał 0 punktów.

Uczeń SZ51 przedstawił kuriozalne rozumowanie:
Spróbujmy podstawić zwykłe liczby pod przedstawione równanie (takie, aby równanie było spełnione) $AC + BC = 3 \cdot AB$,
Weźmy np. takie, iż: $AC = 6, BC = 3, AB = 3$.
Zawodnik nie zdawał sobie sprawy, że trójkąt o podanych długościach boków nie istnieje. Mimo to pisał dalej:
Łatwo zauważyć, że liczby te spełniają równość, a oprócz tego można zauważyć, że jest to trójkąt równoramienny.
Na tym uczeń kończy analizę przykładu. W żaden jednak sposób nie próbuje wykorzystać swoich „obserwacji" do wyciągnięcia jakichkolwiek wniosków. Napisał:
W zadaniu tym z rysunku można wywnioskować, że oczywiście K *i* L *leżą na jednym okręgu, lecz* A *i* B *niekoniecznie. Zgodnie z tym co przedstawiłam należało by twierdzić, iż rozwiązania nie ma.*
Prosta AB *jest również styczna do okręgu o środku* I. *Nie ma możliwości, aby punkty* A, B, K, L *leżały na tym samym okręgu.*
Owszem, można powiedzieć, iż punkty K *i* L *leżą na tym samym okręgu i punkty* A, B, *jeśli opiszemy go na trójkącie* ABC *z okręgiem o środku* I'.
Wtedy widzimy, iż punkty A, B *leżą na tym samym okręgu, lecz nie jest to ten sam okrąg, na którym leżą punkty* K *i* L.
Rozumowanie, jakie przedstawił uczeń świadczy o braku podstawowych wiadomości z geometrii. Kuriozalność tego rozumowania każe zapytać, jak to możliwe, że uczeń ten dostał się do II etapu OM.

Uczeń TO95 napisał (całość - pisownia oryginalna):
Można skożystać z twierdzenia Cevy (uogólnienia twierdzenia Ptolemeusza). Rozpatrzmy czworokąt $ABKL$. *Jeśli udowodnimy, że zachodzi* $LB \cdot KA < LK \cdot AB + AL \cdot KB$, *nierówność owa rzeczywiście zachodzi, co dowodzi zadania.*
Zawodnik nie miał zbyt dużego pojęcia o geometrii, o czym świadczy łączenie twierdzenia Cevy z twierdzeniem Ptolemeusza i wiązanie nierówności z okręgiem opisanym na czworokącie. Zdumiewa, że uczeń zdecydował się zamieścić tego typu rozwiązanie.

Uczeń TO94 napisał:
Jeśli poprowadzimy styczne do okręgu wpisanego w trójkąt ABC *i przechodzące przez punkty* K *i* L, *to przetną się one w punkcie* F *tworząc deltoid, który ma dwa kąty proste - tzn. tworzą romb* $KLIF$. *Przekątne w rombie przecinają się pod kątem prostym oraz są dwusiecznymi kątów.*
AB *jest styczna do okręgu wpisanego, więc jest prostopadła do* IF. *Korzystając z twierdzenia, które mówi, że styczna do okręgu oraz cięciwa, która jest prostopadła do promienia (który jest prostopadły do stycznej) są równoległe, wnioskuję zatem, że* $KL \parallel AB$. *Został więc utworzony trapez* $ABLK$. *Na każdym trapezie można opisać okrąg. W związku z tym, że punkty* A, B, K, L *są wierzchołkami trapezu, oznacza to, że leżą one na jednym okręgu.*
W bardzo krótkim tekście znajdują się aż trzy fałszywe wnioski:
1) uczeń twierdzi, że deltoid, który ma dwa kąty proste jest rombem,
2) uczeń twierdzi, że $KL \parallel AB$,
3) uczeń twierdzi, że na każdym trapezie można opisać okrąg.
Wszystkie te fakty wskazują na to, że uczeń nie powinien się znaleźć w II etapie OM. Jego wiedza geometryczna nie wystarcza do zdawania matury.

3.1.3 Statystyka błędów

Na podstawie tabel 40, 41, 42 można stwierdzić, że zadanie okazało się trudne: tylko 24 uczniów umiało je rozwiązać. Najwięcej poprawnych rozwiązań pojawiło się w okręgach: warszawskim (11), krakowskim (5), katowickim (4). Po jednym poprawnym rozwiązaniu zaproponowali uczniowie z okręgów: gdańskiego, szczecińskiego, toruńskiego i wrocławskiego. Żadnego poprawnego rozwiązania nie oddali uczniowie z okręgów: lubelskiego, łódzkiego, poznańskiego. Charakterystyczne jest także to, że w tych trzech okręgach żaden uczeń nie uzyskał wyższej oceny niż 2 punkty oraz żaden uczeń nawet nie miał pomysłu na dobrą strategię.
W całej Polsce 58,9% uczniów oddało czyste prace. Najwięcej prac bez żadnych notatek oddali uczniowie z okręgu łódzkiego (70,6%), a najmniej uczniowie z okręgów lubelskiego (50%), krakowskiego (52,4%).
W okręgu poznańskim aż 91%, a w okręgu łódzkim 87% uczniów oddało puste prace lub nie miało żadnej strategii. W pozostałych okręgach liczba takich uczniów oscylowała wokół 80%. 84% uczniów z okręgu krakowskiego oddało prace ocenione na 0 punktów, a w innych okręgach liczba ta wynosiła co najmniej 90%. W okręgach: lubelskim, łódzkim i poznańskim 100% uczniów otrzymało 0 punktów.
Błędy powierzchownej wiedzy najczęściej pojawiały się u uczniów z okręgów: toruńskiego (4,7%), szczecińskiego (4,3%), katowickiego (3,2%).
Błędy świadome, czyli blefy pojawiały się wyraźnie częściej w okręgu szczecińskim (13%) niż w pozostałych okręgach (5%).
Błędne strategie, które nie mogły przynieść sukcesu, wyraźnie częściej pojawiały się u uczniów z okręgów: szczecińskiego (19,6%), lubelskiego (16,7 %), toruńskiego (14,1%), wrocławskiego (13,6%). W okręgu warszawskim 10 uczniów wybrało błędne strategie, jednak ich liczba stanowi 8,3% liczby uczniów w tym okręgu i jest niższa niż średnia w Polsce (10,4%).
Wśród niepustych prac, 25% uczniów z okręgu warszawskiego rozwiązało poprawnie zadanie. Procent ten dla okręgu krakowskiego i katowickiego wynosi, odpowiednio, 16,7% i 14,8%.
Wśród uczniów, którzy oddali niepuste prace, aż 28,6% z okręgu szczecińskiego i 21,7% z okręgu toruńskiego blefowało.
Wśród uczniów, którzy oddali niepuste prace, aż 42,9% z okręgu szczecińskiego i 39,1% z okręgu toruńskiego wykorzystywało błędne strategie.
Dobre strategie, które nie przyniosły jednak sukcesu, pojawiły się u 5 uczniów z okręgu krakowskiego (metoda analityczna i zespolona).

Okręg	*u*	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gdański	28	15	8	26	1	0	1	0	0	1	1	1	2
katowicki	62	35	16	58	0	1	3	2	0	1	2	4	1
krakowski	63	33	17	53	5	0	5	0	0	1	2	3	5
lubelski	60	30	19	60	0	0	0	1	2	1	4	10	0
łódzki	34	24	6	34	0	0	0	1	0	0	1	3	0
poznański	23	14	7	23	0	0	0	0	0	0	1	1	0
szczeciński	46	25	10	43	2	0	1	2	0	1	6	9	0
toruński	64	41	11	61	2	0	1	3	0	2	5	9	2
warszawski	121	77	20	109	1	3	8	1	2	0	4	10	3
wrocławski	59	36	12	58	0	0	1	0	0	0	2	8	2
Polska	560	330	126	525	11	4	20	10	4	7	28	58	15

Tabela 40: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 - wielkości w liczbach bezwzględnych.**

Okręg	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gdański	53,6	28,6	92,9	3,6	0	3,6	0	0	3,6	3,6	3,6	7,1
katowicki	56,5	25,8	93,5	0	1,6	4,8	3,2	0	1,6	3,2	6,5	1,6
krakowski	52,4	27,0	84,1	7,9	0	7,9	0	0	1,6	3,2	4,8	7,9
lubelski	50,0	31,7	100	0	0	0	1,7	3,3	1,7	6,7	16,7	0
łódzki	70,6	17,6	100	0	0	0	2,9	0	0	2,9	8,8	0
poznański	60,9	30,4	100	0	0	0	0	0	0	4,3	4,3	0
szczeciński	54,3	21,7	93,5	4,3	0	2,2	4,3	0	2,2	13,0	19,6	0
toruński	64,1	17,2	95,3	3,1	0	1,6	4,7	0	3,1	7,8	14,1	3,1
warszawski	63,6	16,5	90,1	0,8	2,5	6,6	0,8	1,7	0	3,3	8,3	2,5
wrocławski	61,0	20,3	98,3	0	0	1,7	0	0	0	3,4	13,6	3,4
Polska	58,9	22,5	93,8	2,0	0,7	3,6	1,8	0,7	1,3	5,0	10,4	2,7

Tabela 41: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich prac.**

Okręg	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gdański	61,5	84,6	7,7	0	7,7	0	0	7,7	7,7	7,7	15,4
katowicki	59,3	85,2	0	3,7	11,1	7,4	0	3,7	7,4	14,8	3,7
krakowski	56,7	66,7	16,7	0	16,7	0	0	3,3	6,7	10,0	16,7
lubelski	63,3	100	0	0	0	3,3	6,7	3,3	13,3	33,3	0
łódzki	60,0	100	0	0	0	10,0	0	0	10,0	30,0	0
poznański	77,8	100	0	0	0	0	0	0	11,1	11,1	0
szczeciński	47,6	85,7	9,5	0	4,8	9,5	0	4,8	28,6	42,9	0
toruński	47,8	87,0	8,7	0	4,3	13,0	0	8,7	21,7	39,1	8,7
warszawski	45,5	72,7	2,3	6,8	18,2	2,3	4,5	0	9,1	22,7	6,8
wrocławski	52,2	95,7	0	0	4,3	0	0	0	8,7	34,8	8,7
Polska	54,8	84,8	4,8	1,7	8,7	4,3	1,7	3,0	12,2	25,2	6,5

Tabela 42: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 - wielkości wyrażona w procentach w stosunku do liczby wszystkich niepustych prac.**

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
A	125	60	19	95	7	3	20	0	2	1	8	12	9
B	435	270	107	430	4	1	0	10	2	6	20	46	6
Polska	560	330	126	525	11	4	20	10	4	7	28	58	15

Tabela 43: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
A	48,0	15,2	76,0	5,6	2,4	16,0	0	1,6	0,8	6,4	9,6	7,2
B	62,1	24,6	98,9	0,9	0,2	0	2,3	0,5	1,4	4,6	10,6	1,4
Polska	58,9	22,5	93,8	2,0	0,7	3,6	1,8	0,7	1,3	5,0	10,4	2,7

Tabela 44: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu - wielkości wyrażone w procentach.**

Na podstawie tabeli 43 i 44 można zauważyć, że tylko jeden uczeń, który rozwiązał zadanie 2.2.57 nie przeszedł do finału.
Częściej blefowali uczniowie, którzy dostali się do finału i znacznie częściej mieli dobrą strategię, która jednak nie prowadziła ich do dobrego rozwiązania.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
dziewczęta	73	34	21	68	3	0	2	4	1	2	5	13	2
chłopcy	487	296	105	457	8	4	18	6	3	5	23	45	13
Polska	560	330	126	525	11	4	20	10	4	7	28	58	15

Tabela 45: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w zależności od płci.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
dziewczęta	46,6	28,8	93,2	4,1	0	2,7	5,5	1,4	2,7	6,8	17,8	2,7
chłopcy	60,8	21,6	93,8	1,6	0,8	3,7	1,2	0,6	1,0	4,7	9,2	2,7
Polska	58,9	22,5	93,8	2,0	0,7	3,6	1,8	0,7	1,3	5,0	10,4	2,7

Tabela 46: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w zależności od płci - wielkości wyrażone w procentach.**

Na podstawie tabel 45 i 46 można stwierdzić, że 60% chłopców i 46,6% dziewcząt oddało puste prace. Prace puste i prace bez strategii stanowiły 75% prac dziewcząt i 82% prac chłopców. Bardzo zbliżony był procent uczniów, którzy otrzymali 0 punktów (ponad 93%).
Więcej uczennic niż uczniów otrzymało 2 punkty, ale więcej uczniów niż uczennic rozwiązało zadanie.
Wyraźnie można dostrzec, że wszystkie kategorie błędów występowały w tym zadaniu częściej u dziewcząt niż u chłopców.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gimnazjum	13	8	3	13	0	0	0	0	1	1	1	2	0
klasa I	76	53	8	70	2	1	3	3	0	0	4	8	2
klasa II	193	112	25	180	5	1	7	4	0	5	12	25	4
klasa III	278	157	72	262	4	2	10	3	3	1	11	23	9
Polska	560	330	126	525	11	4	20	10	4	7	28	58	15

Tabela 47: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 - zależność od klasy, do jakiej uczęszczał uczestnik.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gimnazjum	61,5	23,1	100	0	0	0	0	7,7	7,7	7,7	15,4	0
klasa I	69,7	10,5	92,1	2,6	1,3	3,9	3,9	0	0	5,3	10,5	2,6
klasa II	58,0	13,0	93,3	2,6	0,5	3,6	2,1	0	2,6	6,2	13,0	2,1
klasa III	56,5	25,9	94,2	1,4	0,7	3,6	1,1	1,1	0,4	4,0	8,3	3,2
Polska	58,9	22,5	93,8	2,0	0,7	3,6	1,8	0,7	1,3	5,0	10,4	2,7

Tabela 48: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w zależności od klasy, do której uczęszczał zawodnik - wielkości wyrażone w procentach.**

Na podstawie tabel 47 i 48 najwięcej pustych prac oddawali uczniowie klas I (70%), a najmniej uczniowie klas III (56,5%).
Wszyscy uczniowie gimnazjów otrzymali 0 punktów. Najlepsze wyniki uzyskali uczniowie klas I: 92% z nich otrzymało 0 punktów.
11 uczniów klas II (6%) i 12 uczniów klas III (4%) blefowało.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
a	22	11	6	21	0	0	1	0	0	0	1	2	2
b	19	13	2	17	1	0	1	0	0	0	0	1	2
c	16	11	2	15	1	0	0	0	0	0	2	3	0
d	40	23	7	32	4	0	4	0	0	0	2	2	4
e	19	7	6	17	1	0	1	2	0	1	3	5	0
f	24	16	5	24	0	0	0	0	0	0	1	3	0
g	56	34	7	45	1	3	7	0	0	0	1	3	3
h	196	115	35	171	8	3	14	2	0	1	10	19	11
Polska	560	330	126	525	11	4	20	10	4	7	28	58	15

Tabela 49: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w wybranych szkołach.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
a	50,0	27,3	95,5	0	0	4,5	0	0	0	4,5	9,1	9,1
b	68,4	10,5	89,5	5,3	0	5,3	0	0	0	0	5,3	10,5
c	68,8	12,5	93,8	6,3	0	0	0	0	0	12,5	18,8	0
d	57,5	17,5	80,0	10,0	0	10,0	0	0	0	5,0	5,0	10,0
e	36,8	31,6	89,5	5,3	0	5,3	10,5	0	5,3	15,8	26,3	0
f	66,7	20,8	100	0	0	0	0	0	0	4,2	12,5	0
g	60,7	12,5	80,4	1,8	5,4	12,5	0	0	0	1,8	5,4	5,4
h	58,7	17,9	87,2	4,1	1,5	7,1	1,0	0,0	0,5	5,1	9,7	5,6
Polska	58,9	22,5	93,8	2,0	0,7	3,6	1,8	0,7	1,3	5,0	10,4	2,7

Tabela 50: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w wybranych szkołach - wielkości wyrażone w procentach.**

Procent pustych prac uczniów z wybranych szkół nie odbiega od procentu pustych prac uczniów z całej Polski. Jednakże uczniowie XIII LO w Szczecinie oddali tylko 36% pustych prac; stąd wynika najprawdopodobniej wyjątkowo duża liczba błędów powierzchownej wiedzy (10,5%), błędów wynikających z walki o wynik (5,3% - uczniowie z innych wybranych szkół

nie popełniali tego typu błędów), błędów świadomych (15,8% -uczniowie z innych wybranych szkół nie popełniali tego typu błędów).
Najlepiej z zadaniem 2.2.57 poradzili sobie uczniowie XIV LO w Warszawie i V LO w Krakowie (80% prac ocenionych na 0 punktów). Uczniowie z wybranych szkół uzyskali dwukrotnie lepsze wyniki w trakcie rozwiązywania zadania niż uczniowie z całej Polski. Żaden uczeń z IV LO w Toruniu i XIV LO we Wrocławiu nie rozwiązał zadania. Najmniej błędnych strategii przedstawili uczniowie III LO w Gdyni, V LO w Krakowie i XIV LO w Warszawie - błędne strategie stanowiły 5%.

	x	y	$\frac{x}{y}$
Polska	52	76	0,68
okręg gdański	3	4	0,75
okręg katowicki	7	10	0,7
okręg krakowski	6	11	0,55
okręg lubelski	4	4	1
okręg łódzki	2	2	1
okręg poznański	2	2	1
okręg szczeciński	10	11	0,91
okręg toruński	7	8	0,88
okręg warszawski	10	18	0,56
okręg wrocławski	4	5	0,8
dziewczęta	12	14	0,86
chłopcy	40	62	0,65
gimnazjum	2	2	1
klasa I	7	11	0,64
klasa II	22	31	0,71
klasa III	20	32	0,63
a	1	2	0,5
b	1	2	0,5
c	1	1	1
d	4	10	0,4
e	5	6	0,83
f	2	3	0,67
g	4	11	0,36

Tabela 51: **Jak wielu uczniów jest przekonanych, że zrobiło zadanie 2.2.57.**

Wśród uczestników II etapu 57 OM ponad 68% uczestników, którzy podali, że rozwiązali zadanie 2.2.57, faktycznie go nie rozwiązało. Wszyscy uczniowie z okręgów lubelskiego, poznańskiego i łódzkiego byli bezpodstawnie przekonani, że rozwiązali zadanie. Najbardziej pozytywnie wypadli uczniowie z okręgu krakowskiego i warszawskiego, w których tylko 55% z nich błędnie oceniła swoje rozwiązanie.

Dziewczęta (86%) częściej niż chłopcy (80,8%) były bezpodstawnie przekonane o poprawności swojego rozumowania.

Uczniowie klas pierwszych i trzecich najlepiej rozpoznawali, czy rozwiązali poprawnie zadanie.

Ponad połowa uczniów V LO w Krakowie (60%) i XIV LO w Warszawie (63%) zgodnie z prawdą oceniła swoje rozwiązanie.

3.2 Zadanie 5 z II etapu 57 OM

3.2.1 Treść i rozwiązania zadania

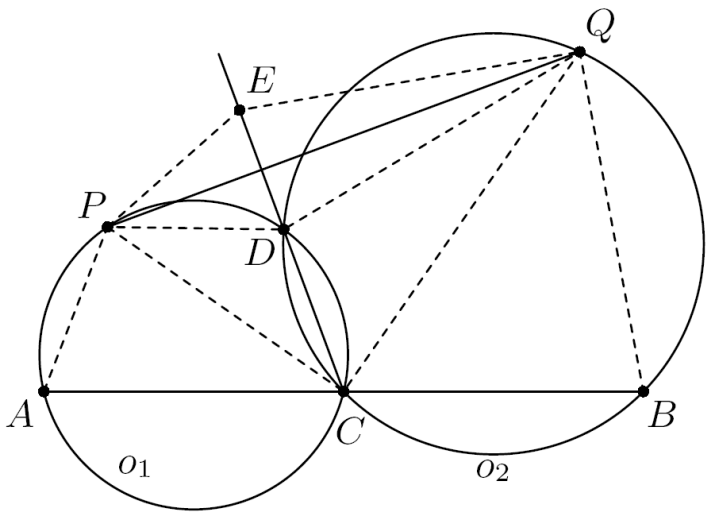
Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez punkty A i C przecina okrąg o_2 przechodzący przez punkty B i C w różnych punktach C i D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera punktu C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera punktu C. Dowieść, że proste PQ i CD są prostopadłe.

Rozwiązania

Sposób 1

Sposób zaproponowany przez organizatorów opierał się na wykorzystaniu przystawania trójkątów ACP i ECP oraz BCQ i ECQ. Rozwiązanie firmowe znalazło się w pracach uczniów WA37, KA33, TO73.

Jeśli $AC = CD$, to również $BC = CD$. Wtedy odcinki PC i QC są odpowiednio średnicami okręgów o_1 i o_2, a zatem $\measuredangle CDP = \measuredangle CDQ = 90^\circ$, skąd wynika, że punkt D leży na odcinku PQ, a proste PQ i CD są prostopadłe.



Przyjmijmy więc w dalszej części rozwiązania, że $AC \neq CD$. Niech E będzie takim punktem leżącym na półprostej $CD^{\rightarrow}$, że $CE = AC$. Wtedy również $CE = BC$. Z zależności $CE = AC$ oraz $\measuredangle ACP = \measuredangle ECP$ wynika, że trójkąty ACP oraz ECP są przystające (cecha *bok-kąt-bok*). Wobec tego $EP = AP = DP$. Analogicznie dowodzimy, że $EQ = DQ$.
Z uzyskanych równości wynika, że punkty D i E są symetryczne względem prostej PQ. Prosta DE jest więc prostopadła do prostej PQ, co kończy rozwiązanie zadania.

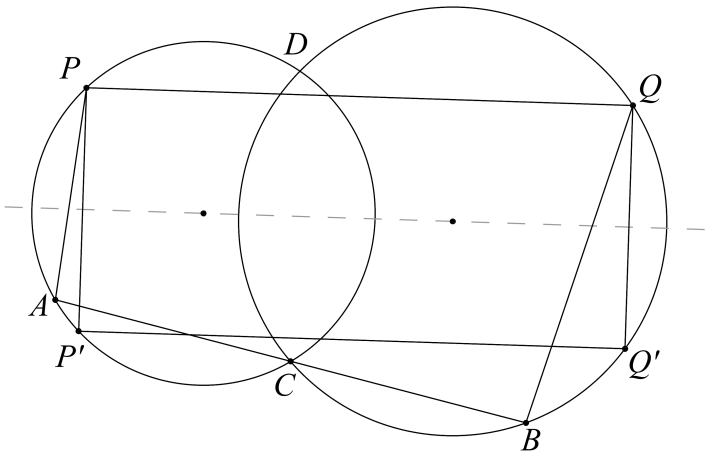
□

Komentarz.
Uczniowie WA37 i TO73 popełnili w swoich rozwiązania ten sam błąd: nie rozważyli przypadku, gdy oba okręgi są przystające. Zaważyło to na tym, że WA37 nie wszedł do finału - uczeń uzyskał 11 punktów, podczas gdy do III etapu wchodzili zawodnicy z 12 punktami. Przypadek pominięty przez zawodników był tak oczywisty, że wielu uczniów nie rozważało go. W wielu rozwiązaniach, wykorzystujących metodę algebraiczną, nie miało to znaczenia (ten szczególny

przypadek był rozważany przy okazji rozważań ogólnych).
Pewna trudność w tym zadaniu bierze się z tego, że określenie *środek łuku okręgu* rzadko pojawia się w szkolnych zadaniach oraz że w rozwiązaniu firmowym równość kątów ACP i ECP nie wynika - ściśle rzecz biorąc - z twierdzenia o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku, ale na takim samym łuku.
Ponadto pomysł z rozwiązania firmowego, polegający na odłożeniu na półprostej CD odcinka o długości równej odległości AC wymaga dorysowania nowego obiektu geometrycznego, który nie narzuca się w sposób naturalny.
Zawodnik WA37 w II etapie uzyskał 11 punktów (0, 0, 6, 0, 5, 0) i nie awansował do finału.
Zawodnik KA33 w II etapie uzyskał 23 punkty (6, 6, 0, 5, 6, 0), a w III etapie 2 punkty (0, 0, 2, 0, 0, 0).
Zawodnik TO73 w II etapie uzyskał 23 punktów (6, 0, 6, 6, 5, 0), a w III etapie 13 punktów (6, 2, 0, 0, 5, 0).

Sposób 2

Sposób 2 został przedstawiony przez ucznia WA80. Pomysł tego eleganckiego i efektownego rozwiązania opiera się na dostrzeżeniu przystawania trójkątów PAC i $CP'P$ oraz QBC i $CQ'Q$, gdzie punkty P' i Q' są obrazami punktów, odpowiednio, P i Q w symetrii względem prostej O_1O_2.



Niech O_1, O_2 będą odpowiednio środkami okręgów o_1, o_2. Poprowadźmy z punktów P oraz Q proste prostopadłe do prostej O_1O_2. Przetną one okręgi o_1 i o_2 kolejno w punktach P' oraz Q'. Zauważmy, że $\measuredangle PAC = \measuredangle PP'C$, bo leżą na tym samym łuku oraz $P'C = PD$, bo PP' jest prostopadła do O_1O_2 i zarazem równoległa do prostej CD. Skoro kąty PAC i $PP'C$ są równe oraz oba kąty zawierają ramię o tej samej długości (AP i $P'C$), to drugie ramię kąta musi być też tej samej długości. Zatem $PP' = AC$.
Analogicznie postępując z drugim okręgiem otrzymujemy kąt $CQ'Q$ wpisany w okrąg o_2 oraz $QQ' = AC = CB$.
Zatem czworokąt $PP'Q'Q$ jest prostokątem, którego boki PP' i QQ' są równoległe do prostej CD, a zatem odcinki PQ i $P'Q'$ są prostopadłe do prostej CD, co kończy dowód.

□

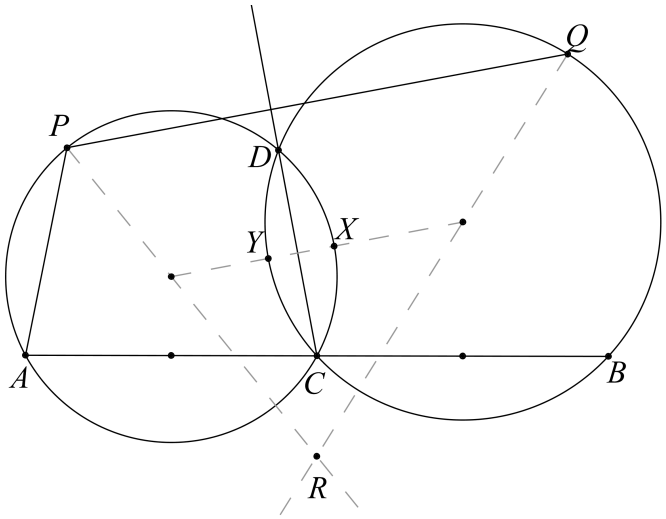
Komentarz.

To niezwykle eleganckie rozwiązanie przedstawił uczeń WA80. Zawodnik ten w II etapie rozwiązał tylko zadanie 5 i nie awansował do etapu III. Zawodnik był uczniem klasy III w XIV LO w Warszawie.
Rozumowanie oparte na tym samym pomyśle przedstawił uczeń WA11. Uczeń ten zdobył w II etapie 14 punktów (0, 6, 0, 2, 6, 0), a w III etapie 6 punktów (0, 0, 0, 6, 0, 0).

Sposób 3

Uczeń KR04 przedstawił bardzo eleganckie rozwiązanie, w którym wykorzystał efektowne sklejanie dwóch trójkątów, a w końcówce także własności osi potęgowych.

Oznaczenia: S_1, S_2 *- środki okręgów* o_1, o_2,
H_1, H_2 *- środki odcinków* AC, BC
$X = o_2 \cap S_1S_2$, $Y = o_1 \cap S_1S_2$,
$R = PS_1 \cap QS_2$, $\measuredangle AS_1H_1 = \alpha = \measuredangle CS_1H_1$, $\measuredangle BS_2H_2 = \beta = \measuredangle CS_2H_2$, $R_1 = AS_1, R_2 = AS_2$.
P *jest środkiem łuku* APD, *czyli* $\measuredangle PS_1D = \frac{1}{2}\measuredangle AS_1D$



Y *jest środkiem łuku* CYD, *czyli* $\measuredangle YS_1D = \frac{1}{2}\measuredangle CS_1D$
Dodając stronami otrzymujemy: $\measuredangle PS_1Y = \frac{1}{2}\measuredangle AS_1C = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha$.
Analogicznie $\measuredangle QS_2X = 180^\circ - \beta$.
Wobec tego trójkąt RS_1S_2 *ma miary dwóch kątów wewnętrznych* α *i* β.
„Sklejając" trójkąty CH_1S_1 *i* CH_2S_2 *bokami* CH_1 *i* CH_2 *otrzymamy trójkąt o kątach* α *i* β, *a więc podobny do trójkąta* RS_1S_2.
Wobec tego:

$$\frac{PS_1}{QS_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{CS_1}{CS_2} = \frac{RS_1}{RS_2}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $PQ \parallel S_1S_2$. *Ale* CD *jest osią potęgową okręgów* o_1 *oraz* o_2, *a więc* $S_1S_2 \perp CD$, *z czego wynika teza.*

□

Komentarz.
Zawodnik zaprezentował bardzo eleganckie i przejrzyste rozwiązanie z wykorzystaniem „dynamicznej" obserwacji o „sklejaniu" trójkątów. Trzeba zaznaczyć, że prawie połowę zapisu zajęło

wypisanie definicji i oznaczeń, co oznacza, że rozwiązanie było bardzo dobrze przemyślane. Trudno oprzeć się wrażeniu, że zawodnik ten umiał rozwiązać to zadanie inaczej (na przykład sposobem 1), a tylko szukał bardziej efektownego rozwiązania.
Przykład ten tylko pozornie przeczy tezie, że efektowne rozwiązanie zadania związane jest z brakiem dalszych sukcesów olimpijskich. Po pierwsze: zasada nie działa w 100%, a tylko „często". Po drugie: jest zupełnie nieprawdziwa dla zawodników najwyższej klasy.
Uczeń KR04 uzyskał w II etapie 36 punktów, a w III etapie 31 punktów 31 punktów (6, 2, 5, 6, 6, 6). Na MOM zdobył złoty medal.

Sposób 4

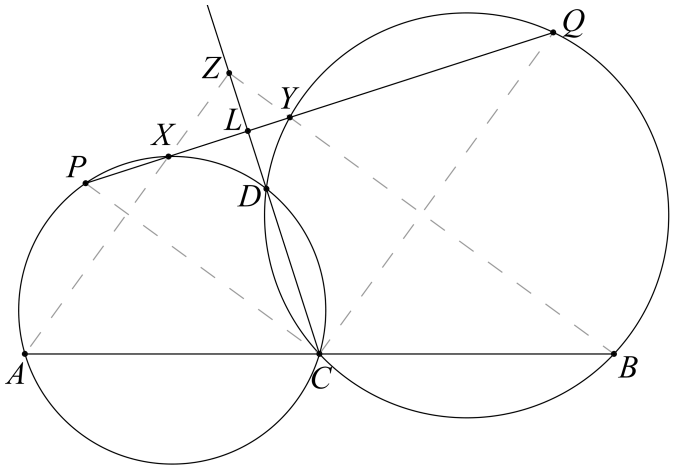
Zawodnik WA10 wykorzystał własności osi potęgowej oraz stosowny rachunek na kątach.

Niech Z będzie takim punktem na prostej CD, że $ZC = AC = CB$, ale niech $ZD < ZC$. Niech X, Y będą punktami przecięcia odpowiednio odcinka ZA z okręgiem o_1 i ZB z okręgiem o_2.
Punkt Z należy do osi potęgowej okręgów o_1 i o_2, zatem:

$$ZX \cdot ZA = ZY \cdot ZB$$

$$\frac{ZX}{ZY} = \frac{ZB}{ZA}$$

Zatem $\triangle AZB \sim \triangle YZX$, bo $\measuredangle XZY = \measuredangle AZB$ i odpowiednie boki są proporcjonalne, więc $\measuredangle ZXY = \measuredangle ZBA$ oraz $\measuredangle ZYX = \measuredangle ZAB$.



Zauważmy jednak, że $\measuredangle ZAC = \measuredangle AZC$. Analogicznie $\measuredangle ZBC = \measuredangle BZC$.
Zatem $\measuredangle AZB = \measuredangle AZC + \measuredangle CZB = 90°$. Ponadto $\measuredangle PXA = \measuredangle PCA$ i $\measuredangle QCB = \measuredangle QYB$, gdyż są oparte na tym samym łuku.
Niech L będzie punktem przecięcia prostych ZC i XY.
Zauważmy, że kąt, pod jakim przecina się odcinek ZC z XY, jest prosty.
$\measuredangle AZC = 90° - \measuredangle ACP$ i $\measuredangle ZLX = 90°$, zatem $\measuredangle ZXL = \measuredangle ACP = \measuredangle PXA$, co oznacza, że punkty P, X, L są współliniowe. Analogicznie dowodzimy, że punkty L, Y, Q są współliniowe.
Pokazaliśmy, że punkty P, X, Y, Q są współliniowe, a wobec tego, że odcinek ZC jest prostopadły do XY, otrzymujemy tezę.

□

Komentarz.
Uczeń WA10 w II etapie uzyskał 6 punktów (0, 0, 0, 0, 6, 0) - zadanie 5 było jedynym, które ten uczeń rozwiązał.

Sposób 5

Sposób 5 jest podobny do sposobu 1, ale zapisany znacznie obszerniej.

Niech G będzie punktem przecięcia prostych PQ i CD. Z założeń

$$\measuredangle ACP = \measuredangle PCG \qquad \text{i} \qquad \measuredangle BCQ = \measuredangle QCD.$$

Ponadto $\measuredangle QBC = 180^\circ - \measuredangle QDC = \measuredangle QDG$ i $\measuredangle PAC = 180^\circ - \measuredangle PDC = \measuredangle PDG$.
Niech Z będzie takim punktem na prostej CQ, że $CQ = CZ$. Wówczas trójkąty ACZ i BCQ są przystające. Stąd:

$$AZ = BQ = DQ,$$

$$AP = PD,$$

$$\measuredangle PAZ = \measuredangle PAC + \measuredangle CAZ = \measuredangle PAC + \measuredangle QBC = \measuredangle PDG + \measuredangle QDG = \measuredangle PDQ. \tag{20}$$

Zatem trójkąty APZ i DPQ są przystające.
Stąd $PZ = PQ$ (bo trójkąt ZPQ jest równoramienny) i zachodzą następujące równości kątów:

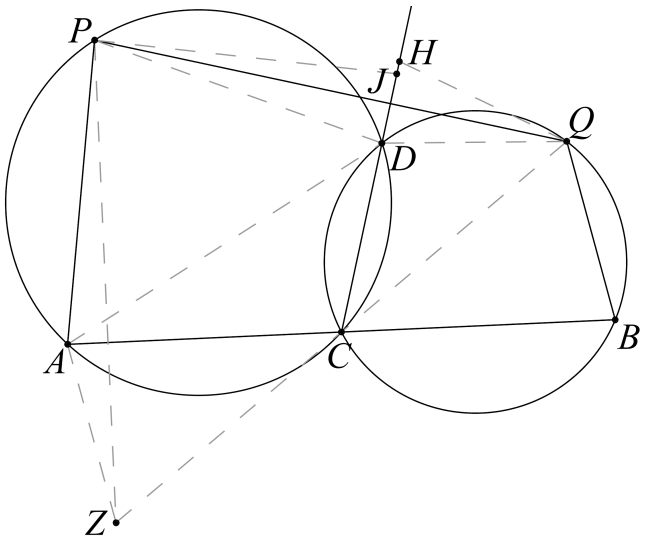
$$\measuredangle PZC = \measuredangle CQP, \tag{21}$$

$$\measuredangle ZPC = \measuredangle CPQ. \tag{22}$$

Rozważmy przypadki.

Przypadek 1
Gdy $D = G$, odcinki PC i QC są średnicami okręgów o_1 i o_2, a zatem prosta PD jest prostopadła do prostej CD.

Przypadek 2
Niech $GC > DC$.
Niech $J \neq D$ będzie takim punktem na prostej CD, że: $\measuredangle DPG = \measuredangle GPJ$, zaś $H \neq D$ takim punktem na tejże prostej, że: $\measuredangle DQG = \measuredangle HQG$. Wówczas sytuacja wygląda tak, jak na poniższym rysunku.



Wówczas na mocy (24) i (25):

$$\measuredangle CQB = \measuredangle CZA = \measuredangle CZP + \measuredangle PZA = \measuredangle CQP + \measuredangle PQD = \measuredangle CQH$$

$$\measuredangle CPA = \measuredangle APZ + \measuredangle ZPC = \measuredangle DPQ + \measuredangle CPQ = \measuredangle CPJ$$

Przypadek 3
Niech $GC < DC$.
Niech $J \neq D$ będzie takim punktem na prostej CD, że: $\measuredangle DPG = \measuredangle GPJ$, zaś $H \neq D$ takim punktem na tejże prostej, że: $\measuredangle DQG = \measuredangle HQG$.

Wówczas na mocy (24) i (25):

$$\measuredangle CQB = \measuredangle CZA = \measuredangle CZP - \measuredangle PZA = \measuredangle CQP - \measuredangle PQD = \measuredangle CQH,$$

$$\measuredangle CPA = -\measuredangle APZ + \measuredangle ZPC = -\measuredangle DPQ + \measuredangle CPQ = \measuredangle CPJ.$$

Zarówno w przypadku 2 jaki przypadku 3 dalsza część rozwiązania przebiega identycznie. Z przystawania trójkątów APC oraz JPC:

$$\frac{AP}{PJ} = \frac{AC}{CJ}$$

oraz dla trójkąta PDJ

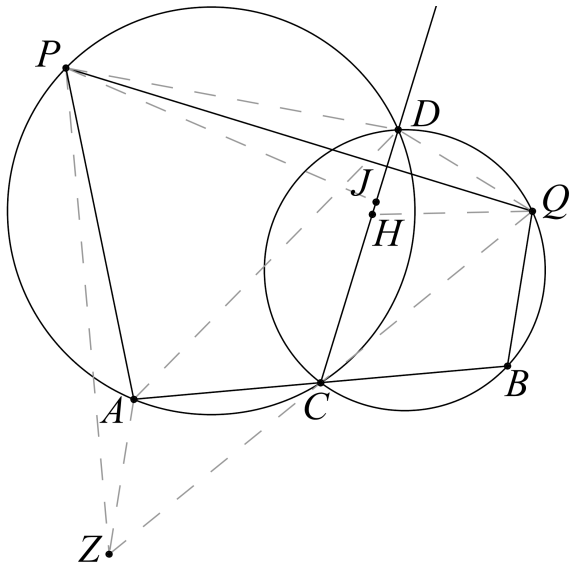
$$\frac{PD}{PJ} = \frac{AP}{PJ} = \frac{DG}{GJ}.$$

Stąd

$$\frac{AC}{CJ} = \frac{DG}{GJ},$$

czyli

$$\frac{BC}{DG} = \frac{CJ}{GJ}.$$



Dla trójkątów BQH, BCH oraz DQH dostaniemy podobnie

$$\frac{BC}{DG} = \frac{CH}{GH}.$$

Dalej:

$$\begin{aligned}
\frac{CH}{GH} &= \frac{CJ}{GJ},\\
\frac{CG+GH}{GH} &= \frac{CG+GJ}{GJ},\\
\frac{CG}{GH} &= \frac{CG}{GJ},\\
GH &= GJ,
\end{aligned}$$

a zatem $H = J$.
Ponieważ $\measuredangle DPG = \measuredangle GPJ$ oraz $\measuredangle DQG = \measuredangle GQJ$, trójkąty PQJ i PQD są przystające. Stąd $PD = PJ$ i z twierdzenia o dwusiecznej dla trójkąta PDJ: trójkąty PGD i PGJ są przystające, a zatem $\measuredangle PGD = 90^\circ$ co implikuje, że proste PQ i CD przecinają się pod kątem prostym.

□

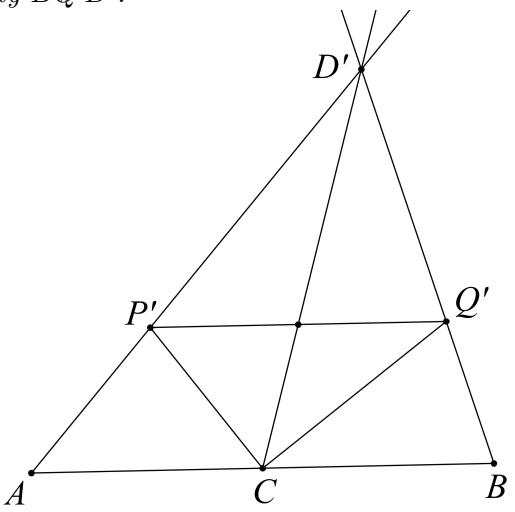
Komentarz.
Sposobem 5 rozwiązywał zadanie uczeń KR70; nie rozważył jednak wszystkich przypadków (zabrakło przypadku 1 i 3).
Zawodnik KR70 zdobył w II etapie 29 punktów (6, 6, 6, 6, 5, 0), a w III etapie 8 punktów (6, 2, 0, 0, 0, 0).

Sposób 6

W sposobie 6 wykorzystana została inwersja. Sposób ten zaprezentowali uczniowie TO80, WA05, WA61, WA63, WA68, WA82, WA160. Poniżej przedstawiamy rozwiązanie zawodnika

WA61.

Przeprowadźmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie C i promieniu AC. Obrazami punktów A i B w inwersji będą te same punkty. Obrazami punktów D, P, Q będą punkty, odpowiednio, D', P', Q'. Proste AC, CB, CD, CP, CQ będą prostymi stałymi w inwersji. Oczywiście CP' będzie dwusieczną kąta ACD', a CQ' będzie dwusieczną kąta BCD'. Punkty A, P', D' będą współliniowe, gdyż A, P, D, C leżały na jednym okręgu przechodzącym przez środek inwersji. Podobnie współliniowe będą punkty $BQ'D'$.



Z twierdzenia o dwusiecznej dla CP' i trójkąta ACD' mamy: $\frac{AC}{CD'} = \frac{AP'}{P'D'}$.
Z twierdzenia o dwusiecznej dla CQ' i trójkąta BCD' mamy: $\frac{BC}{CD'} = \frac{BQ'}{Q'D'}$.
Ponieważ $AC = BC$ dostajemy, że $\frac{AP'}{P'D'} = \frac{BQ'}{Q'D'}$. Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa otrzymujemy, że odcinki $P'Q'$ i AB są równoległe.
Zatem $\measuredangle BCQ' = \measuredangle P'Q'C$ i $\measuredangle ACP' = \measuredangle Q'P'C$ (jako kąty naprzemianległe).

Oznaczmy punkt przecięcia $P'Q'$ z CD' jako X.
Ponieważ $\measuredangle P'CX = \measuredangle XP'C$, to trójkąt CXP' jest równoramienny i $P'X = CX$. Analogicznie pokazujemy, że $CX = Q'X$. Zatem środkiem okręgu opisanego na trójkącie $CQ'P'$ jest punkt $X \in CD'$. Ponieważ prosta CD' przechodzi przez środek tego okręgu, to jest do niego prostopadła.
Po dokonaniu inwersji odwrotnej prosta CD' przejdzie na CD, a okrąg opisany na trójkącie $CP'Q'$ przejdzie na prostą PQ. Ponieważ inwersja zachowuje kąty, więc $CD \perp PQ$.

□

Komentarz.
Wykorzystanie inwersji wymaga dobrej znajomości własności tego przekształcenia: przede wszystkim konforemności oraz własności obrazów okręgu oraz prostej. Wszyscy uczniowie, którzy wykorzystali inwersję w swoim rozwiązaniu, posługiwali się tą metodą sprawnie; świadczy to o tym, że przeszli trening w korzystaniu z własności inwersji. Potwierdza to także fakt, że aż pięciu uczniów pochodziło z XIV LO w Warszawie.

Uczeń WA61 w II etapie uzyskał 16 punktów (2, 6, 0, 2, 6, 0), a w III etapie 4 punkty (0, 2, 0, 2, 0, 0).
Niemal identyczne rozwiązanie przedstawili uczniowie WA82, WA63, WA05, WA68, WA160, TO80
Zawodnik WA82 w II etapie uzyskał 12 punktów (6, 0, 0, 0, 6, 0), a w III etapie 4 punkty (2, 0, 0, 2, 0, 0).
Uczeń WA63 w II etapie uzyskał 29 punktów (6, 6, 6, 0, 6, 5), a w III etapie 6 punkty (0, 0, 6, 0, 0, 0).
Zawodnik WA68 w II etapie uzyskał 36 punktów, a w III etapie 28 punktów (2, 2, 6, 6, 6, 6) i zajął III miejsce. Reprezentował Polskę na MOM
Zawodnik WA160 w II etapie uzyskał 24 punkty (6, 0, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 13 punktów (0, 2, 0, 5, 0, 6).

Uczeń WA05 w II etapie uzyskał 12 punktów (0, 0, 6, 0, 6, 0), a w III etapie 13 punktów (5, 2, 0, 6, 0, 0).
Zawodnik TO80 w II etapie zdobył 24 punkty (6, 0, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 5 punktów (0, 0, 0, 0, 0, 5).
Zawodnicy WA61, WA82, WA63, WA160 byli uczniami II klasy w XIV LO w Warszawie.
Zawodnik WA68 był uczniem III klasy w XIV LO w Warszawie.
Zawodnik WA05 był uczniem III klasy w I LO w Łomży.
Zawodnik TO80 był uczniem III klasy w VI LO w Bydgoszczy.

Sposób 7

Poniższy sposób opiera się na wykorzystaniu własności par trójkątów podobnych. Rozwiązanie przedstawił uczeń WA30.

Niech punkt M będzie punktem przecięcia prostych AD i PC, zaś punktem N - punktem przecięcia prostych BD i CQ. Punkt S jest punktem przecięcia prostych MN i CD.
Proste CN i CM są dwusiecznymi kątów, odpowiednio, DCB i ACD. Z twierdzenia o dwusiecznej mamy:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AC}{CD} \qquad i \qquad \frac{BN}{ND} = \frac{BC}{CD},$$

ale z równości $AC = BC$ dostajemy

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{ND}.$$

A w związku z tym, na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, prosta AB jest równoległa do prostej MN.
$\measuredangle ACM = \measuredangle CMS$ i $\measuredangle BCN = \measuredangle CNS$ ponieważ są to pary kątów naprzemianległych, zatem trójkąty CMS i CNS są trójkątami równoramiennymi. Ponadto $NS = CS = SM$.
Ponieważ $\measuredangle PAD = \measuredangle PDA$ oraz $\measuredangle QBD = \measuredangle QDB$, to mamy pary trójkątów podobnych: $\triangle APD \sim \triangle CSM$ i $\triangle BQD \sim \triangle CSN$.
Zauważmy, że

$$\begin{gathered}
\measuredangle CMD = \measuredangle CAM + \measuredangle ACM = \measuredangle CAM + \measuredangle MAP = \measuredangle CAP, \\
\measuredangle CDM = \measuredangle CPA, \\
\measuredangle ACP = \measuredangle DCM, \\
\measuredangle CND = \measuredangle CBN + \measuredangle BCN = \measuredangle CBN + \measuredangle NBQ = \measuredangle CBQ, \\
\measuredangle NCD = \measuredangle BCQ, \\
\measuredangle CDN = \measuredangle CQB.
\end{gathered}$$

Otrzymujemy kolejne pary trójkątów podobnych $\triangle CAP \sim \triangle CMD$ i $\triangle CBQ \sim \triangle CND$.
Z twierdzenia Talesa dla kąta ADB i równoległych prostych AB, MN otrzymujemy:

$$\begin{gathered}
\frac{DA}{DM} = \frac{DB}{DN}, \\
\frac{CD}{MD} AD = \frac{CD}{ND} BD.
\end{gathered}$$

Ponieważ $\triangle CAP \sim \triangle CMD$ *i* $\triangle CBQ \sim \triangle CND$, *to*

$$\frac{CD}{MD} = \frac{CP}{AP} \qquad i \qquad \frac{CD}{ND} = \frac{CQ}{BQ},$$

mamy więc:

$$\frac{CP}{AP}AD = \frac{CQ}{BQ}BD,$$

a ponieważ $BQ = DQ$, *co daje nam:*

$$\frac{AD}{AP} \cdot \frac{DQ}{DB} = \frac{CQ}{CP}.$$

Ponieważ $\triangle APD \sim \triangle CSM$ *i* $\triangle DQB \sim \triangle CSN$, *to*

$$\frac{CM}{CS} \cdot \frac{CS}{CN} = \frac{CQ}{CP}.$$

Trójkąty CMN *i* CQP *mają kąt wspólny* PCQ *i* $\frac{CM}{CN} = \frac{CQ}{CP}$, *więc* $\triangle CMN \sim \triangle CQP$ *i skoro te trójkąty są podobne, to ich odpowiednie kąty są równe:*
$\measuredangle CQP = \measuredangle CMN = \beta, \measuredangle CPQ = \measuredangle CNM = \alpha$. *Zatem* $\measuredangle QCT = \beta, \measuredangle CPT = \alpha$.
Wiemy, że $\measuredangle QCT = \alpha$ *i* $\measuredangle PCT = \beta$ *oraz* $\alpha + \beta = 90^\circ$, *zatem* $\measuredangle CTQ = \measuredangle CTP = 90^\circ$.
Zatem proste CD *i* PQ *są do siebie prostopadłe.*

□

Komentarz.
Rozwiązanie zawodnika WA30 opierało się na rachunku kątów i zależnościach pomiędzy trójkątami podobnymi. Rozwiązanie jest okrężne, można je było uprościć, ale to oznacza, że uczeń miał świadomość celu, jaki należało osiągnąć, lecz miał pewne problemy z realizacją swojego pomysłu.
Uczeń WA30 w II etapie zdobył 12 punktów (6, 0, 0, 0, 6, 0), a w III etapie 0 punktów.
Bardzo podobne rozwiązanie przedstawili uczniowie SZ04 i SZ14. Rozwiązania tych dwóch uczniów były identyczne co do pomysłu i zapisu. Obaj uczniowie byli uczniami II klasy w XIII LO w Szczecinie.
Uczeń SZ04 w II etapie zdobył 18 punktów (6, 0, 6, 0, 6, 0), a w III etapie 0 punktów.
Uczeń SZ14 w II etapie zdobył 18 punktów (0, 0, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 4 punkty (0, 2, 0, 2, 0, 0).
Bardzo podobne rozwiązanie przedstawił także uczeń KA65, który w II etapie uzyskał 17 punktów (0, 5, 6, 0, 6, 0), a w III etapie 6 punktów (0, 6, 0, 0, 0, 0).

Sposób 8

W rozwiązaniu sposobem 8 wykorzystane zostały trójkąty o równych polach, twierdzenie Ptolemeusza oraz funkcje trygonometryczne. Rozwiązanie takie przedstawili uczniowie KR01 i KA23. Prezentujemy rozwiązanie ucznia KR01.

Przyjmijmy, że $AC = BC = a$, $DC = b$, *a także, że okrąg opisany na trójkącie* ADC *ma promień* R_1 *i okrąg opisany na trójkącie ma promień* R_2.
Zauważmy, że skoro punkt P *jest środkiem łuku* AD *nie zawierającego* C, *to z faktu, że łuki* AP *i* PD *są równej długości wnioskujemy, że* $\measuredangle ACP = \measuredangle PCD = \frac{1}{2}\measuredangle ACD$ *(są to kąty oparte na łukach tej samej długości). Analogicznie* $\measuredangle DCQ = \measuredangle QCB = \frac{1}{2}\measuredangle DCB$. *Ponieważ* $\measuredangle ACD + \measuredangle BCD = 180^\circ$, *wnioskujemy, że* $\measuredangle ACP + \measuredangle BCQ = 90^\circ$. *Jeśli przyjmiemy, że*

$\measuredangle PCA = \alpha$, to $\measuredangle BCQ = 90^\circ - \alpha$. Mamy stąd drugi wniosek, że $\measuredangle PCQ$ jest kątem prostym, bo $\measuredangle PCQ = \measuredangle PCD + \measuredangle QCD = 90^\circ$.
Trójkąty ACD i BCD mają równe pole, gdyż mają podstawy AC i BC równej długości i wspólny wierzchołek D, więc także i wysokości opuszczone na podstawy muszą być równe. Z drugiej strony, z innego wzoru na pole trójkąta mamy:

$$\frac{AD \cdot DC \cdot CA}{4R_1} = \frac{BC \cdot CD \cdot DB}{4R_2},$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Zauważmy dalej, że z równości łuków DQ i QB wynika równość cięciw DQ i QB. Mamy też (z twierdzenia sinusów) $DQ = QB = 2R_2 \sin(90^\circ - \alpha) = 2R_2 \cos\alpha$. Analogicznie dostajemy $AP = PD = 2R_1 \sin\alpha$.
Z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $BCDQ$ mamy

$$BC \cdot DQ + BQ \cdot CD = CQ \cdot BD,$$

$$CQ = \frac{1}{BD}(a+b)2R_2 \cos\alpha.$$

Dla czworokąta $ACDP$ podobnie mamy

$$CP = \frac{1}{AD}(a+b)2R_1 \sin\alpha.$$

Ponieważ trójkąt PCQ jest prostokątny, to korzystając z zależności $\frac{AD}{BD} = \frac{R_1}{R_2}$ mamy

$$\operatorname{tg}\measuredangle PQC = \frac{PC}{CQ} = \frac{\frac{1}{AD}(a+b)2R_2\sin\alpha}{\frac{1}{BD}(a+b)2R_1\cos\alpha} = \frac{BD}{AD}\frac{R_1}{R_2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_1}{R_2}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha.$$

Kąt PQC musi być ostry. Tak samo α, gdyż $\alpha = \frac{1}{2}\measuredangle ACD < \frac{1}{2}\measuredangle ACB = 90^\circ$. W przedziale $(0^\circ, 90^\circ)$ funkcja tangens jest różnowartościowa. Wobec tego $\measuredangle PQC = \alpha$.
Jeśli F będzie punktem przecięcia prostych CD i PQ, to będziemy mieli trójkąt CFQ, w którym $\measuredangle FQC = \measuredangle PQC = \alpha$ oraz $\measuredangle FCQ = \measuredangle DCQ = 90^\circ - \alpha$. Zatem $\measuredangle QFC = 90^\circ$, czyli $CD \perp PQ$, co należało dowieść.

□

Komentarz.
Uczeń KR01 uzyskał w II etapie 26 punktów (6, 2, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 24 punkty (6, 6, 0, 6, 0, 6) i zdobył nagrodę drugiego stopnia. Był reprezentantem Polski na MOM.
Bardzo podobne rozwiązanie przedstawił uczeń KA23, który w II etapie zdobył 24 punkty (6, 6, 0, 6, 6, 0), a w III etapie 14 punktów (6, 2, 0, 0, 0, 6).

Sposób 9

Sposób 9 opierał się na własnościach potęgi punktu względem okręgu, twierdzeniu Ptolemeusza oraz definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. Prezentujemy rozwiązanie ucznia KR11.

Rozważmy okrąg O_3 o środku P i promieniu PD oraz okrąg O_4 o środku Q i promieniu QD. Na ich osi potęgowej leży punkt D, zatem wystarczy pokazać, że punkt C ma równe potęgi

względem okręgów O_3 i O_4. Wtedy CD jako oś potęgowa będzie prostopadła do PQ.
Oznaczmy $\measuredangle APD = 2\alpha$. Łatwo widać, że $\measuredangle ACD = 180^\circ - 2\alpha, \measuredangle DCB = 2\alpha, \measuredangle DQB = 180^\circ - 2\alpha, \measuredangle BDQ = \alpha, \measuredangle DBQ = \alpha, \measuredangle BCQ = \alpha, \measuredangle ADP = 90^\circ - \alpha, \measuredangle DAP = 90^\circ - \alpha, \measuredangle ACP = 90^\circ - \alpha$.
Policzmy potęgi punktu C względem O_3 i O_4. Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów APC i BCQ otrzymujemy

$$AC^2 + PC^2 - 2AC \cdot PC \cos(90^\circ - \alpha) = AP^2,$$

$$BC^2 + CQ^2 - 2BC \cdot CQ \cos\alpha = BQ^2.$$

Przeto wystarczy nam okazać

$$PC^2 - AP^2 = CQ^2 - BQ^2,$$

czyli

$$2AC \cdot PC \sin\alpha - AC^2 = 2BC \cdot CQ \cos\alpha - AC^2,$$

czyli

$$PC \sin\alpha = CQ \cos\alpha.$$

Skorzystajmy z twierdzenia Ptolemeusza dla okręgów O_1 i O_2:

$$PC \cdot AD = AC \cdot PD + AP \cdot CD = AP(AC + CD),$$

$$CQ \cdot BD = BQ \cdot CD + DQ \cdot BC = BQ(BC + CD).$$

Dzieląc te równości stronami:

$$\frac{PC \cdot AD}{CQ \cdot BD} = \frac{AP}{BQ},$$

ale oczywiste są korelacje w trójkątach równoramiennych APD i DBQ

$$AD = 2PD \sin\alpha, BD = 2BQ \cos\alpha.$$

Wstawiamy to naszego wyniku z twierdzenia Ptolemeusza

$$\frac{PC \cdot 2AP \sin\alpha}{CQ \cdot 2BQ \cos\alpha} = \frac{AP}{BQ}.$$

Otrzymaliśmy, że $PC \sin\alpha = CQ \cos\alpha$ jest prawdziwa, zatem teza jest prawdziwa. Hurra! $CD \perp PQ$.

□

Komentarz.
Uczeń KR11 uzyskał w II etapie 26 punktów (6, 2, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 18 punkty (6, 6, 0, 6, 0, 0) i wyróżnienie.
Bardzo podobną strategię zaprezentowali uczniowie TO82 i TO85. Zawodnik TO82 korzystając z twierdzenia Ptolemeusza wykazał, że $CQ \cos\beta = PC \cos\alpha$.
Zawodnik TO82 w II etapie zdobył 18 punktów (6, 0, 6, 0, 6, 0), a w III etapie 8 punktów (0, 2, 0, 6, 0, 0).
Uczeń TO85 w II etapie zdobył 12 punktów (6, 0, 0, 0, 6, 0), a w III etapie 18 punktów (6, 6, 6, 0, 0, 0), za co uzyskał wyróżnienie. Warto zwrócić uwagę na to, że w III etapie uczeń zdobył więcej punktów niż w II; ponadto w III etapie wszystkie zdobyte punkty uzyskał dnia pierwszego.

Sposób 10

Teza w sposobie 10 została wykazana poprzez uzasadnienie, że odległości punktów P i Q od prostej łączącej środki okręgów są równe, a zostało to osiągnięte za pomocą twierdzenia sinusów. Przedstawiamy rozwiązanie zawodnika KR53.

Oznaczmy $\measuredangle CO_1O_2 = \measuredangle DO_1O_2 = \alpha, \measuredangle AO_1P = \measuredangle DO_1P = \beta$, $\measuredangle CO_2O_1 = \measuredangle DO_2O_1 = \alpha', \measuredangle BO_2Q = \measuredangle DO_2Q = \beta'$.
Rozważmy dwa przypadki (gdy środek okręgu leży na prostej AB traktujemy jako skrajną ewentualność przypadku 1 lub 2).

Przypadek 1

Środki O_1 *i* O_2 *leżą po tej samej stronie prostej* AB.
Zauważmy: $AC = 2r_1 \sin\left(\frac{\measuredangle AO_1C}{2}\right) = 2r_1 \sin(\alpha + \beta)$. *Analogicznie* $CB = 2r_2 \sin(\alpha' + \beta')$, *ale skoro* $AC = BC$, *to* $r_1 \sin(\alpha + \beta) = r_2 \sin(\alpha' + \beta')$.
Zauważmy, że punkty P *i* Q *leżą po tej samej stronie prostej* O_1O_2. *Policzmy odległość punktu* P *od prostej* O_1O_2*:*

$$r_1 \sin(\alpha + \beta).$$

Analogicznie odległość punktu Q *od prostej* O_1O_2 *to*

$$r_2 \sin(\alpha' + \beta').$$

Zatem odległości te są równe, to $PQ \parallel O_1O_2 \perp CD$, *czyli* $PQ \perp CD$.

Przypadek 2

Środki O_1 *i* O_2 *leżą po przeciwnych stronach prostej* AB.

W tym miejscu uczeń przeprowadził obliczenia, które były identyczne z obliczeniami w pierwszym przypadku.

□

Komentarz.
Rozumowanie przeprowadzone przez ucznia KR53 było zapisane w eleganckiej formie, z dbałością o szczegóły. Zwraca uwagę rozważenie przypadków w sytuacji, gdy rachunek tego nie wymagał.
Zawodnik KR53 uzyskał w II etapie 14 punktów (2, 0, 0, 6, 6, 0), a w III etapie 0 punktów.
Identyczne co do metody rozwiązanie przedstawili uczniowie WA72, WA77, WA171, WA87, GD90 i SZ33.
Zawodnik WA72 w II etapie uzyskał 28 punktów (6, 2, 6, 6, 6, 2), a w III etapie 23 punkty (6, 6, 0, 6, 0, 5). Uczeń ten zajął 8 miejsce (była to najwyżej uplasowana dziewczyna) i reprezentowała ona Polskę na Zawodach Austriacko-Polskich.
Uczeń WA77 w II etapie zdobył 6 punktów - zadanie 5 było jedynym, które rozwiązał.
Zawodnik WA171 zdobył w II etapie 29 punktów (6, 6, 6, 5, 6, 0), a w III etapie 13 punktów (2, 6, 0, 0, 0, 5).
Uczeń WA87 w II etapie uzyskał 17 punktów (0, 0, 6, 5, 6, 0), a w III etapie 8 punktów (0, 2, 0, 6, 0, 0).
Uczeń GD90 w II etapie uzyskał 30 punktów (6, 6, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 19 punktów (0, 2, 6, 5, 0, 6), co dało mu nagrodę III stopnia.

Uczeń SZ33 w II etapie uzyskał 14 punktów (0, 0, 6, 2, 6, 0), a w III etapie 2 punkty (0, 0, 0, 2, 0, 0).

Sposób 11

W rozwiązaniu sposobem 11 wykorzystany został lemat o odległości punktów A i B od rzutów punktów P i Q na prostą AB. Druga część rozwiązania została oparta na rachunku na funkcjach trygonometrycznych. Poniższe rozwiązanie przedstawił uczeń KR73.

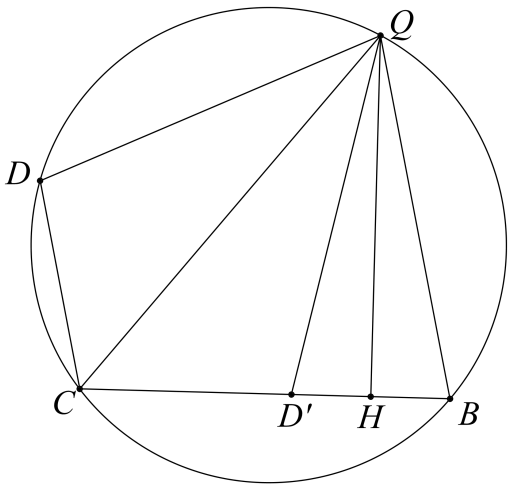
Lemat 6. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i $AB = AD$. Punkt H leży na prostej BC i $AH \perp CB$. Wówczas $CH = \frac{1}{2}(CB + CD)$.*

Dowód

Możemy przyjąć bez straty ogólności, że $CB > CD$. Odbijmy punkt D względem prostej CQ. Wypadnie on na prostej BC. Oznaczmy go jako D'.
Zauważmy, że $DC = D'C$ oraz $\measuredangle QBD' = \measuredangle QD'B$, czyli trójkąt $QD'B$ jest równoramienny.
Stąd $D'H = HB$.
Ostatecznie otrzymujemy:

$$CH = \frac{1}{2}(CD' + CD' + 2D'H) = \frac{1}{2}(CB + CD)$$

co kończy dowód lematu.



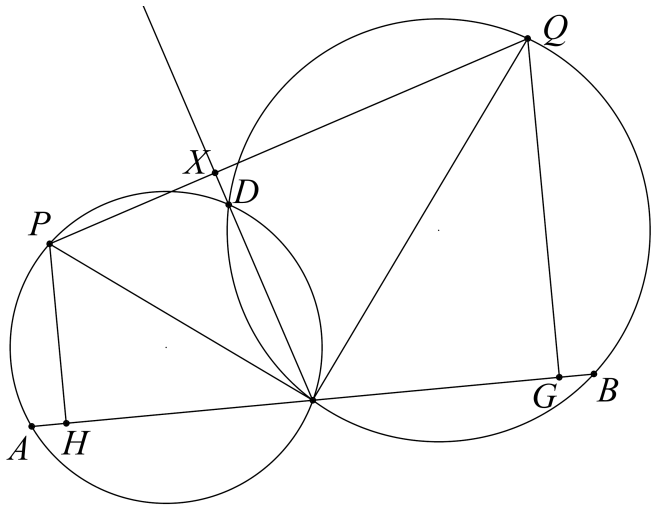
Przyjmijmy oznaczenia: $\measuredangle HCP = \measuredangle PCD = \alpha, \measuredangle GCQ = \measuredangle QCD = \beta, \measuredangle QPC = \gamma, \measuredangle PQC = \delta$. Niech $PH \perp AC$ i $QG \perp CB$. Z twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{CQ}{PC}.$$

Z lematu mamy, że

$$PC\cos\alpha = HC = \frac{CA + CD}{2} = \frac{CB + CD}{2} = CG = QC\cos\beta,$$

czyli $\frac{QC}{PC} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.
Otrzymujemy zatem $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}$.
Zauważmy, że $\gamma + \delta = 90^\circ$.
Stąd $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin\delta}$.
Funkcja $\frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin\delta}$ jest malejąca dla $\delta \in (0^\circ, 90^\circ)$, gdyż gdy zwiększamy w tym przedziale δ, to maleje $\cos\delta$, a rośnie $\sin\delta$. Zatem istnieje tylko jeden taki kąt δ spełniający równość $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin\delta}$. Zauważmy, że jest to $\delta = \alpha$.



Zatem $\alpha = \delta$. Wtedy $\gamma = 90^\circ - \alpha$, a stąd

$$\measuredangle CXP = 180^\circ - \measuredangle XPC - \measuredangle XCP = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \alpha) = 90^\circ,$$

co dowodzi prostopadłości prostych CD i PQ.

□

Komentarz.
Lemat zaproponowany przez zawodnika jest prawdziwy niezależnie od tego, czy punkt H należy do odcinka BC, czy też nie. Ale uczeń nie zwrócił uwagi na ten szczegół. Ponadto uczeń narysował konfigurację z zadania w taki sposób, aby móc wykorzystać lemat w takiej postaci, jakiej dowodził.
Zwraca także uwagę fakt uzasadnienia monotoniczności funkcji $\frac{\sin(90^\circ-\delta)}{\sin\delta}$: najwyraźniej uczeń nie zauważył, że jest to po prostu funkcja $\operatorname{ctg}\delta$.
Zawodnik KR73 uzyskał w II etapie 30 punktów (6, 6, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 14 punktów (6, 0, 0, 6, 2, 0).
Dowód ucznia TO72 opierał się również na pomyśle wykazania, że kąt CQP jest równy kątowi PCD. Uczeń zrealizował go korzystając z twierdzenia cosinusów dla par trójkątów ACP i PCD oraz BCQ i DCQ.
Zawodnik TO72 w II etapie zdobył 36 punktów, a w III etapie 17 punktów (0, 0, 0, 6, 6, 5), co dało mu wyróżnienie. Zwraca uwagę fakt, że uczeń wszystkie punkty w III etapie zdobył drugiego dnia.
Podobną strategię zaprezentowali uczniowie WR62, SZ02, LU06, LU65: w pierwszej fazie wykorzystali twierdzenie Ptolemeusza.
Zawodnik WR62 w II etapie zdobył 18 punktów (0, 0, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 2 punkty (0, 2, 0, 0, 0, 0).
Zawodnik SZ02 w II etapie zdobył 8 punktów (0, 0, 0, 2, 6, 0) i nie awansował do finału.
Zawodnik LU06 w II etapie zdobył 24 punktów (6, 0, 6, 6, 6, 0), a w III etapie 18 punktów (6, 6, 0, 0, 0, 6).
Zawodnik LU65 w II etapie zdobył 5 punktów (tylko za zadanie 5).

Sposób 12

W rozwiązaniu wykorzystane zostały: rachunek na wektorach, twierdzenie cosinusów i twierdzenie Ptolemeusza. Prezentujemy rozwiązanie ucznia WA90.

W dowodzie wykorzystamy

Lemat 7. *Niech punkty C, D, P, Q będą dowolnymi, parami różnymi punktami na płaszczyźnie. Wówczas:*

$$CD \perp PQ \Leftrightarrow DP^2 - DQ^2 = CP^2 - CQ^2.$$

Dowód

$$DP^2 - DQ^2 = CP^2 - CQ^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DQ}) \circ (\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DQ}) = (\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CQ}) \circ (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}) \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{PQ} \circ (\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DQ}) = \overrightarrow{PQ} \circ (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}) \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{PQ} \circ (2\overrightarrow{CD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow PQ \perp CD.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ACD:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos(\measuredangle ACD).$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos(\measuredangle BCD).$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DQB:

$$BD^2 = 2 \cdot DQ^2(\cos \measuredangle BCD + 1).$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADP:

$$AD^2 = 2 \cdot DP^2(\cos \measuredangle ACD + 1).$$

Z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $APDC$:

$$PD(AC + CD) = CP \cdot AD.$$

Z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $QBDC$:

$$DQ(BC + CD) = CQ \cdot BD.$$

Zatem

$$DP^2 - DQ^2 = CP^2 - CQ^2 \Leftrightarrow DP^2 - DQ^2 =$$

$$\frac{PD^2(AC + CD)^2}{AD^2} - \frac{QD^2(BC + CD)^2}{BD^2} \Leftrightarrow$$

$$PD^2 \cdot BD^2(\cos(\measuredangle ACD) + 1) - QD^2 \cdot AD^2(\cos(\measuredangle BCD) + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2DP^2DQ^2(\cos(\measuredangle ACD) + 1)(\cos(\measuredangle ACD) + 1) -$$

$$-2DP^2DQ^2(\cos(\measuredangle ACD) + 1)(\cos(\measuredangle ACD) + 1) = 0.$$

Tym samym dowiedliśmy, że $CD \perp PQ$.

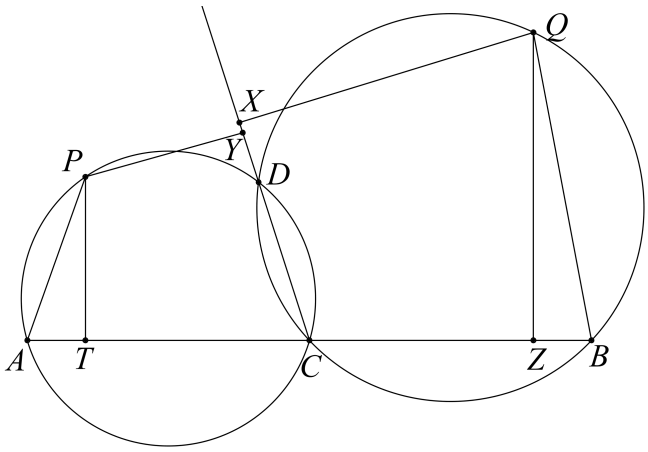
□

Komentarz.
Uczeń WA90 zdobył w II etapie 16 punktów (0, 5, 5, 0, 6, 0), a w III etapie 17 punktów (5, 6, 0, 0, 0, 6).
W podobny sposób rozwiązanie przeprowadził uczeń WA110, który w II etapie uzyskał 18 punktów (6, 0, 6, 0, 6, 0), a w III etapie 0 punktów.
Podobne rozwiązanie zaprezentował uczeń TO36. Różnica polegał na tym, że uczeń w końcowej fazie rozwiązania korzystał z rachunku na kątach i nie wykorzystywał twierdzenia Ptolemeusza. Zawodnik TO36 zdobył w II etapie 6 punktów (właśnie za to rozwiązanie) i nie awansował do etapu III.

Sposób 13

Przeprowadzony został dowód nie wprost, w trakcie którego uczeń WA102 wykorzystał twierdzenie sinusów i twierdzenie Ptolemeusza.

Niech X i Z będą rzutami prostokątnymi punktu Q na proste, odpowiednio, CD i AB. Analogicznie definiujemy punkty Y i T dla punktu P. Aby wykazać, że $PQ \perp CD$ wystarczy udowodnić, że $X = Y$. Jest to równoważne temu, że $CX = CY$, bo punkty X i Y leżą po tej samej stronie punktu C na prostej CD. Ponieważ punkt P jest środkiem łuku AD, to CP jest dwusieczną kąta ACD i analogicznie CQ jest dwusieczną kąta BCD. Dlatego $CX = CZ$ i $CY = CT$.



Przyjmijmy oznaczenia: $\measuredangle ACP = \alpha, AC = BC = a, CD = b$. Wtedy: $\measuredangle BCQ = 90^\circ - \alpha$. Z twierdzenia sinusów mamy:

$$AP = DP = 2R_1 \sin\alpha, AD = 2R_1 \sin 2\alpha,$$

$$BQ = DQ = 2R_2 \sin(90^\circ - \alpha), BD = 2R_2 \sin(180^\circ - 2\alpha),$$

gdzie R_1 to długość promienia okręgu o_1, R_2 okręgu o_2.
Z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $ACDP$ mamy:

$$AD \cdot CP = AC \cdot PD + CD \cdot AP,$$

czyli

$$2R_1 \sin 2\alpha \cdot CP = a \cdot 2R_1 \sin\alpha + b \cdot 2R_1 \sin\alpha,$$

$$CP = \frac{(a+b)\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{a+b}{2\cos\alpha},$$

więc $CT = CP cos\alpha = \frac{a+b}{2}$.
Zapisując twierdzenie Ptolemeusza dla czworokąta $CBQD$ *otrzymamy:*

$$CQ = \frac{a+b}{2\sin\alpha}.$$

Dlatego $CZ = CQ \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = CQ \sin\alpha = \frac{a+b}{2} = CT$.
Z tych równości wynika, że $CX = CZ = CT = CY$, *więc* $X = Y$.
Dlatego proste PQ *i* CD *przecinają się w punkcie* X, *więc są prostopadłe.*

□

Komentarz.
Uczeń WA102 postanowił przeprowadzić w istocie dowód nie wprost. A więc zredukował tezę do postaci: rzuty prostokątne punktów P i Q na prostą CD powinny się pokrywać. W trakcie dowodu wykazał przekonanie, że *punkty* X *i* Y *leżą po tej samej stronie punktu* C. Można to potraktować jako błąd, chociaż nigdzie z tej obserwacji nie korzystał w trakcie dalszego rozumowania.
Zawodnik WA102 uzyskał w II etapie 28 punktów (6, 5, 5, 6, 6, 0), a w III etapie 8 punktów (0, 2, 0, 6, 0, 0).
Niezwykle podobne rozwiązanie zaproponowali uczniowie WA76, GD12 i KA92.
WA76 zdobył w II etapie 24 punkty (6, 6, 0, 6, 6, 0), a w III etapie 2 punkty (0, 2, 0, 0, 0, 0)
Zawodnik GD12 zdobył w II etapie 29 punktów (6, 0, 0, 5, 6, 6), a w III etapie 30 punktów (6, 6, 6, 6, 0, 6). Zawodnik zdobył II miejsce, był reprezentantem Polski na MOM.
Uczeń KA92 zdobył w II etapie 16 punktów (6, 0, 0, 5, 5, 0), a w III etapie 8 punktów (6, 2, 0, 0, 0, 0)

Sposób 14

Uczeń KA62 przyjął, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD. Korzystając metody analitycznej wykazał, że $\frac{O_1C}{OO_1} = \frac{O_2C}{OO_2}$. Następnie napisał:

Ponieważ punkty O, O_1, P *są współliniowe (leżą na symetralnej odcinka* AD*), również punkty* O, O_2, Q *są współliniowe. Zatem wystarczy wykazać, że*

$$\frac{OP}{OO_1} = \frac{OQ}{OO_2},$$

$$\frac{OP}{OO_1} = \frac{OO_1 + O_1P}{OO_1} = 1 + \frac{O_1P}{OO_1} = 1 + \frac{O_1C}{OO_1} = 1 + \frac{O_2C}{OO_2} = 1 + \frac{O_2Q}{OO_2} = \frac{OQ}{OO_2}.$$

Zatem $\frac{OP}{OO_1} = \frac{OQ}{OO_2}$, *co daje równoległość odcinków* PQ *i* O_1O_2, *a* O_1O_2 *jest prostopadły do* CD, *czyli* $PQ \perp CD$, *co należało dowieść.*

□

Komentarz.
Zawodnik za podane rozwiązanie uzyskał 5 punktów, gdyż w trakcie analitycznego dowodu faktu $\frac{O_1C}{OO_1} = \frac{O_2C}{OO_2}$ nie rozważył wszystkich przypadków.
Zawodnik KA62 w II etapie uzyskał 17 punktów (0, 6, 6, 0, 5, 0), a w III etapie 13 punktów

(6, 2, 0, 0, 0, 5).
Bardzo podobną strategię zaprezentowali uczniowie SZ70 i TO12. Jedyna różnica polegała na tym, że pierwszą cześć dowodu uczniowie przeprowadzili korzystając z zależności między kątami i z wykorzystaniem twierdzenia sinusów.
Zawodnik SZ70 w II etapie uzyskał 12 punktów (6, 0, 0, 0, 6, 0), a w III etapie 10 punktów (0, 2, 0, 2, 0, 6).
Zawodnik TO12 w II etapie uzyskał 20 punktów (6, 2, 6, 0, 6, 0), a w III etapie 13 punktów (0, 2, 0, 6, 0, 5).

Sposób 15

Rozwiązanie z wykorzystaniem liczb zespolonych. Żaden uczeń nie przeprowadził poprawnie dowodu z wykorzystaniem tej metody.

Przypiszmy punktom C, A, B, D, P, Q z zadania następujące, odpowiednie liczby zespolone: $0, a, -a, d, p, q$ i przyjmijmy, że a jest ujemną liczbą rzeczywistą oraz $\mathrm{im}(d) > 0$. Niech t będzie środkiem okręgu o_1, natomiast s - środkiem okręgu o_2.
Ponieważ t jest środkiem okręgu o_1, spełnione są warunki

$$|a - t| = |t|, \qquad |d - t| = |t|,$$

które możemy zapisać równoważnie

$$|a - t|^2 = |t|^2, \qquad |d - t|^2 = |t|^2,$$

a stąd otrzymujemy

$$(a - t)(a - \overline{t}) = t\overline{t}, \qquad (d - t)(\overline{d} - \overline{t}) = t\overline{t}.$$

Wyznaczamy z pierwszego warunku $\overline{t} = a - t$, wstawiamy do drugiego warunku i otrzymujemy zależność

$$t(d - \overline{d}) = d(a - \overline{d}).$$

Ponieważ $d - \overline{d} = 2 \cdot \mathrm{im}(d) > 0$ otrzymujemy

$$t = \frac{d(a - \overline{d})}{d - \overline{d}}.$$

Postępując analogicznie dostajemy

$$s = \frac{d(a + \overline{d})}{\overline{d} - d}.$$

Punkt p jest środkiem łuku ad, zatem $(d - t)(a - t) = (p - t)^2$. Stąd dostajemy

$$p^2 - 2tp + dt + at - da = 0,$$

$$\Delta = 4(t - d)(t - a) = 4\frac{d\overline{d}(a - d)^2}{(d - \overline{d})^2}.$$

Zatem

$$p = 2\frac{d(a - \overline{d}) + |d|(a - d)}{d - \overline{d}} \qquad \text{lub} \qquad p = 2\frac{d(a - \overline{d}) - |d|(a - d)}{d - \overline{d}}.$$

Punkt p leży na takim łuku ad, do którego nie należy 0, zatem $\mathrm{im}(p)$ musi być liczbą dodatnią. Zatem

$$p = 2\frac{d(a - \overline{d}) + |d|(a - d)}{d - \overline{d}},$$

gdyż wówczas

$$\mathrm{im}(p) = \mathrm{im}\left(\frac{2}{d-\overline{d}}(d+|d|)(a-|d|)\right) > 0,$$

ponieważ $\frac{2}{d-\overline{d}}$ jest liczbą urojoną, a jej część urojona jest ujemna oraz $\mathrm{re}(d+|d|) > 0$ i $\mathrm{re}(a-|d|) < 0$.
Postępując analogicznie stwierdzamy, że

$$q = 2\frac{d(a+\overline{d}) - |d|(a+d)}{\overline{d}-d}.$$

Aby udowodnić tezę wystarczy wykazać, że $\frac{p-q}{d}$ jest liczbą urojoną.

$$\frac{p-q}{d} = \frac{\frac{2d(a-|d|)}{d-\overline{d}}}{d} = \frac{2(a-|d|)}{d-\overline{d}}$$

Liczba $2(a-|d|)$ jest liczbą rzeczywistą, natomiast liczba $\frac{1}{d-\overline{d}}$ jest liczbą urojoną. Zatem $\frac{p-q}{d}$ jest liczbą urojoną, co kończy dowód.

□

Komentarz.
W podobny sposób próbował rozwiązać zadanie uczeń KR32. Sprowadził problem do wykazania, że $\frac{p-q}{t-s} \in \mathbb{R}$, lecz nie uzasadnił tego w sposób przekonywujący - zapisał komentarz, który pasował do tezy, ale nie wynikał z wcześniejszych faktów. Ponadto uczeń miał problem z ustaleniem, które z wyliczonych wartości p, q odpowiadają sytuacji z zadania tzn., że punkty P, Q leżą na odpowiednich łukach.
Uczeń KR32 zdobył w II etapie 22 punkty (6, 2, 6, 6, 2, 0), a w III etapie 19 punktów (6, 5, 0, 6, 0, 2), co dało mu nagrodę III stopnia. Zawodnik był uczniem I klasy V LO w Krakowie. Metodę zespoloną próbował (nieskutecznie) stosować uczeń GD02 (bliższe informacje na ten temat w dalszej części rozdziału).

Sposób 16

W sposobie 16 wykorzystana została metoda analityczna. Przedstawiamy rozwiązanie uczennicy LU05.

Wprowadzam współrzędne punktów: $A(-2,0)$, $C(0,0)$, $B(2,0)$, $P(p_1,p_2)$, $Q(q_1,q_2)$, $O_1(-1,o_1)$, $O_2(1,o_2)$, $D(d_1,d_2)$.
Punkty C i D będą rozwiązaniami układu

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2-2o_1y=0 \\ x^2-2x+y^2-2o_2y=0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy współrzędne punktu D

$$\begin{cases} d_1 = \frac{2(o_1^2-o_2^2)}{(o_1-o_2)^2+4} \\ d_2 = \frac{4(o_1+o_2)}{(o_1-o_2)^2+4} \end{cases}$$

Widać, że prosta CD będzie dana równaniem

$$y = \frac{2}{o_1-o_2}x.$$

Obliczam równanie prostej AD

$$y = \frac{o_1 + o_2}{o_1^2 - o_2 o_1 + 2} x + 2\frac{o_1 + o_2}{o_1^2 - o_2 o_1 + 2}.$$

Ponieważ $PO_1 \perp AD$, prosta AD ma równanie

$$y = \frac{-(o_1^2 - o_2 o_1 + 2)}{o_1 + o_2} x + \frac{2(o_1 o_2 - 1)}{o_1 + o_2}.$$

Punkt P będzie tym rozwiązaniem poniższego układu, które leży po lewej stronie prostej AD

$$\begin{cases} y = \frac{-(o_1^2 - o_2 o_1 + 2)}{o_1 + o_2} x + \frac{2(o_1 o_2 - 1)}{o_1 + o_2} \\ x^2 + 2x + y^2 - 2o_1 y = 0 \end{cases}$$

Jednym rozwiązaniem jest

$$x = -1 - \frac{(o_1 + o_2)\sqrt{(o_1 - o_2)^2 + 4}}{(o_1 - o_2)^2 + 4}.$$

Drugie rozwiązanie tego układu leży po przeciwnej stronie prostej AD i nas nie interesuje. Mamy więc

$$p_1 = -1 - \frac{(o_1 + o_2)\sqrt{(o_1 - o_2)^2 + 4}}{(o_1 - o_2)^2 + 4}.$$

Możemy obliczyć p_2:

$$p_2 = o_1 + \frac{(o_1^2 - o_1 o_2 + 2)\sqrt{(o_1 - o_2)^2 + 4}}{(o_1 - o_2)^2 + 4}.$$

Analogicznie jak poprzednio obliczenia dla punktu Q prowadzą do wniosku, że

$$q_1 = 1 + \frac{(o_1 + o_2)\sqrt{(o_1 - o_2)^2 + 4}}{(o_1 - o_2)^2 + 4},$$

$$q_2 = o_2 + \frac{(o_2^2 - o_1 o_2 + 2)\sqrt{(o_1 - o_2)^2 + 4}}{(o_1 - o_2)^2 + 4}.$$

Współczynnik kierunkowy prostej PQ jest równy

$$l_{PQ} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = \frac{o_2 - o_1}{2}.$$

Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej CD jest równy

$$l_{CD} = \frac{2}{o_2 - o_1} = -\frac{1}{l_{PQ}},$$

więc proste CD i PQ są prostopadłe.

□

Komentarz.
Uczennicy LU05 jako jedynej udało się rozwiązać zadanie metodą analityczną. Nie ustrzegła się jednak błędów. Nie rozważyła sytuacji, gdy $o_2 = o_1$, chociaż wtedy teza zachodzi w sposób oczywisty. Brak jest także rozważenia przypadku, gdy $o_1^2 - o_1 o_2 + 2 = 0$.
Sytuacja byłaby inna, gdyby zawodniczka wykorzystywała równania ogólne prostej. Wówczas błędy takie nie miałyby miejsca. Ponadto uczennica założyła, że $o_1 > 0$ i $o_2 > 0$, chociaż

nigdzie o tym nie napisała, ale to wykorzystała np. przy wyborze współrzędnych punktów P i Q.
Poza zestawieniami zbiorczymi, w pracy świadomie nie piszę, czy rozwiązującym jest chłopiec czy dziewczyna. Tu robię wyjątek dla podkreślenia faktu, że na 23 osoby próbujące rozwiązać to zadanie za pomocą geometrii analitycznej, udało to się tylko dziewczynie. Potwierdza to obiegową opinię, że dziewczęta są lepsze w zadaniach obliczeniowych oraz bardziej skrupulatne.
Uczennica LU05 w II etapie zdobyła 21 punktów (6, 0, 5, 5, 5, 0), a w III etapie 0 punktów.

Podsumowanie

Rozwiązania zaprezentowane przez uczniów można podzielić na trzy kategorie:

1) rozwiązania syntetyczne, czyli takie, w których uczniowie odwołują się jedynie do własności przekształceń geometrycznych, wykorzystują porównywanie kątów i odcinków do określania przystawania i podobieństwa figur,

2) rozwiązania algebraiczne, w których rozwiązujący przypisują odcinkom i kątom ich miary i za pomocą związków algebraicznych opisują założenia, a dowody polegają na przekształceniach związków algebraicznych do postaci oczekiwanych w tezie,

3) rozwiązania z wykorzystaniem układu współrzędnych zarówno na płaszczyźnie rzeczywistej, jak i zespolonej.

Rozwiązania syntetyczne zadania 5 przedstawiło 19 uczniów (zostały zaprezentowane w sposobach od 1 do 7). Trzech spośród tych uczniów nie awansowało do finału: WA37 (sposób 1 - rozwiązanie firmowe), WA80 (sposób 2) i WA10 (sposób 4). Tylko dwaj uczniowie wśród tej dziewiętnastki zdobyło tytuł laureata 57 OM: KR04 (zajął pierwsze miejsce) i WA68 (zajął trzecie miejsce).

Rozwiązania algebraiczne przedstawiło 28 uczniów. Spośród nich czterech nie dostało się do finału: WA77, SZ02, LU65 i TO36, a trzech zostało laureatami: WA72, GD90 i GD12.
Rozwiązanie zawodnika WA80 było zdecydowanie najładniejsze i najkrótsze spośród wszystkich rozwiązań zadania 5. Uczeń odwoływał się jedynie do własności symetrii osiowej i nie potrzebował rozważać przypadków, gdyż jego rozumowanie dotyczyło wszystkich możliwych położeń punktów P i Q.

Siedem osób rozwiązywało zadanie z wykorzystaniem własności inwersji: pięciu z tych uczniów pochodziło z XIV LO w Warszawie, w tym czterech uczęszczało do klasy II. Można wnioskować zatem, że typ zadań z rozwiązywanych z pomocą inwersji musiał być dokładnie omówiony na zajęciach szkolnych lub w ramach kółka matematycznego lub warsztatów (XIV LO organizuje kilka razy do roku takie zajęcia). Wszyscy uczniowie rozwiązujący zadanie metodą inwersji wykazali znajomość metody oraz jej niuansów.

Rozwiązanie analityczne przedstawił uczeń LU05. Rozwiązanie było żmudne, wymagało sporej dyscypliny, gdyż łatwo było o pomyłkę rachunkową. Mimo dosyć precyzyjnego prowadzenia rozwiązania, uczeń nie ustrzegł się błędu: nie rozważył kilku szczególnych przypadków (uczeń dzielił przez wyrażenia, które miały miejsca zerowe). Uczeń nie dostał się do finału. Metodę analityczna próbowało stosować (bez pozytywnych skutków) jeszcze 23 uczniów.

Osiemnastu spośród tych uczniów jedynie określiło współrzędne punktów z zadania; pozostali utknęli w rachunkach, mimo poprawnego planu rozwiązania.
Metodę zespoloną próbowało stosować trzech uczniów. Uczeń KR32 miał pomysł, który mógł zostać zrealizowany, jednakże w końcowej fazie rozwiązania zawodnik nie potrafił uzasadnić bardzo istotnych wnioskowań.
Wśród 15 laureatów 57 OM, ośmiu nie rozwiązało zadania 5.2.57.

3.2.2 Rozwiązania, które zawierały błędy

Brak rozważenia wszystkich przypadków

Uczeń KR70 zaprezentował rozwiązanie, które zawierało istotny błąd, ale łatwy do naprawienia.

Niech G będzie punktem przecięcia prostych PQ i CD. Z założeń

$$\measuredangle ACP = \measuredangle PCG \qquad i \qquad \measuredangle BCQ = \measuredangle QCD.$$

Ponadto $\measuredangle QBC = 180^\circ - \measuredangle QDC = \measuredangle QDG$ i $\measuredangle PAC = 180^\circ - \measuredangle PDC = \measuredangle PDG$.
Niech Z będzie takim punktem na prostej CQ, że $CQ = CZ$. Wówczas trójkąty ACZ i BCQ są przystające. Stąd:

$$AZ = BQ = DQ,$$

$$AP = PD,$$

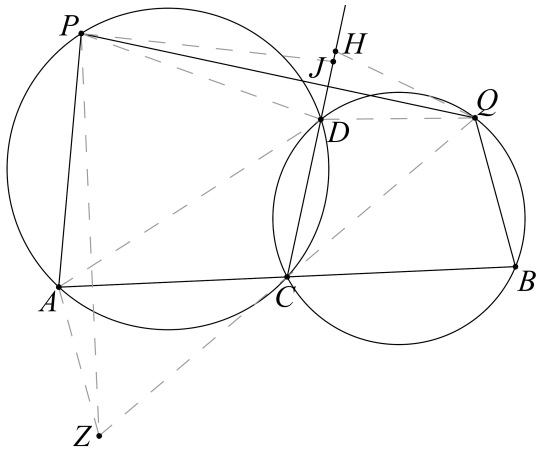
$$\measuredangle PAZ = \measuredangle PAC + \measuredangle CAZ = \measuredangle PAC + \measuredangle QBC = \measuredangle PDG + \measuredangle QDG = \measuredangle PDQ. \tag{23}$$

Zatem trójkąty APZ i DPQ są przystające.
Stąd $PZ = PQ$ (bo trójkąt ZPQ jest równoramienny) i zachodzą następujące równości kątów:

$$\measuredangle PZC = \measuredangle CQP, \tag{24}$$

$$\measuredangle ZPC = \measuredangle CPQ. \tag{25}$$

Niech $J \neq D$ będzie takim punktem na prostej CD, że: $\measuredangle DPG = \measuredangle GPJ$, zaś $H \neq D$ takim punktem na tejże prostej, że: $\measuredangle DQG = \measuredangle HQG$. Wówczas sytuacja wygląda tak, jak na poniższym rysunku.



Wówczas na mocy (24) i (25):

$$\measuredangle CQB = \measuredangle CZA = \measuredangle CZP + \measuredangle PZA = \measuredangle CQP + \measuredangle PQD = \measuredangle CQH,$$

$$\measuredangle CPA = \measuredangle APZ + \measuredangle ZPC = \measuredangle DPQ + \measuredangle CPQ = \measuredangle CPJ.$$

Z twierdzenia o dwusiecznej dla trójkątów APC oraz JPC:

$$\frac{AP}{PJ} = \frac{AC}{CJ}$$

oraz dla trójkąta PDJ

$$\frac{PD}{PJ} = \frac{AP}{PJ} = \frac{DG}{GJ}.$$

Stąd

$$\frac{AC}{CJ} = \frac{DG}{GJ},$$

czyli

$$\frac{BC}{DG} = \frac{CJ}{GJ}.$$

Dla trójkątów BQH, BCH oraz DQH dostaniemy podobnie

$$\frac{BC}{DG} = \frac{CH}{GH}.$$

Dalej:

$$\begin{gathered}\frac{CH}{GH} = \frac{CJ}{GJ},\\ \frac{CG+GH}{GH} = \frac{CG+GJ}{GJ},\\ \frac{CG}{GH} = \frac{CG}{GJ},\\ GH = GJ.\end{gathered}$$

Zatem $H = J$.
Ponieważ $\measuredangle DPG = \measuredangle GPJ$ oraz $\measuredangle DQG = \measuredangle GQJ$, trójkąty PQJ i PQD są przystające. Stąd $PD = PJ$ i z twierdzenia o dwusiecznej dla trójkąta PDJ: trójkąty PGD i PGJ są przystające. Zatem $\measuredangle PGD = 90^\circ$ co implikuje, że proste PQ i CD przecinają się pod kątem prostym.

Komentarz.
Uczeń popełnił istotny błąd: nie rozważył różnych położeń punktów P i Q. Uznał, że rysunek jaki narysował, przedstawia jedyne możliwe położenie punktów względem siebie. Nie zauważył, że kąt PAZ nie musi być wypukły; gdy będzie kątem wklęsłym, zmienią się równania

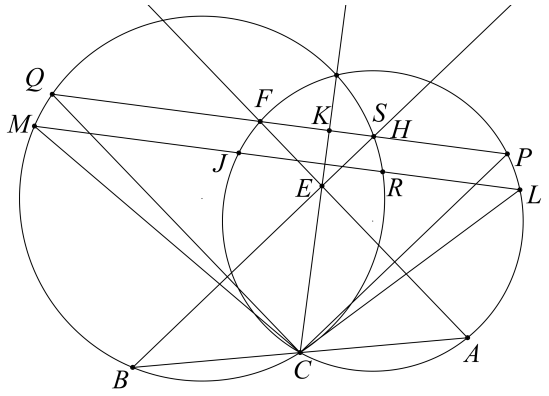
$$\measuredangle CQB = \measuredangle CZA = \measuredangle CZP - \measuredangle PZA = \measuredangle CQP - \measuredangle PQD = \measuredangle CQH,$$

$$\measuredangle CPA = -\measuredangle APZ + \measuredangle ZPC = -\measuredangle DPQ + \measuredangle CPQ = \measuredangle CPJ.$$

Dalsza część rozumowania pozostaje bez zmian.
Uczeń także nie zauważył potrzeby sprawdzenia, co się dzieje, gdy $D = G$.
Zawodnik nie dokonał zatem analizy rozwiązywanego zadania.
Uczeń powoływał się na twierdzenie o dwusiecznej, chociaż wystarczyło powołać się na przystawanie odpowiednich trójkątów. Nie jest to oczywiście błąd, ale pewien objaw charakterystyczny dla wielu rozwiązań zadań olimpijskich: wykorzystywane narzędzia i metody są nieadekwatne do problemu.
To wszystko świadczy o tym, że mimo posiadanej wiedzy, uczeń nieumiejętnie się nią posługuje.

Uczeń KR41 zaproponował następujące rozwiązanie:

Oznaczmy $\measuredangle CQP = \alpha, \measuredangle DCQ = \beta$. Niech punkt K będzie punktem wspólnym prostych CD i PQ, a punkt E takim punktem na półprostej CD, że $CE = AC = BC = a$. Niech punkty G, F, H, J będą punktami wspólnymi, odpowiednio, prostych BE i PQ, prostych AE i PQ, prostej BE i o_2, prostej AE i okręgu o_1.



Ponieważ $\measuredangle PCD = \frac{1}{2}\measuredangle ACD, \beta = \frac{1}{2}\measuredangle BCD, \measuredangle ACB = 180°$, to $\measuredangle PCQ = 90°$ i $\measuredangle PCD = 90° - \beta$.
Ponadto $\measuredangle CEB = 90° - \beta$, bo $CE = CB$ i $\measuredangle AEC = \beta$, bo $CE = AC$, więc $\measuredangle AEB = 90°$.
$\measuredangle QCD = \beta = \measuredangle FED$ i punkty C, E, D są współliniowe, zatem $FE \parallel QC$ czyli $\alpha = \measuredangle CQP = \measuredangle EFP$.
Z trójkąta PCQ: $\measuredangle CPQ = 90° - \alpha$. Analogicznie $GE \parallel PC \Rightarrow \measuredangle EGQ = \measuredangle CPQ = 90° - \alpha$.
Udowodnię teraz nie wprost, że $J = F$.
W przeciwnym razie dorysujemy sobie prostą równoległą do PQ przechodzącą przez J (przecina ona okrąg o_1 w punkcie $L \neq J$ oraz okrąg o_2 w punkcie M; M leży po prawej stronie od J oraz okrąg o_2 w R; R leży po lewej stronie J). Niech $N = CQ \cap LM$. Zakładam tutaj, że prosta równoległa do PQ przechodząca przez J jest nad prostą PQ. Wtedy punkt H leży na łuku SRC (nie może być, że H i J leżą po różnych stronach PQ). Jeśli ta prosta jest pod prostą PQ, wtedy dowód jest analogiczny.
Zatem $\measuredangle CBS = \measuredangle CQS = \alpha$, $\alpha = \measuredangle CBS > \measuredangle CBE = 90° - \beta$ i $\alpha = \measuredangle AJL = \measuredangle ACL < \measuredangle PCA = 90° - \beta$, czyli $\alpha < 90° - \beta$ i $\alpha > 90° - \beta$ - sprzeczność, czyli $J = F$. Wtedy $\alpha = \measuredangle AFP = \measuredangle ACP = 90° - \beta$.
Z trójkąta CQK: $\measuredangle CKQ = 180°\beta - \alpha = 90°$, co należało dowieść.

Komentarz.
Uczeń KR41 nie uwzględnił przypadku, gdy punkt E leży na półprostej CD poza punktem D. Jest to istotna usterka, gdyż rozumowanie będzie przebiegać inaczej niż w podanej sytuacji.

Uczeń KR16 postanowił wykorzystać metodę analityczną.
Zawodnik przypisał punktom A, B, C następujące współrzędne: $A(-a, 0), B(a, 0), C(0, 0)$. Współrzędne środków okręgów o_1, o_2 to, odpowiednio, $(-\frac{1}{2}a, b), (\frac{1}{2}a, c)$.
Następnie uczeń napisał:
Punkt C należy do okręgu o_1, więc równanie okręgu o_1 ma postać $x^2 + ax + y^2 - 2by = 0$.
Analogicznie otrzymujemy równanie okręgu o_2: $x^2 - ax + y^2 - 2cy = 0$.
Niech $D(d_x, d_y)$. Ponieważ $D = o_1 \cap o_2$, wówczas
$d_x^2 + ad_x + d_y^2 - 2bd_y = 0$ i $d_x^2 - ad_x + d_y^2 - 2cd_y = 0$, skąd otrzymujemy

($d_x = \frac{a(b^2-c^2)}{(b-c)^2+a^2}$ i $d_y = \frac{a^2(b+c)}{(b-c)^2+a^2}$) lub ($d_x = 0$ i $d_y = 0$).
To drugie rozwiązanie opisuje oczywiście punkt C, więc ostatecznie (z treści zadania wynika, że $C \neq D$) mamy pierwsze rozwiązanie.
Niech $P(p_x, p_y)$. Wówczas mamy:

$$(p_x + a)^2 + p_y^2 = (p_x - d_x)^2 + (p_y - d_y)^2,$$

gdyż $AP = PD$, oraz

$$p_x^2 + ap_x + p_y^2 - 2bp_y = 0,$$

bo $P \in o_1$.
Stąd otrzymujemy:

$$a^2 + 2ap_x = d_x^2 - 2d_xp_x + d_y^2 - 2d_yp_y,$$
$$p_x^2 + ap_x + p_y^2 - 2bp_y = 0.$$

Analogicznie mamy:

$$a^2 - 2aq_x = d_x^2 - 2d_xq_x + d_y^2 - 2d_yq_y,$$
$$q_x^2 - aq_x + q_y^2 - 2cp_y = 0.$$

Współczynnik kierunkowy prostej PQ wynosi: $A = \frac{p_y-q_y}{p_x-q_x}$.
Współczynnik kierunkowy prostej CD wynosi: $B = \frac{d_y}{d_x} = \frac{a}{b-c}$.
Odejmując stronami równania $a^2 + 2ap_x = d_x^2 - 2d_xp_x + d_y^2 - 2d_yp_y$ i $a^2 - 2aq_x = d_x^2 - 2d_xq_x + d_y^2 - 2d_yq_y$ otrzymamy:

$$a(p_x + q_x) = d_x(q_x - p_x) + d_y(q_y - p_y),$$
$$a(p_x + q_x) = (d_x + d_yA)(q_x - p_x) + d_y.$$

Wystarczy teraz, że wykażemy, że $p_x + q_x = z(d_x + d_yA)$, gdzie z jest pewnym wyrażeniem takim, że $q_x - p_x - az = 0$. Wówczas mielibyśmy $a(p_x+q_x) = az(d_x+d_yA) = (d_x+d_yA)(q_x-p_x)$; stąd $(d_x + d_yA)(q_x - p_x - az = 0) = 0$,
$d_x + d_yA = 0$,
$A = -\frac{d_x}{d_y} = -\frac{1}{B}$.
Proste są prostopadłe.

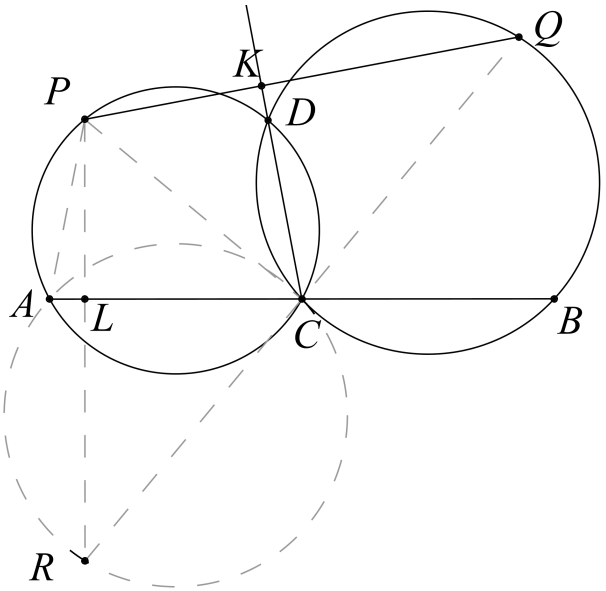
Komentarz.
Uczeń stwierdził, że wystarczy wykazać, że $p_x + q_x = z(d_x + d_yA)$, *gdzie z jest pewnym wyrażeniem takim, że* $q_x - p_x - az = 0$, ale nigdzie tego nie uzasadnił. Zapewne zabrakło pomysłu, ale także doświadczenia: uczeń nie wykorzystał zależności, które wynikały z faktu, że punkt D należał do okręgów o_1 i o_2. Po uwzględnieniu tego faktu rozwiązanie miało szanse realizacji.
Zwraca uwagę stosowana symbolika, która utrudniała odczytywanie i zapisywanie rozwiązania.

Zawodnik WA101 przedstawił następujące rozwiązanie:

Względem prostej PC narysowałem okrąg o_3 symetryczny do o_2. Zatem odcinki CE i CD, RC i QC, PR i PQ są odpowiednio równe; R jest środkiem łuku AE.

$$\triangle PRC \equiv \triangle PQC \Rightarrow \measuredangle PRC = \measuredangle PQC.$$

Ponieważ $\measuredangle ACR = \measuredangle RCE = \measuredangle DCQ = \measuredangle KCQ$, to $\measuredangle CKQ = \measuredangle CLR$ i $\measuredangle CAP = \measuredangle CLP$.
Z tego wynika, że $\measuredangle LPC = \measuredangle KPC$ oraz $\triangle PLC \equiv \triangle PKC$.
Ponieważ $\measuredangle LAP = \measuredangle KDP$ (z własności kątów wpisanych w okrąg) oraz $PA = PD$ i $PL = PK$, to $\triangle PAL \equiv \triangle PDK$ i $\measuredangle APL = \measuredangle DPK$.
Zatem $\measuredangle APD = \measuredangle LPD + \measuredangle APL = \measuredangle LPD + \measuredangle DPK = \measuredangle LPK$.
Półprosta $CP^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ACD, zatem $\measuredangle PCD = \measuredangle PCA = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle APD$.



Jak już udowodniłem $\measuredangle LPC = \measuredangle CPK = \frac{1}{2}\measuredangle APD$.
Dlatego $\measuredangle PKC = \measuredangle PLC = 90^\circ$. Teza zadania została udowodniona.

Komentarz.
Pierwszy błąd, jaki uczeń WA101 popełnił był najprawdopodobniej tylko przejęzyczeniem: *Względem prostej PC narysowałem okrąg o_3 symetryczny do o_2. Zatem odcinki CE i CD, RC i QC, PR i PQ są odpowiednio równe; R jest środkiem łuku AE.* Z wniosków, które uczeń wyprowadził (zwłaszcza $PR = PQ$) wynika, że chodziło mu raczej o symetrię środkową względem punktu C. Mimo to brakuje bliższej analizy miar kątów.
Drugi błąd jest poważniejszy: uczeń nie zauważył, że równość $\measuredangle APD = \measuredangle LPD + \measuredangle APL$ zachodzi wtedy, gdy punkt K leży poza odcinkiem CD. Oczywiście, rozumowanie w przypadku, gdy $K \in \overline{CD}$ jest analogiczne, ale uczeń na to nie zwrócił uwagi.
Uczeń otrzymał za swoje rozwiązanie 2 punkty.
Zawodnik WA101 uzyskał w II etapie 14 punktów (6, 0, 6, 0, 2, 0), a w III etapie 2 punkty (0, 0, 0, 2, 0, 0),

Strategie, które nie zakończyły się sukcesem

Zawodnik GD02 próbował zastosować liczby zespolone:

Umieśćmy punkty na płaszczyźnie Gaussa.
Połóżmy: $a = -1, b = 1$. Wówczas $c = 0$.

$$arg\frac{c-d}{a-d} = arg\frac{c-p}{a-p},$$

czyli

$$arg[d(p+1)] = arg[p(d+1)].$$

(Uwaga: wszystkie lematy znajdują się w książce Skopes "Miniatury geometryczne")
Analogicznie

$$arg[d(q-1)] = arg[q(d-1)].$$

Zatem

$$arg(d+1) = arg\frac{d(p+1)}{p} \qquad i \qquad arg(d-1) = arg\frac{d(q-1)}{q}.$$

Dalej

$$arg\frac{d-a}{p-a} = arg\frac{p-d}{a-d},$$

czyli

$$arg[-(d+1)^2] = arg[(p+1)(p-d)].$$

Analogicznie

$$arg[(d-1)^2] = arg[(q-1)(q-d)].$$

Podstawiając z pierwszego i drugiego warunku dostajemy:

$$\begin{cases} \arg\frac{d^2(q-1)^2}{q^2} = \arg[(q-1)(q-d)] \pmod{\frac{\pi}{2}} \\ \arg\frac{d^2(p+1)^2}{p^2} = \arg[(p+1)(p-d)] \pmod{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arg\frac{d^2(q-1)}{q^2} = \arg(q-d) \pmod{\frac{\pi}{2}} \\ \arg\frac{d^2(p+1)}{p^2} = \arg(p-d) \pmod{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$$\arg\frac{(q-1)(p-d)p^2}{(p+1)(q-d)q^2} = 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$

Dalej

$$\frac{(q-1)(p-d)p^2}{(p+1)(q-d)q^2} = \pm\overline{\left(\frac{(q-1)(p-d)p^2}{(p+1)(q-d)q^2}\right)},$$

czyli

$$\frac{p-q}{d} = \pm\overline{\left(\frac{p-q}{d}\right)},$$

$$arg\frac{p-q}{d-c} = 0 \pmod{\frac{\pi}{2}},$$

czyli wektory $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{QP}$ są równoległe albo prostopadłe. Ponieważ nie mogą być równoległe, to są prostopadłe. Co kończy dowód.

Komentarz.
Metoda zaproponowana przez ucznia nie miała szans powodzenia. Równości

$$\frac{(q-1)(p-d)p^2}{(p+1)(q-d)q^2} = \pm\overline{\left(\frac{(q-1)(p-d)p^2}{(p+1)(q-d)q^2}\right)}$$

nie można zredukować do postaci

$$\frac{p-q}{d} = \pm\overline{\left(\frac{p-q}{d}\right)}$$

Redukcja ta jest właściwie równoważna tezie zadania.
Uczeń wykazał się dobrą znajomością metody zespolonej, ale ten sposób postępowania (z wykorzystaniem analizy argumentów odpowiednich liczb zespolonych) miał niewielkie szanse powodzenia.
Nie udało znaleźć książki, na którą uczeń się powołuje.

Uczeń KR31 stwierdził:
Ponieważ czworokąt $DCBQ$ jest wpisany w okrąg, więc mogę zapisać dla niego twierdzenie Ptolemeusza: $CQ \cdot BD = CD \cdot BQ + DQ \cdot CB = DQ(CD + CB) = DQ(CD + AC)$, bo $BQ = DQ$ i $CB = AC$. Analogicznie dla czworokąta $APDC$: $AD \cdot PC = PD(AC + DC)$.
Ponieważ $CQ \cdot BD = AD \cdot PC$, więc $DQ(CD + AC) = PD(AC + DC)$ a stąd $DQ = PD$.

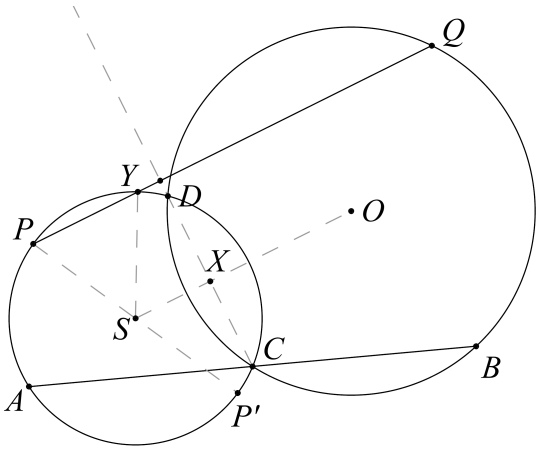
Komentarz.
Uczeń powołał się na równość $CQ \cdot BD = AD \cdot PC$, której nie uzasadnił i która jest nieprawdziwa. Błąd powstał najprawdopodobniej na podstawie obserwacji rysunku uczynionego przez ucznia. Zawodnik narysował dwa okręgi o promieniach podobnej długości i równość wyglądała na prawdopodobną. Gdyby uczeń umiał sobie wyobrazić dwa okręgi o znacząco różnych promieniach, zapewne dostrzegł by nieprawdziwość swojego przypuszczenia. Ponadto uczeń wykorzystał taką równość, która prowadziła go do rozwiązania - na podstawie wymyślonego przez siebie faktu wykazał tezę twierdzenia.

Uczeń KR42 napisał:
Niech K_1 będzie spodkiem wysokości rzuconej na AD z wierzchołka P trójkąta równoramiennego APD. A więc $\measuredangle PK_1D = 90°$. Niech K_2 będzie spodkiem wysokości rzuconej na BD z wierzchołka Q trójkąta równoramiennego DQB.
Na trójkątach prostokątnych PK_1D i QK_2D opiszmy okręgi. Środkami tych okręgów (odpowiednio PK_1D i QK_2D) są punkty O_3 i O_4, które są środkami odcinków, odpowiednio, PD i QD. Zauważmy, że w takim wypadku odcinki O_3O_4 i PQ są równoległe, bo w trójkącie PQD punkty O_3 i O_4 leżą w połowie boków PD i QD i wraz z punktem D wyznaczają trójkąt podobny do trójkąta PQD o cztery razy mniejszym polu.
Wiadomo również, że jeśli mamy dwa okręgi przecinające się w dwóch punktach, to cięciwa, która jest odcinkiem łączącym te punkty jest prostopadła do odcinka łączącego środki obydwu okręgów.
Z tego wynika, że O_1O_2 jest prostopadłe do CD i O_3O_4 jest prostopadłe do DE. O_3O_4 jest równoległe do PQ. A więc najprawdopodobniej PQ jest prostopadły do CD.

Komentarz.
Uczeń KR42 miał świadomość, że przedstawił rozwiązanie niepoprawne, stąd jego komentarz: *A więc najprawdopodobniej PQ jest prostopadły do CD.* Widział, że rozwiązanie przyszło zbyt łatwo, ale najprawdopodobniej nie wiedział, w którym miejscu popełnił błąd. Nie dostrzegł prostego błędu: punkty C, D, E nie muszą być współliniowe. Błąd ten zatem kwalifikuję jako błąd wynikający ze zmęczenia.

Uczeń KR62 napisał:

Zauważmy najpierw, że odcinek SO jest prostopadły do CD. Oznaczmy $\measuredangle PSY = \alpha, \measuredangle YSX = \beta, \measuredangle XSP' = \gamma$. Wiemy, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



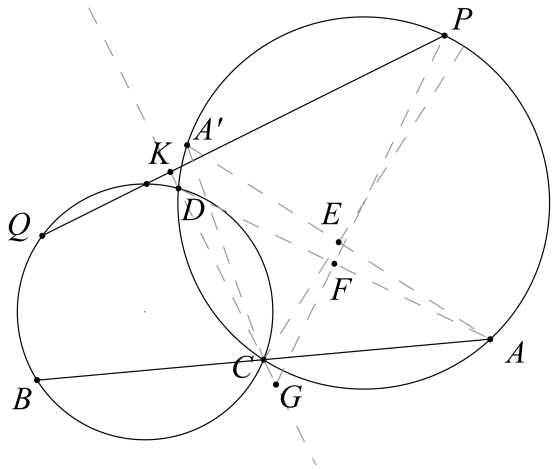
Zauważmy, że jeśli $\measuredangle YPS + \measuredangle PSX = 180^\circ$, to $PSOQ$ jest trapezem, czyli $DC \perp PQ$.

$$\measuredangle YPS + \measuredangle PSX = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) + \alpha + \beta = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Zauważmy, że skoro X jest środkiem łuku DC, a C jest środkiem łuku XP', to $\measuredangle XSC = \frac{\beta}{2}$ i $\measuredangle XSC = \frac{\gamma}{2}$, czyli $\gamma = \beta$. No a to kończy dowód.

Komentarz.
Błąd ucznia, popełniony w końcowej fazie rozwiązania, spowodowany był sugestywnym rysunkiem, gdyż w ogólnym przypadku punkt X nie jest środkiem łuku XP'.

Uczeń KR13 napisał:
Z punktu C poprowadźmy odcinek o długości AC o końcu w punkcie $A' \neq A$ i należącym do okręgu o_1. Otrzymamy dwa trójkąty równoramienne $AA'C$ oraz $A'BC$. Z równości kątów $\measuredangle A'BC = \measuredangle CA'B = \alpha$ oraz $\measuredangle CA'A = \measuredangle A'AC = \beta$ otrzymujemy równość $\alpha + \beta = 90^\circ$. Ponieważ $\measuredangle BA'A = \alpha + \beta = 90^\circ$, to trójkąt $AA'B$ jest prostokątny.



Zauważmy, że $\measuredangle AA'C = \measuredangle ADC = \beta$, ponieważ są oparte na tym samym łuku. Zauważmy również, że prosta PO_1 przecina prostą AD pod kątem prostym.
Poprowadźmy teraz wysokość w trójkącie $AA'C$ z punktu C do punktu E leżącego na podstawie AA'.
Przyjmijmy, że proste PO_1 i AD przecinają się w punkcie F oraz że proste PO_1 i DC przecinają się w punkcie G.
Zauważmy, że trójkąty ECA' i FDG są prostokątne i mają takie same miary kątów $\measuredangle EA'C = \measuredangle FDG$, a stąd $\measuredangle ECA' = \measuredangle FGD$.
Udowodniliśmy zatem równość kątów $\measuredangle FGD = \alpha = \measuredangle A'BC$.
Przyjmijmy jeszcze, że proste PQ oraz GD przecinają się w punkcie K.
W analogiczny sposób dowodzimy, że $\measuredangle GPK = \measuredangle CAA'$, przy czym na początku z punktu C rysujemy odcinek o długości BC, którego drugi koniec B' leży na okręgu o_2 i $B \neq B'$.
Skoro udowodnione mamy równości kątów $\measuredangle GPK = \measuredangle BAA'$ oraz $\measuredangle PGK = \measuredangle ABA'$, wnioskujemy, że trójkąty $AA'B$ oraz PKG są podobne, co pociąga za sobą równość kątów $\measuredangle AA'B = \measuredangle GKP = 90°$, co kończy dowód.

Komentarz.
Uczeń KR13 nie rozważył przypadku, gdy $A = A'$. Uczeń twierdzi, że korzystając z analogicznego rozumowania otrzymał równość $\measuredangle GPK = \measuredangle CAA'$ - równość ta jest równoważna tezie i w żaden sposób nie wynika z rozumowania przedstawionego przez ucznia. Można uznać zatem, że błąd wynikał z walki o wynik.

Uczeń KR94 postanowił wykorzystać inwersję względem okręgu o_3 o środku C i promieniu AC. Przez Z, Y oznaczył punkty przecięcia prostej PQ z okręgiem o_3. Nie zwrócił uwagi na to, że prosta PQ nie zawsze przecina się z tym okręgiem.
Następnie stwierdził, że obrazami punktów Z i Y będą te same punkty, obrazami punktów P i Q będą punkty P' i Q'. Ponadto zauważył, że obrazem prostej PQ w tej inwersji będzie okrąg o_4 przechodzący przez punkty Z, Y, P', Q', C. Następnie napisał:
Z twierdzenia o trzech osiach potęgowych wiemy, że prosta PQ przetnie się w jednym punkcie z prostymi AK i BL, gdzie K jest punktem przecięcia okręgów o_1 i o_3, a punkt L jest punktem przecięcia okręgów o_2 i o_3.
Na ogół proste PQ, AK, BL nie przecinają się w jednym punkcie. Powołanie się na osie potęgowe nie ma sensu, gdyż prosta PQ nie jest osią potęgową wybranych okręgów. Uczeń w pracy nie zrobił stosownego rysunku, zatem zapisywał swoje pomysły bez związku z sytuacją rzeczywistą. Zawodnik wykazał się pewną znajomością pojęć, ale bardzo słabym przygotowaniem do korzystania z nich.

Uczeń KR06 korzystając z twierdzenia sinusów doprowadził do równości: $\sin\measuredangle CBQ = \sin\measuredangle CDQ$. Następnie napisał:
Oba kąty są wpisane w okrąg, więc ich miary należą do przedziału $(0, \pi)$.
Zatem $\measuredangle CBQ = \measuredangle CDQ$.
Ponieważ czworokąt $BCDQ$ jest wpisany w okrąg $\measuredangle CBQ + \measuredangle CDQ = \pi$.
Zatem $\measuredangle CDQ = \frac{\pi}{2}$.
Analogicznie dowodzimy, że $\measuredangle CDP = \frac{\pi}{2}$.
Stąd $\measuredangle PDQ = \measuredangle CDQ + \measuredangle CDP = \pi$, a więc punkt D należy do prostej QP.
A ponieważ $\measuredangle CD = \measuredangle CDP = \frac{\pi}{2}$, proste CD i PQ są prostopadłe.

Komentarz.
Uczeń powołał się na równość $\sin\measuredangle CBQ = \sin\measuredangle CDQ$, która dla przeciwległych kątów czwo-

rokąta wpisanego w okrąg jest oczywista i nie powinna zaskoczyć olimpijczyka. Ponieważ zawodnik do otrzymania tej równości wykorzystał równość odcinków BQ i DQ, mógł utwierdzić się w przekonaniu, że równość ta jest charakterystyczna dla pewnego typu czworokątów wpisanych w okrąg.
Zaskakujące jest wnioskowanie: jeżeli $\sin \measuredangle CBQ = \sin \measuredangle CDQ$, to $\measuredangle CBQ = \measuredangle CDQ$ - olimpijczyk powinien wiedzieć, że funkcja sinus w przedziale $(0, \pi)$ nie jest różnowartościowa (zwłaszcza, że zauważył ten przedział).
Zawodnik bardzo spokojnie przyjął współliniowość punktów P, D, Q. W przekonaniu, że rozumowanie jest poprawne, utwierdził go rysunek: na odręcznym rysunku ucznia punkty te są współliniowe. Takie rozwiązanie pokazuje, jak ważne w rozwiązywaniu zadań geometrycznych jest wykonywanie precyzyjnych rysunków; trzeba także wspomnieć o tym, że istotną rolę odgrywa wykonywanie rysunków różnych sytuacji tak, aby uniknąć przypadkowych wniosków, które nie dają się uogólnić.

Uczeń KR36 przyjął oznaczenia $\measuredangle APC = \beta, \measuredangle CQB = \gamma, \measuredangle QCB = \alpha$ i napisał:
Oczywiście $\measuredangle ACP = \measuredangle PCD, \measuredangle DCQ = \measuredangle QCB$, *czyli* $\measuredangle PCQ = \frac{\pi}{2}$.
Wystarczy, że udowodnię, że $\measuredangle QPC = \measuredangle DCQ = \alpha$, *czyli, że* $\cos(\measuredangle QPC) = \cos(\measuredangle DCQ)$, *czyli, że* $\frac{PC}{\sqrt{PC^2+CQ^2}} = \cos\alpha$,
czyli po prostych przekształceniach $PC \sin\alpha = CQ \cos\alpha$.
Oznaczmy: r - promień okręgu opisanego na trójkącie CBQ, R - promień okręgu opisanego na trójkącie ACP.
Mamy wtedy: $PC = 2R\cos(\alpha - \beta), CQ = 2r\cos(\alpha + \gamma)$.
Dodatkowo z twierdzenia sinusów i z równości $AC = BC$ *mamy:* $R\sin\beta = r\sin\gamma$.
Po podstawieniu, wymnożeniu i skorzystaniu z prostych tożsamości trygonometrycznych, dostajemy równość:

$$R\sin 2\alpha\cos\beta = r\sin 2\alpha\cos\gamma - 2R\cos 2\alpha\sin\beta.$$

Po podniesieniu do kwadratu:

$$R^2\sin^2 2\alpha(1-\sin^2 2\beta) = r^2\sin^2 2\alpha(1-\sin^2 2\gamma) + 4R^2\cos^2 2\alpha\sin^2 2\beta - 2Rr\sin 4\alpha\sin\beta\cos\gamma,$$

$$(R^2 - r^2)\sin^2 2\alpha = 4R^2\cos^2 2\alpha\sin^2 2\beta - 2Rr\sin 4\alpha\sin\beta\cos\gamma,$$

Po ponownym podniesieniu do kwadratu otrzymamy tożsamość, co kończy dowód.

Komentarz.
Ostatnie zdanie nie ma potwierdzenia w faktach: podniesienie do kwadratu nie daje podanej przez ucznia tożsamości. Powodem jest fakt, że zawodnik w trakcie dowodu w żaden sposób nie wykorzystał położenia punktu D. Nie mógł zatem tą metodą rozwiązać zadania.

Uczeń WA01 napisał:
Rozważmy symetryczne odbicia trójkąta BCQ względem prostej CQ i trójkąt ACP względem prostej CP.
Z założenia $AC = BC$, *ponadto zachodzi* $\measuredangle ACP + \measuredangle BCQ = \measuredangle PCQ$, *więc odbicia punktów A i B pokryją się, a obrazy odcinka AP i BQ pokryją się z odcinkiem PQ. Zatem* $PQ = PA + BQ$, *ale także* $PD = PA$ *oraz* $BQ = QD$. *Czyli* $PQ = PD + QD$, *co oznacza, że punkt D leży na prostej PQ.*

Komentarz.
Zawodnik WA01 zrobił precyzyjny rysunek (przeprowadził konstrukcję), na którym wyraźnie

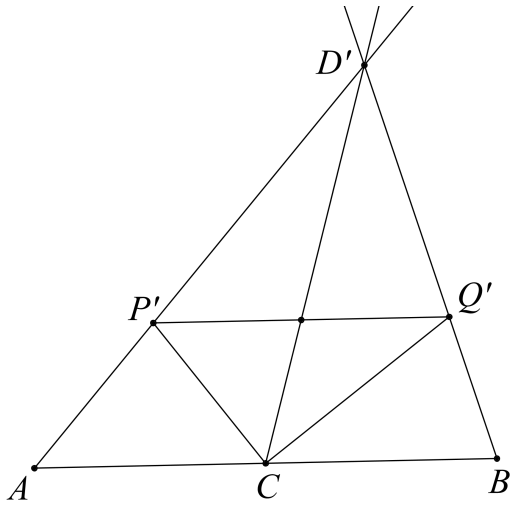
było widać, że punkt D nie musi należeć do odcinka PQ. Mimo to przyjął, że punkt D leży na prostej PQ, bo wynikał z rozumowania pozornie prawdziwego. Uczeń nie dostrzegł błędu w stwierdzeniu *obrazy odcinka AP i BQ pokryją się z odcinkiem PQ.*

Uczeń WA99 postanowił wykorzystać do rozwiązania zadania inwersję względem okręgu o środku w punkcie C i promieniu AC.

Następnie stwierdził, że obrazem prostej PQ w tej inwersji będzie okrąg opisany na trójkącie $CP'Q'$ oraz $PD = PQ$ *z najmocniejszego twierdzenia geometrii.* Uczeń przyjął, że okrąg ów będzie styczny do prostych BD' i AD'. Wykorzystując twierdzenie o dwusiecznej zapisał, że

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AP}{PD} \quad \text{i} \quad \frac{BC}{CD} = \frac{BQ}{QD}.$$

Wykorzystując fałszywą równość $PD = PQ$ otrzymał $AP = BQ$.



Stąd uczeń wywnioskował, że trójkąt $AD'B$ jest równoramienny, więc $PQ \parallel AB$. Na tej podstawie pisał, że okrąg opisany na trójkącie $CP'Q'$ jest prostopadły do prostej CD', a zatem że proste CD i PQ są prostopadłe.
Widoczna jest dobra znajomość własności inwersji (uczeń powoływał się na konforemność inwersji), ale błąd wynikający z odczytania zbyt sugestywnego rysunku spowodował, że uczeń otrzymał za przedstawione rozwiązanie 0 punktów.
Uczeń WA99 nie dostał się do finału, gdyż otrzymał tylko 6 punktów w II etapie. Zawodnik był uczniem II klasy w XIV LO w Warszawie.

Charakterystyczny typ błędu pojawił się w okręgu lubelskim. Bardzo wielu uczniów konstruowało okrąg opisany na trójkącie PQC i twierdziło, że jest on styczny do prostej AB. Tak w istocie jest, chociaż prawie wszyscy zawodnicy odczytywali tę własność z rysunku i nie dowodzili jej.
Tak postąpili uczniowie: LU60, LU31, LU52, LU73, LU14, LU34, LU45.
Także dwóch uczniów z Warszawy: WA23, WA85 popełniło ten sam błąd.

Błędy wynikające z słabej znajomości geometrii płaskiej

Uczniowie popełniają częstokroć błędy, które dobremu uczniowi liceum nie powinny się zdarzyć. Tym bardziej nie powinny się zdarzyć olimpijczykowi. Poniżej prezentuję prawie wszystkie tego typu błędy, jakie pojawiły się w rozwiązaniach zadania 5.

Uczeń KR31 stwierdził:
Ponieważ czworokąt $DCBQ$ jest wpisany w okrąg, więc mogę zapisać dla niego twierdzenie Ptolemeusza: $CQ \cdot BD = CD \cdot BQ + DQ \cdot CB = DQ(CD + CB) = DQ(CD + AC)$, bo $BQ = DQ$ i $CB = AC$. Analogicznie dla czworokąta $APDC$: $AD \cdot PC = PD(AC + DC)$. Ponieważ $CQ \cdot BD = AD \cdot PC$, więc $DQ(CD + AC) = PD(AC + DC)$ a stąd $DQ = PD$.

Komentarz.

Uczeń powołał się na równość $CQ \cdot BD = AD \cdot PC$, której nie uzasadnił i która jest nieprawdziwa. Błąd powstał najprawdopodobniej na podstawie obserwacji rysunku uczynionego przez ucznia. Uczeń narysował dwa okręgi o promieniach podobnej długości i równość wyglądała na prawdopodobną. Gdyby zawodnik umiał sobie wyobrazić dwa okręgi o znacząco różnych promieniach, zapewne dostrzegł by nieprawdziwość swojego przypuszczenia. Ponadto uczeń wykorzystał taką równość, która prowadziła go do rozwiązania - na podstawie wymyślonego przez siebie faktu wykazał tezę twierdzenia.

Uczeń KR50 stwierdził, że trójkąty ACP i CPD są podobne i stąd wywnioskował, że $CD = AC$.

Uczeń KR74 przyjął, że skoro prosta CQ jest dwusieczną kąta DCB (co wynika z równości cięciw DQ i BQ), to prosta QC jest także dwusieczną kąta DQB i przecina odcinek DB pod kątem prostym. Dalsze rozumowanie oparte było na tym fakcie.

Uczeń KR50 stwierdził, że jeżeli w trójkącie prostokątnym RCQ (kąt prosty znajduje się w wierzchołku C) zachodzi warunek $HR = HC = HQ$ i punkt H leży na przeciwprostokątnej, to $HC \perp RQ$. Uczeń powołał się na to stwierdzenie w samej końcówce rozwiązania, zatem było to przyjęcie faktu, który był niezbędny do zakończenia dowodu i ma znamiona walki o wynik.

Uczeń KR65 przez W oznaczył punkt przecięcia prostej PQ z odcinkiem CD. Zawodnik nie zastanawiał się, czy prosta PQ i odcinek CD zawsze mają punkt wspólny (a wiadomo, że nie zawsze mają). Następnie napisał:
Niech K będzie punktem przecięcia okręgu o_1 i odcinka PQ, natomiast L punktem przecięcia okręgu o_2 i odcinka PQ.
Z okręgu o_1 i twierdzenia Menelaosa mamy:

$$PW \cdot LW = WD \cdot WC.$$

Z okręgu o_2 i twierdzenia Menelaosa mamy:

$$WD \cdot WC = KW \cdot WQ.$$

Zatem otrzymujemy $WD \cdot WC = KW \cdot WQ = PW \cdot LW$ oraz $\measuredangle PWD = \measuredangle PWC$ ponieważ są oparte na łukach tej samej długości, a więc każdy z nich ma miarę 90°.
Zawodnik nie zastanowił się, czy prosta PQ przecina się z okręgami o_1 i o_2. Zwraca uwagę stosowanie potęgi punktu względem okręgu i nazywanie tego *twierdzeniem Menelaosa* - w rzeczywistości uczeń dowodzi, że osią potęgową dwóch okręgów jest prosta przechodząca przez punkty wspólne tych okręgów. Nie można dociec, w jaki sposób uczeń wywnioskował, że $\measuredangle PWD = \measuredangle PWC$. Najprawdopodobniej błędnie zrozumiał lub przeczytał, które kąty podane w treści zadania są równe.
Zawodnik KR65 był uczniem III klasy i uzyskał w II etapie 0 punktów. To sugeruje, że dostał się do II etapu na podstawie niesamodzielnych rozwiązań zadań I etapu.

Zawodnik WA50 przyjął, że punkt X jest punktem wspólnym prostych CD i PQ. Następnie stwierdził, że $\measuredangle QXB = \measuredangle QCB$ i $\measuredangle AXP = \measuredangle PCA$, bo są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku. Nieświadomie uczeń przyjął, że punkt D należy do odcinka PQ.

Zawodnik WA51 przyjął, że punkt N jest punktem wspólnym prostych CD i PQ. Następnie napisał:

Z twierdzenia Simpsona wynika, że jeżeli punkt P leży na okręgu, to punkty przecięcia prostopadłych z P do boków trójkąta wpisanego w okrąg ACD leżą na jednej prostej.
Tak więc korzystając z odwrotnego Simpsona, jeżeli punkty L, M oraz N leżą na jednej prostej oraz na bokach trójkąta ACD, odcinki PL, PM, PN są prostopadłe do tych boków.

Komentarz.
Rozumowanie nie ma sensu, gdyż uczeń przyjął, że prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do twierdzenia Simpsona. Jest to błąd polegający na uogólnieniu pewnego faktu, poprzez dopisanie równoważności w implikacji. Oznacza to, że nie rozumiał istoty twierdzenia Simpsona i zapewne nie znał dowodu tego twierdzenia.

Uczeń WA46 napisał, że *$\measuredangle O_1DO_2$ jest prosty, gdyż jest to kąt pomiędzy promieniem i styczną do okręgu.* Oznacza to, że uczeń nie znał dosyć oczywistego faktu: promienie okręgów o_1 i o_2 poprowadzone do punktów przecięcia okręgów na ogół nie są odcinkami stycznymi do tychże okręgów; fakt taki ma miejsce tylko wtedy, gdy okręgi są prostopadłe.

Uczeń WA78 założył, że odcinek PC przechodzi przez środek okręgu o_1. Analogiczną obserwację zapisał na temat odcinka QC. Był to efekt narysowania sugestywnego rysunku w szczególnej sytuacji.

Zawodnik LU82 stwierdził, że łuki AC i BC są równej długości, gdyż cięciwy AC i BC są równej długości. Uczeń nie zauważył, że okręgi mogą mieć różne promienie.

Uczeń LU53 stwierdził, że trójkąty ACP i DCP są przystające. Uzasadnił to w ten sposób, że mają wspólny bok PC i $AP = PD$ oraz odpowiednie kąty są przystające - zawodnik nie zauważył, że kąty ACP i DCP nie są odpowiednie.

Uczeń ŁÓ30 napisał:
Ponieważ na czworokącie $ACDP$ można opisać okrąg, to $PD + AC = AP + DC$. Podobną zależność wykorzystał w odniesieniu do jeszcze innych trzech czworokątów. W przypadku olimpijczyka tego typu błąd nie powinien wystąpić, gdyż twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg jest podstawowym twierdzeniem geometrycznym z repertuaru olimpijskiego: znaczna liczba zadań olimpijskich jest rozwiązywana za pomocą tego twierdzenia

Brak wykorzystania założenia

Wśród zaprezentowanych przez uczniów rozwiązań zadania 5 pojawiło się 46 rozwiązań, których autorzy byli przekonani, że rozwiązali zadanie, a jednocześnie w trakcie dowodu nie wykorzystali założenia; najczęściej zawodnicy nie wykorzystywali założenia $AC = BC$. Założenie o równości odcinków PA i PD oraz QD i QB na ogół było wykorzystywane, bo dotyczyło równości odpowiednich kątów; teza dotyczyła miary kąta, zatem naturalne było skorzystanie z danych mówiących o kątach. Natomiast założenie $AC = BC$ nie miało bezpośredniego przełożenia na miary kątów, zatem „umykało" uwadze uczniów.
Brak wykorzystywania założenia świadczy o braku kontroli nad rozwiązaniem, o braku sprawdzenia rozwiązania. Niekiedy świadczyć może o desperacji zawodnika i nadziei na zdobycie chociaż dwóch punktów za częściowe rozwiązanie.

Poniżej prezentuję przykład takiego rozumowania, w którym uczeń nie wykorzystał założenia.

Uczeń WA21 zrzutował punkty O_1 i O_2 na prostą PQ i otrzymał punkty, odpowiednio, E i F. Następnie stwierdził: *Więc O_1E i O_2F są do siebie równoległe, a zarazem prostopadłe do prostej PQ. W takim razie odcinek EF jest równy odcinkowi O_1O_2. Czyli odcinek O_1O_2 jest równoległy do prostej PQ.*

Komentarz.
Uczeń w trakcie rozwiązania nigdzie nie wykorzystał założeń dotyczących położenia punktów P i Q. Jego wniosek dotyczących długości odcinka EF był niezgodny nawet z precyzyjnymi rysunkami, które uczeń zamieścił w brudnopisie.

Szczególny przypadek

24 uczniów rozwiązało zadanie, bazując na przeświadczeniu, że punkt D leży na odcinku PQ. Rozumowanie w takim przypadku jest proste i szybko prowadzi do tezy. Przyjmowanie takiego dodatkowego założenia najczęściej wynikało z sugestywnego rysunku. Charakterystyczne jest także to, że uczniowie wykonywali odręczne rysunki i nie analizowali rysunków przy różnych promieniach okręgów.

Uczeń KR74 przyjął, że skoro prosta CQ jest dwusieczną kąta DCB (co wynika z równości cięciw DQ i BQ), to prosta QC jest także dwusieczną kąta DQB i przecina odcinek DB pod kątem prostym. Dalsze rozumowanie oparte było na tym fakcie.
Z kolei uczeń GD31 założył, że środek okręgu o_1 należy do odcinka AB.
Uczeń KA95 założył, że odcinek CQ jest średnicą okręgu o_2.

Założenie tezy

Osiemnastu uczniów przedstawiło rozwiązania, w których wykorzystało obserwacje z rysunku lub dodatkowe założenia, które były równoważne tezie.

Uczeń KR60 sprawnie wykazał, że: $\measuredangle ACP = \measuredangle PCD$ oraz $\measuredangle DCQ = \measuredangle QCB$, $PA = PD$ oraz $DQ = QB$, $\measuredangle PCQ = 90^\circ$. Następnie rozwiązujący dokonał obrotu dookoła punktu Q o kąt DCA. W efekcie otrzymał, że obrazem punktu D jest punkt B, a obrazem punktu P - punkt P'. Uczeń przyjął, że punkty P', C, P są współliniowe, co jest równoważne tezie.
Można powiedzieć, że uczeń stosował metodę redukcyjno-dedukcyjną, ale próby te były nieskuteczne, gdyż nie dostrzegł powiązania pomiędzy warunkiem równoważnym tezie i wnioskami z założeń. Nie widać także, w jaki sposób można tę lukę wypełnić.

Uczeń KR43 stwierdził, że $PQ \parallel O_1O_2$, gdyż założył, że obrazem punktu P w symetrii względem środka okręgu o_1 jest punkt C.

Uczeń KR14 napisał:
$\measuredangle DCQ = \measuredangle QCB = \alpha$
Analogicznie $\measuredangle ACP = \measuredangle PCD = 90^\circ - \alpha$.
Czyli $\measuredangle PCQ = 90^\circ$.
Ponieważ $\triangle POC \sim \triangle COQ$ *mamy:*
$\measuredangle CPO = \alpha$ *oraz* $\measuredangle CQO = 90^\circ - \alpha$, *więc* $\measuredangle COQ = 90^\circ$, *czyli* $CD \perp PQ$ *c.n.d*

Komentarz.
Zauważmy, że uczeń najpierw przyjął, że kąt PCQ jest prosty, a następnie stwierdził, że to uzasadnił. Ponadto stwierdził, że trójkąty POC i COQ są podobne, chociaż wynikało to z faktu $CD \perp PQ$. Świadczy to o braku kontroli nad rozwiązaniem lub próbie napisania czegokolwiek, co mogłoby uchodzić za dowód (a więc był to rodzaj blefu).
Zawodnik był uczniem klasy III i rozwiązał w II etapie tylko zadanie 3.

Uczeń KR64 przez X oznaczył punkt przecięcia prostej CD z prostą PQ, przez Y - rzut prostokątny punktu P na prostą AB, a przez Z - rzut prostokątny punktu Q na prostą AB. Następnie stwierdził, że $CX = YC$ i $CX = CZ$. Równości te są równoważne tezie.

Uczeń KR56 zaznaczył na prostej CD punkt D', który był obrazem punktu D w symetrii względem prostej PQ. Obraz punktu D w symetrii względem prostej PQ leży na prostej CD wtedy i tylko wtedy, gdy prosta CD jest prostopadła do prostej PQ.

Uczeń GD12 założył, że jeżeli punkty J_1 i J_2 są rzutami środków danych okręgów O_1 i O_2 na prostą AB, to $J_1O_1 = J_2O_2$, skąd już bardzo łatwo udowodnił tezę.

Uczeń KA31 napisał:
Zastosujemy symetrię osiową względem prostej O_1O_2. Punkt P przejdzie w P', a Q w Q'. Nietrudno zauważyć, że czworokąt $PP'R'R$ jest prostokątem.
Uczeń z rysunku odczytał, że czworokąt $PP'Q'Q$ jest prostokątem (co błędnie opisał używając oznaczenia $PP'R'R$), ale nie zastanowił się, że fakt ten nie jest w istocie równoważny tezie.

Uczeń KA75 przyjął założenie, że odcinek PC przecina odcinek AD pod kątem prostym (narysowany przez niego rysunek to sugerował).

Rozwiązania kuriozalne

Uczeń KR55 wprowadził na niechlujnym rysunku bardzo dużo oznaczeń, ale nigdzie ich nie opisał. Następnie zapisał swój pomysł na rozwiązanie, ale wobec braku definicji oznaczeń niemożliwe było zweryfikowanie tego rozwiązania.

Zawodnik WA12 przyjął, że punkt L jest punktem wspólnym prostych CD i PQ. Po serii porównań kątów (nic nie wnoszących do dowodu) napisał: *Trójkąt LKD jest podobny do PCQ, czyli $\measuredangle CLK = 90^\circ$, co kończy dowód.* Oceniający opisał to następująco: *Szpetny, prymitywny i głupi bluff. Nie tylko z sufitu, ale w ogóle nieprawda.*

Uczeń WA59 próbował udowodnić tezę nie wprost. Przyjął zatem, że prosta PQ przecina prostą O_1O_2 w punkcie X. Przyjął oznaczenia $\measuredangle APO_1 = \alpha_1, \measuredangle O_1PD = \alpha_2, \measuredangle BQO_2\beta_1, \measuredangle O_2QD = \beta_2$. Następnie napisał:
Wraz ze wzrostem odległości O_2X miara kąta α_2 maleje, podobnie ze wzrostem odległości O_2X rośnie miara kąta β_2. W przypadku granicznym $O_2X \to \infty$. Suma $\alpha_1 + \alpha_2$ pozostaje stała niezależnie od O_2X, podobnie suma $\beta_1 + \beta_2$. W przypadku granicznym $\alpha_1 = \alpha_2$ i $\beta_1 = \beta_2$, co jest zgodne z założeniami zadania. Ponieważ $O_2X \to \infty$, $PQ \parallel O_1O_2$.

Komentarz.
W tym krótkim tekście pojawił się szereg stwierdzeń, których związek z zadaniem jest wątły. Nie wiadomo na jakiej podstawie uczeń twierdził, że miara kątów $\alpha_1 + \alpha_2$ i $\beta_1 + \beta_2$ jest stała. Trudno też ustalić, jaki związek z tezą ma rozważanie przypadków granicznych.

Uczeń PO10 napisał:
Przeprowadźmy jednokładność względem punktu przecięcia PQ i CD, proste przechodzą w siebie, a $O_1O_2O_1'O_2'$ tworzą równoległobok.

Komentarz.
Przedstawiony powyżej pełny zapis w pracy ucznia PO10 pokazuje, ze uczeń nie próbował nawet zapisać rozwiązania: nie zdefiniował punktów O_1' i O_2', więc trudno odnieść się do stwierdzenia, że czworokąt $O_1O_2O_1'O_2'$ jest równoległobokiem.

3.2.3 Statystyka błędów

W poniższych tabelach wymieniłem, ile błędów popełniali uczniowie z poszczególnych kategorii. Postanowiliśmy podać także, jakie oceny uzyskali uczniowie (również 6, aby można było dokonywać porównań) oraz ile było prac.

Na podstawie tabel 52, 53, 54 można stwierdzić, że zadanie okazało się trudne: tylko 49 uczniów umiało je rozwiązać. Najwięcej poprawnych rozwiązań pojawiło się w okręgach: warszawskim (19), krakowskim (6), toruńskim (5). Najgorzej zaprezentowali się uczniowie z okręgu łódzkiego i poznańskiego (brak rozwiązań poprawnych) oraz wrocławskiego (1 rozwiązanie poprawne). Charakterystyczne jest także to, że w okręgach łódzkim i poznańskim żaden uczeń nie uzyskał wyższej oceny niż 2 punkty oraz żaden uczeń okręgu łódzkiego nawet nie miał pomysłu na dobrą strategię.
W całej Polsce 37,3% uczniów oddało czyste prace. Najwięcej prac bez żadnych notatek oddali uczniowie z okręgu łódzkiego (50%), a najmniej uczniowie z okręgów lubelskiego (30%), krakowskiego (28,6%).
85,7% uczniów z okręgu krakowskiego i 83,5% uczniów z okręgu warszawskiego oddało prace ocenione na 0 punktów.
Błędy powierzchownej wiedzy częściej pojawiły się u uczniów z okręgów: wrocławskiego (11,9%), a najrzadziej u uczniów okręgów szczecińskiego (0%) i poznańskiego (0%).
Błędy walki o wynik pojawiały się wyjątkowo często w okręgu poznańskim (30%) i łódzkim (23,5%).
Błędy świadome, czyli blefy pojawiały się wyraźnie częściej w okręgu łódzkim (14,7%), gdańskim (14,3%) i wrocławskim (13,6%).
Błędne strategie, które nie mogły przynieść sukcesu, wyraźnie częściej pojawiały się u uczniów z okręgów: łódzkiego (44,1%), poznańskiego (43,5%) i wrocławskiego (37,3%).
Wśród autorów niepustych prac, 25% uczniów z okręgu warszawskiego rozwiązało poprawnie zadanie.
Wśród uczniów, którzy oddali niepuste prace, aż 29,4% zawodników z okręgu łódzkiego i 23,5% zawodników z okręgów gdańskiego i wrocławskiego blefowało.
Wśród uczniów, którzy oddali niepuste prace, aż 88,2% z okręgu łódzkiego, 64,7% z okręgu wrocławskiego i 62,5% z okręgu poznańskiego wykorzystywało błędne strategie.
Dobre strategie, które nie przyniosły jednak sukcesu, pojawiły się u 4 uczniów z okręgu krakowskiego i 4 z okręgu lubelskiego.

Okręg	*u*	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gdański	28	11	5	26	0	0	2	1	0	5	4	7	2
katowicki	62	27	13	57	0	2	3	3	1	5	7	14	1
krakowski	63	18	13	54	3	1	5	4	4	7	9	21	4
lubelski	60	18	16	55	2	2	1	4	1	10	1	18	4
łódzki	34	17	2	34	0	0	0	2	1	8	5	15	0
poznański	23	7	5	23	0	0	0	0	1	7	1	10	1
szczeciński	46	15	11	41	0	0	5	0	2	8	2	13	2
toruński	64	26	16	56	0	2	6	3	2	6	4	14	0
warszawski	121	45	28	101	1	1	18	8	5	6	9	22	4
wrocławski	59	25	11	58	0	0	1	7	8	3	8	22	0
Polska	560	209	120	505	6	8	41	33	25	65	50	156	18

Tabela 52: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 - wielkości w liczbach bezwzględnych.**

Okręg	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gdański	39,3	17,9	92,9	0	0	7,1	3,6	0	17,9	14,3	25,0	7,1
katowicki	43,5	21,0	91,9	0	3,2	4,8	4,8	1,6	8,1	11,3	22,6	1,6
krakowski	28,6	20,6	85,7	4,8	1,6	7,9	6,3	6,3	11,1	14,3	33,3	6,3
lubelski	30,0	26,7	91,7	3,3	3,3	1,7	6,7	1,7	16,7	1,7	30,0	6,7
łódzki	50,0	5,9	100	0	0	0	5,9	2,9	23,5	14,7	44,1	0
poznański	30,4	21,7	100	0	0	0	0	4,3	30,4	4,3	43,5	4,3
szczeciński	32,6	23,9	89,1	0	0	10,9	0	4,3	17,4	4,3	28,3	4,3
toruński	40,6	25,0	87,5	0	3,1	9,4	4,7	3,1	9,4	6,3	21,9	0
warszawski	37,2	23,1	83,5	0,8	0,8	14,9	6,6	4,1	5,0	7,4	18,2	3,3
wrocławski	42,4	18,6	98,3	0	0	1,7	11,9	13,6	5,1	13,6	37,3	0
Polska	37,3	21,4	90	1,1	1,4	7,3	5,9	4,5	11,6	8,9	27,9	3,2

Tabela 53: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich prac.**

Okręg	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gdański	29,4	88,2	0	0	11,8	5,9	0	29,4	23,5	41,2	11,8
katowicki	37,1	85,7	0	5,7	8,6	8,6	2,9	14,3	20,0	40,0	2,9
krakowski	28,9	80,0	6,7	2,2	11,1	8,9	8,9	15,6	20,0	46,7	8,9
lubelski	38,1	88,1	4,8	4,8	2,4	9,5	2,4	23,8	2,4	42,9	9,5
łódzki	11,8	100	0	0	0	11,8	5,9	47,1	29,4	88,2	0
poznański	31,3	100	0	0	0	0	6,3	43,8	6,3	62,5	6,3
szczeciński	42,1	83,9	0	0	16,1	0	6,5	25,8	6,5	41,9	6,5
toruński	42,1	78,9	0	5,3	15,8	7,9	5,3	15,8	10,5	36,8	0
warszawski	36,8	73,7	1,3	1,3	23,7	10,5	6,6	7,9	11,8	28,9	5,3
wrocławski	32,4	97,1	0	0	2,9	20,6	23,5	8,8	23,5	64,7	0
Polska	34,2	84,3	1,7	2,3	11,7	9,4	7,1	18,5	14,2	44,4	5,1

Tabela 54: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich niepustych prac.**

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
A	125	42	18	81	3	5	36	6	4	4	8	12	6
B	435	167	138	424	3	3	5	27	21	61	42	144	12
Polska	560	209	120	505	6	8	41	33	25	65	50	156	18

Tabela 55: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 - zależność od tego, czy przeszli do III etapu.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
A	33,6	14,4	64,8	2,4	4,0	28,8	4,8	3,2	3,2	6,4	9,6	4,8
B	38,4	31,7	97,5	0,7	0,7	1,1	6,2	4,8	14,0	9,7	33,1	2,8
Polska	37,3	21,4	90,2	1,1	1,4	7,3	5,9	4,5	11,6	8,9	27,9	3,2

Tabela 56: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu - wielkości wyrażone w procentach.**

Na podstawie tabeli 55 i 56 można zauważyć, ośmiu uczniów, którzy rozwiązali poprawnie zadanie 5.2.57, nie weszło do finału. Stanowi to 16% wszystkich uczniów, którzy rozwiązali poprawnie to zadanie.
Znacznie częściej błędy walki o wynik popełniali uczniowie, którzy nie weszli do finału.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
dziewczęta	73	16	20	67	1	1	4	3	3	14	8	28	4
chłopcy	487	193	100	438	5	7	37	30	22	51	42	128	14
Polska	560	209	120	505	6	8	41	33	25	65	50	156	18

Tabela 57: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 w zależności od płci.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
dziewczęta	21,9	27,4	91,8	1,4	1,4	5,5	4,1	4,1	19,2	11,0	38,4	5,5
chłopcy	39,6	20,5	89,9	1,0	1,4	7,6	6,2	4,5	10,5	8,6	26,3	2,9
Polska	37,3	21,4	90,2	1,1	1,4	7,3	5,9	4,5	11,6	8,9	27,9	3,2

Tabela 58: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 w zależności od płci - wielkości wyrażone w procentach.**

Na podstawie tabel 57 i 58 można stwierdzić, że 39,6% chłopców i 21,9% dziewcząt oddało puste prace. Jednak prace puste i prace bez strategii stanowią 49% prac dziewcząt i 60% prac chłopców. Bardzo zbliżony był procent uczniów i uczennic, którzy otrzymali 0 punktów (około 90%).
Więcej uczennic niż uczniów otrzymało 2 punkty lub miało dobrą strategię (która mogła doprowadzić do rozwiązania), ale więcej więcej uczniów niż uczennic rozwiązało zadanie.
Wyraźnie dostrzegalne jest, że błędy walki o wynik i blefy częściej występowały u dziewcząt niż u chłopców.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gimnazjum	13	4	5	13	0	0	0	1	0	2	1	3	1
klasa I	76	36	8	68	2	2	4	5	4	9	7	22	1
klasa II	193	67	41	172	1	1	19	15	6	24	19	62	4
klasa III	278	102	66	252	3	5	18	12	15	30	23	69	12
Polska	560	209	120	505	6	8	41	33	25	65	50	156	18

Tabela 59: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 w zależności od klasy, do jakiej uczęszczał uczestnik.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gimnazjum	30,8	38,5	100	0	0	0	7,7	0	15,4	7,7	23,1	7,7
klasa I	47,4	10,5	89,5	2,6	2,6	5,3	6,6	5,3	11,8	9,2	28,9	1,3
klasa II	34,7	21,2	89,1	0,5	0,5	9,8	7,8	3,1	12,4	9,8	32,1	2,1
klasa III	36,7	23,7	90,6	1,1	1,8	6,5	4,3	5,4	10,8	8,3	24,8	4,3
Polska	37,3	21,4	90,2	1,1	1,4	7,3	5,9	4,5	11,6	8,9	27,9	3,2

Tabela 60: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 w zależności od klasy, do której uczęszczał zawodnik - wielkości wyrażone w procentach.**

Na podstawie tabel 59 i 60 można dostrzec, że najwięcej pustych prac oddawali uczniowie klas I (47,4%), a najmniej uczniowie klas II (34,7%).
W każdej z klas I, II, III około 90% uczniów uzyskało 0 punktów.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
a	22	6	5	22	0	0	0	4	5	1	3	11	0
b	19	10	2	17	0	0	2	1	0	3	1	4	1
c	16	6	4	14	0	0	2	1	1	1	1	4	0
d	40	13	7	32	3	1	4	2	3	1	8	12	3
e	19	4	6	16	0	0	3	0	0	4	1	5	1
f	24	14	3	24	0	0	0	2	1	2	3	7	0
g	56	19	8	42	0	1	13	4	1	2	4	11	3
h	196	72	35	167	3	2	24	14	11	14	21	54	8
Polska	560	209	120	505	6	8	41	33	25	65	50	156	18

Tabela 61: **Błędy popełniane przez uczniów z wybranych szkół w zadaniu 5.2.57.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
a	27,3	22,7	100	0	0	0	18,2	22,7	4,5	13,6	50,0	0
b	52,6	10,5	89,5	0	0	10,5	5,3	0	15,8	5,3	21,1	5,3
c	37,5	25,0	87,5	0	0	12,5	6,3	6,3	6,3	6,3	25,0	0
d	32,5	17,5	80,0	7,5	2,5	10,0	5,0	7,5	2,5	20,0	30,0	7,5
e	21,1	31,6	84,2	0	0	15,8	0	0	21,1	5,3	26,3	5,3
f	58,3	12,5	100	0	0	0	8,3	4,2	8,3	12,5	29,2	0
g	33,9	14,3	75,0	0	1,8	23,2	7,1	1,8	3,6	7,1	19,6	5,4
h	36,7	17,9	85,2	1,5	1,0	12,2	7,1	5,6	7,1	10,7	27,6	4,1
Polska	37,3	21,4	90,2	1,1	1,4	7,3	5,9	4,5	11,6	8,9	27,9	3,2

Tabela 62: **Błędy popełniane przez uczniów z wybranych szkół w zadaniu 5.2.57 - wielkości wyrażone w procentach.**

Na podstawie tabel 61 i 62 można stwierdzić, że:
procent pustych prac uczniów z III LO w Gdyni (52,6%) i XIV LO w Wrocławiu (58,3%) był znacząco wyższy, niż w innych wybranych szkołach oraz w całej Polsce.
Charakterystyczne jest, że w obydwu badanych szkołach wrocławskich żaden uczeń nie rozwiązał tego zadania. Aż 25% uczniów XIV LO w Warszawie rozwiązało poprawnie zadanie.
Uczniowie z wybranych szkół uzyskali nieco lepsze wyniki w trakcie rozwiązywania zadania niż uczniowie z całej Polski.
Wyraźnie więcej niż w pozostałych wybranych szkołach błędów powierzchownej wiedzy (18,2%) i błędów wynikających ze zmęczenia intelektualnego popełnili uczniowie III LO w Wrocławiu.
Wyraźnie więcej błędów walki o wynik było w pracach uczniów III LO w Gdyni (15,8%) i XIII LO w Szczecinie (21,1%).
Największą liczbę blefów popełnili uczniowie z V LO w Krakowie.
Połowa uczniów III LO w Wrocławiu przedstawiło błędne strategie.

Wśród uczestników II etapu 57 OM ponad 76% zawodników, którzy podali, że rozwiązali zadanie, faktycznie go nie rozwiązało (tabela 63). Wszyscy uczniowie z okręgów poznańskiego i łódzkiego byli bezpodstawnie przekonani, że rozwiązali zadanie. Najbardziej pozytywnie wypadli uczniowie z okręgu warszawskiego i toruńskiego, w których tylko około 60% z nich błędnie oceniło swoje rozwiązanie.

Dziewczęta (84%) częściej niż chłopcy (75%) były bezpodstawnie przekonane o popraw-

	x	y	$\frac{x}{y}$
Polska	157	206	0,76
okręg gdański	9	11	0,82
okręg katowicki	15	20	0,75
okręg krakowski	22	28	0,79
okręg lubelski	19	22	0,86
okręg łódzki	16	16	1
okręg poznański	10	10	1
okręg szczeciński	10	15	0,67
okręg toruński	13	21	0,62
okręg warszawski	27	46	0,59
okręg wrocławski	16	17	0,94
dziewczęta	26	31	0,84
chłopcy	131	175	0,75
gimnazjum	4	4	1
klasa I	20	26	0,77
klasa II	57	77	0,74
klasa III	76	99	0,77
a	7	7	1
b	4	6	0,67
c	4	6	0,67
d	13	18	0,72
e	2	5	0,4
f	5	5	1
g	13	27	0,48

Tabela 63: **Jak wielu uczniów jest przekonanych, że zrobiło zadanie 5.2.57.**

ności swojego rozumowania.

Wszyscy uczniowie III LO w Wrocławiu i XIV LO w Wrocławiu mylili się w ocenie swojego rozwiązania. 60% uczniów XIII LO w Szczecinie i 52% uczniów XIV LO w Warszawie prawidłowo oceniło swoje rozwiązanie.

3.3 Zadanie 3 z III etapu 57 OM

3.3.1 Treść i rozwiązania zadania

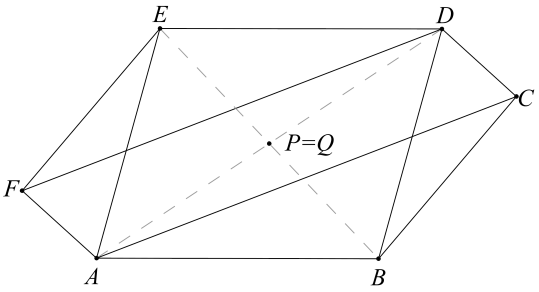
Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF, CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania

Sposób 1

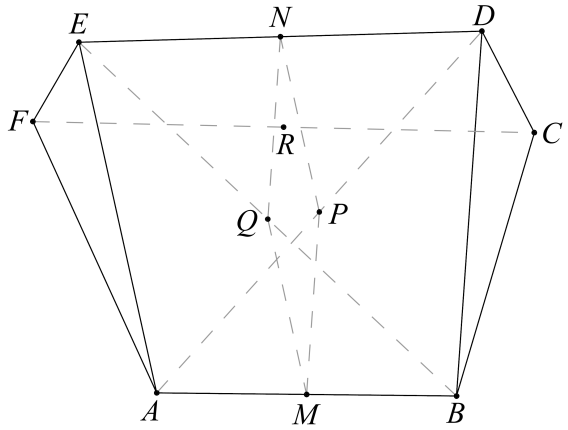
Pomysł rozwiązania zaproponowanego przez organizatorów opiera się na obserwacji zachowania środków głównych przekątnych. To umożliwia dostrzeżenie (z wykorzystaniem twierdzenia Talesa) bezpośrednich związków między przekątnymi sześciokąta o równych długościach. Pomysł zaproponowany w tym sposobie jest nieco sztuczny, trudno dostrzegalny; świadczy o tym fakt, że zastosował go tylko jeden zawodnik WA67, uczeń I klasy w XIV LO w Warszawie.

Oznaczmy przez P, Q, R odpowiednio środki przekątnych AD, BE, CF. Przyjmijmy najpierw, że dwa spośród punktów P, Q, R pokrywają się; niech na przykład $P = Q$.
Wtedy czworokąt $ABDE$ jest równoległobokiem. Ponadto trójkąt ACE jest przystający do trójkąta DFB, skąd wynika, że $\measuredangle EAC = \measuredangle BDF$. Równość ta wraz z uzyskaną zależnością $BD \parallel EA$ dowodzi, że odcinki AC i DF są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, a zatem czworokąt $ACDF$ jest równoległobokiem. Punkt R pokrywa się więc z punktami P i Q, skąd wynika, że jest on środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$.



Pozostaje zauważyć, że wówczas proste łączące środki przeciwległych boków sześciokąta $ABCDEF$ przechodzą przez jego środek symetrii.

Przyjmijmy z kolei, że punkty P, Q i R są różne. Niech M i N będą odpowiednio środkami odcinków AB i DE. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że odcinki PN i AE są równoległe, a ponadto $PN = \frac{1}{2}AE$. Analogicznie uzyskujemy związki $QM = \frac{1}{2}AE$, $PM = \frac{1}{2}BD$ oraz $QN = \frac{1}{2}BD$.
Z zależności tych oraz z równości $AE = BD$ wnioskujemy, że $PN = QM = PM = QN$, co oznacza, że czworokąt $MPNQ$ jest rombem. Zatem prosta MN jest symetralną odcinka PQ. Analogicznie dowodzimy, że pozostałe dwie proste łączące środki przeciwległych boków danego sześciokąta są symetralnymi odcinków QR i RP.



Stąd proste łączące środki przeciwległych boków sześciokąta $ABCDEF$ mają punkt wspólny, będący środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQR.

□

Komentarz.
Rozwiązanie firmowe zaprezentował uczeń I klasy w XIV LO w Warszawie WA67.
Zasadnicza trudność polega na konstrukcji nowych obiektów: środków głównych przekątnych i odcinków je łączących. Wśród 125 uczestników finału, poza uczniem WA67, nikt nie wskazał tego typu obiektów.

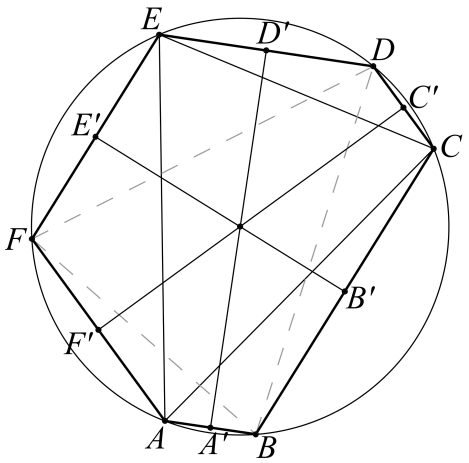
Sposób 2

Rozwiązanie opiera się na wykorzystaniu szczególnego przypadku, gdy sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg. Dowód w tym szczególnym przypadku jest łatwy. Następnym krokiem jest wykazanie, że przesunięcie równoległe trójkąta np. ACE nie zmienia własności przecinania się odpowiednich prostych.
Poniżej prezentujemy rozwiązanie ucznia WA63.

Trójkąt ACE jest przystający do trójkąta DFB. Rozważmy przypadki.

Przypadek 1

Przyjmijmy, że trójkąty ACE i DFB są wpisane w ten sam okrąg o środku S. Wówczas z równości $AE = BD$ wynika, że $AB \parallel ED$. A zatem prosta łącząca środki odcinków AB i ED przechodzi przez punkt S. Analogicznie pokazujemy, że proste łączące środki odcinków BC i EF oraz CD i FA przechodzą przez punkt S.



Przypadek 2

Niech S_1 będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ACE, S_2 - środkiem okręgu opisanego na trójkącie DFB i $S_1 \neq S_2$. Niech A', B', C', D', E', F' będą środkami boków, odpowiednio, AB, BC, CD, DE, EF, FA. W translacji o wektor $\overrightarrow{S_2S_1}$ obrazem trójkąta DFB jest trójkąt GHJ. Trójkąty ACE i GHJ są wpisane w ten sam okrąg o środku S_1. Punkty $A'', B'', C'', D'', E'', F''$ są środkami boków, odpowiednio, AJ, JC, CG, GE, EH, HA. Wówczas

$$\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{C'C''} = \overrightarrow{D'D''} = \overrightarrow{E'E''} = \overrightarrow{F'F''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{S_2S_1}.$$

Ponieważ punktem przecięcia prostych $A''D''$, $B''E''$ i $C''F''$ jest punkt S_1, więc punktem przecięcia prostych $A'D'$, $B'E'$ i $C'F'$ jest środek odcinka S_1S_2.

□

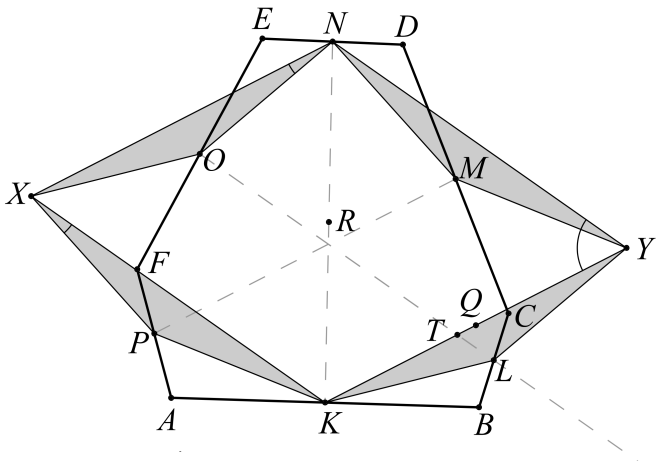
Komentarz.
Sposób 2 w swoich pracach zaprezentowali uczniowie: GD12, SZ11, SZ40, WA63, GD90, WA68, TO85. Także uczeń KA33 zauważył, że przesunięcie trójkąta BDF o wektor zachowuje przecinanie się w jednym punkcie odcinków łączących środki przeciwległych boków sześciokąta, ale

nie skojarzył tego z wykazaniem tego w szczególnym przypadku, gdy sześciokąt jest wpisany w okrąg.
Pomysł można uznać za naturalny, gdyż najwięcej rozwiązań tego typu pojawiło się na finale 57 OM. Strategia rozważania szczególnego przypadku przynosiła dobry efekt. Ważny był dobór tego przypadku: uczniowie, którzy rozważali jako szczególny przypadek sześciokąt, w którym dane w zadaniu równe przekątne były parami do siebie równoległe, mieli istotny kłopot z przeniesieniem własności przecinania się odpowiednich odcinków na sytuację ogólną.

Sposób 3

Rozwiązanie, zaprezentowane przez ucznia KR04, wykorzystuje przystawanie trójkątów, rachunek na kątach i wektorach.

Oznaczmy środki odcinków AB, BC, CD, DE, EF, FA odpowiednio przez K, L, M, N, O, P.



Odcinek KL łączy środki boków trójkąta ABC, a więc jest równoległy i równy połowie boku AC: $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Analogicznie:

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{NO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FB}.$$

Widać, że

$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}\right) = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB}\right) = \overrightarrow{0}.$$

Wobec tego

$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LM} + \left(-\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{PO}.$$

Analogicznie

$$\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{KP},$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{LK}.$$

Zatem

$$\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{0}.$$

Niech

$$\overrightarrow{KX} = \overrightarrow{LO} \qquad i \qquad \overrightarrow{KY} = \overrightarrow{PM}.$$

Wtedy

$$\overrightarrow{NX} = \overrightarrow{MP} \qquad i \qquad \overrightarrow{NY} = \overrightarrow{OL}.$$

Z odpowiednich równości wektorów wynika, że $KXNY$, $KPMY$, $PMNX$, $KLOX$, $LONY$ to równoległoboki. Mamy więc:

$$\cos(\measuredangle LYM) = \frac{MY^2 + LY^2 - LM^2}{MY \cdot LY} = \frac{PK^2 + NO^2 - LM^2}{PK \cdot NO}.$$

Ponieważ

$$PK = \frac{1}{2}FB = \frac{1}{2}CE = MN, NO = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}AC = KL, LM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}EA = OP,$$

zatem

$$\cos(\measuredangle LYM) = \frac{MN^2 + KL^2 - PO^2}{MN \cdot KL} = \frac{PX^2 + XO^2 - PO^2}{PX \cdot XO} = \cos(\measuredangle PXO).$$

Funkcja cosinus w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$ jest różnowartościowa, czyli $\measuredangle LYM = \measuredangle PXO$.
Ale $MN = PK = MY, NO = KL = OX$, czyli trójkąty MNY i ONX są równoramienne.
Ponadto $\triangle PKX \equiv \triangle MYN$, bo to przystawanie jest przesunięciem o wektor $\overrightarrow{PM}$; analogicznie $\triangle KLY \equiv \triangle XON$.
Niech $\measuredangle XNO = \alpha, \measuredangle KXP = \beta, \measuredangle KYN = \gamma$.
Równość kątów $\measuredangle LYM = \measuredangle PXO$ zapiszemy jako $\gamma + \alpha - \beta = \gamma - \alpha + \beta$, czyli $\alpha = \beta$ i $\triangle MNY \sim \triangle ONX$.
Niech $S_1 = KN \cap LO, S_2 = KN \cap MP$, punkt Q będzie rzutem prostokątnym punktu L na prostą KY, punkt R - środkiem odcinka KN, $T = KY \cap LO$. Wtedy

$$KS_1 = \frac{KR \cdot KT}{KQ} = \frac{KN}{KY}(KQ - QT) = \frac{KN}{KY}(KQ - LQ \operatorname{ctg}\gamma)$$

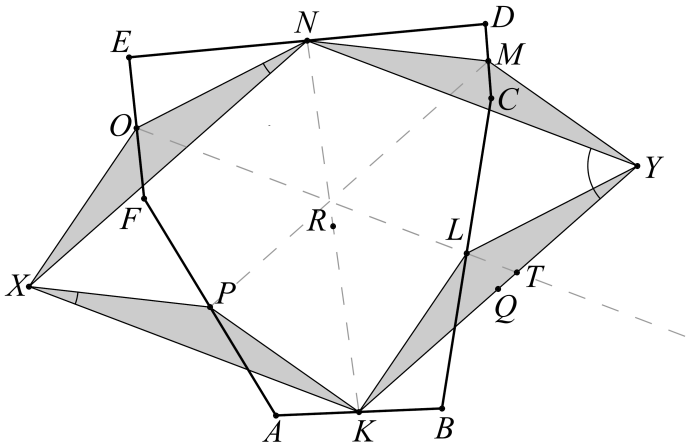
$$= KN\left(\frac{KQ}{KY} - \frac{LQ}{KY}\operatorname{ctg}\gamma\right) = KN\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma\right).$$

Analogicznie

$$KS_2 = KN\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma\right),$$

czyli $S_1 = S_2$, co należało pokazać.
Uwagi:
Jeśli L, X, N są w tej samej półpłaszczyźnie o krawędzi KY, to mamy $\gamma - \alpha - \beta = \gamma + \alpha + \beta$, $\alpha + \beta = 0, \alpha = \beta = 0$. Mogę założyć, że M, K leżą w tej samej półpłaszczyźnie o krawędzi NY; jeśli tak nie jest, to zmieniam parami nazwy punktów: K, N; M, P; L, O; X, Y i już tak jest. Jeśli X, Y leżą w tej samej płaszczyźnie o krawędzi OP, to mamy: $360^\circ - (\gamma + \alpha - \beta) = \gamma - \alpha + \beta, \gamma = 180^\circ$. Wtedy KN, LO, PM przecinają się w punkcie niewłaściwym. Tak być nie może, bo z wypukłości sześciokąta punkty A, F, E leżą po jednej stronie prostej KN, a punkty B, C, D po drugiej, wobec tego środki odcinków AF, CD oraz EF i BC leżą parami po różnych stronach prostej, a zatem $KN \cap LO \neq \emptyset, KN \cap MP \neq \emptyset$.

Komentarz.
Było to rozwiązanie przedstawione przez ucznia KR04, który zajął pierwsze miejsce w 57 OM. Zwraca uwagę świetna orientacja ucznia w gąszczu oznaczeń, wyczuwanie różnych możliwych przypadków. Uczeń popełnił jednak błąd: jeśli L, X, N leżą w tej samej półpłaszczyźnie o krawędzi KY, to nie jest prawdą, że $\alpha = \beta = 0$.



Przy takim położeniu punktów L, X, N zachodzą warunki takie, jak w rozważanym przez ucznia przypadku, czyli $\gamma + \alpha - \beta = \gamma - \alpha + \beta$, a zatem $\alpha = \beta$, ale inaczej przedstawia się ostatni fragment rozumowania:

$$KS_1 = \frac{KR \cdot KT}{KQ} = \frac{KN}{KY}(KQ + QT) = \frac{KN}{KY}(KQ + LQ \operatorname{ctg} \gamma) =$$

$$KN\left(\frac{KQ}{KY} + \frac{LQ}{KY} \operatorname{ctg} \gamma\right) = KN\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma\right).$$

Analogicznie

$$KS_2 = KN\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma\right).$$

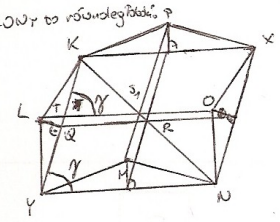
Także i w tym przypadku $S_1 = S_2$.

Uczeń nie wykonał rysunku do drugiego przypadku. To była prawdopodobna przyczyna powstania błędu. Uczeń nie wykonał żadnych obliczeń i rysunków w brudnopisie; całe rozwiązanie (które prezentuję na następnej stronie) zostało zapisane bezpośrednio w czystopisie.

Oznaczmy środki odcinków AB, BC, CD, DE, EF, FA odpowiednio przez K, L, M, N, O, P.
Odcinek KL łączy środki boków trójkąta ABC, a więc jest równoległy i równy połowie boku AC:
$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Analogicznie
$\overrightarrow{LM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$
$\overrightarrow{NO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$
$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$
$\overrightarrow{PK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$.
Widać, że $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA})=0$ i $\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{PK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FB})=0$.
$\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{LM}+(-\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{PO}$. Analogicznie:
$\overrightarrow{LO}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{KP}$
$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{LK}$

Z tego:
$\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{LK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CA})=0$

Niech $\overrightarrow{KX}=\overrightarrow{LO}$ i $\overrightarrow{KY}=\overrightarrow{PM}$, wtedy $\overrightarrow{NX}=\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{NY}=\overrightarrow{OL}$, bo $\overrightarrow{NX}=\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{KX}=\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{LO}=\overrightarrow{MP}$, druga równość analogicznie. Z odpowiednich równości wektorów wynika, że KXNY, KPMY, PMNX, KLOX, LONY to równoległoboki.



Mamy:
$$\cos\sphericalangle LYM=\frac{MY^2+LY^2-LM^2}{MY\cdot LY}=\frac{PK^2+NO^2-LM^2}{PK\cdot NO}\overset{(*)}{=}\frac{MN^2+KL^2-PO^2}{MN\cdot KL}=\frac{PX^2+XO^2-PO^2}{PX\cdot XO}=\cos\sphericalangle PXO.$$
$(*)$ bo $PK=\frac{1}{2}FB=\frac{1}{2}CE=MN$, $NO=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}AC=KL$, $LM=\frac{1}{2}DD=\frac{1}{2}EA=OP$.
cosinus w przedziale $\langle 0;\pi\rangle$ jest różnowartościowy, czyli $\sphericalangle LYM\equiv\sphericalangle PXO$. Ale $MN=PK=MY$, $NO=KL=OX$, czyli MNY. i ONX są trójkątami równoramiennymi. Ponadto $\Delta PKX\equiv\Delta MYN$, bo to przystawanie jest przesunięciem o wektor $\overrightarrow{PM}$, analogicznie $\Delta KLY\equiv\Delta XON$. Niech $\sphericalangle XNO=\alpha$, $\sphericalangle KXP=\beta$, $\sphericalangle KYN=\gamma$.
Powyższą równość kątów zapiszemy jako $\gamma+\alpha-\beta=\gamma+\beta-\alpha$, czyli $\alpha=\beta$, $\Delta MNY\sim\Delta ONX$. Niech $S_1=KN\cap LO$, $S_2=KN\cap MP$, $Q=$ rzut L na KY (prosto-padły), R - środek odcinka KN, $T=KY\cap LO$. Wtedy:
$$KS_1=\frac{KR\cdot KT}{KQ}=\frac{KN}{KY}\cdot(KQ-QT)=\frac{KN}{KY}\cdot(KQ-LQ\cdot\operatorname{ctg}\gamma)=KN\cdot\left(\frac{KQ}{KY}-\frac{LQ}{KY}\operatorname{ctg}\gamma\right)=KN\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma\right).$$
Analogicznie $KS_2=KN\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma\right)$, czyli $S_1=S_2$, co należało pokazać.
Uwaga: Jeśli L, X, N są w tej samej półpłaszczyźnie o krawędzi KY, to mamy $\gamma-\alpha-\beta=\gamma+\alpha+\beta$, $\alpha+\beta=0$, $\alpha=\beta=0$. Mogę założyć, że M, K leżą w tej samej półpłaszczyźnie o krawędzi NY, jeśli tak nie jest to [illegible]: zmieniam nazwy punktów parami: K, N; M, P; L, O; X, Y i już tak jest. Jeśli X, Y leżą w tej samej półpłaszczyźnie o krawędzi OP, to mamy:
$360^\circ-(\gamma+\alpha-\beta)=\gamma-\alpha+\beta$, $\gamma=180^\circ$. Wtedy KN, LO, PM przecinają się w punkcie niewłaściwym. Tak nie może być, bo z wypukłości sześciokąta A, F, E leżą po jednej stronie prostej KN, a B, C, D po drugiej, wobec tego środki odcinków AF, CD oraz EF, BC leżą parami po różnych stronach prostej, a zatem $KN\cap LO\neq\emptyset$, $KN\cap MP\neq\emptyset$

Rysunek 3: Rozwiązanie zadania 3.3.57 zaproponowane przez ucznia KR04.

Sposób 4

Przypiszmy punktom A, B, C, D, E, F liczby zespolone, odpowiednio, a, b, c, d, e, f.

Rozważmy przypadki.

Przypadek 1

Załóżmy, że punkty a, b, c, d, e, f leżą na okręgu o środku 0 promieniu 1, co oznacza, że $a \cdot \overline{a} = 1, b \cdot \overline{b} = 1, c \cdot \overline{c} = 1, d \cdot \overline{d} = 1, e \cdot \overline{e} = 1, f \cdot \overline{f} = 1$.
Z założenia wynika, że

$$|a - c| = |f - d|,$$

zatem

$$(a - c)\overline{(a - c)} = (f - d)\overline{(f - d)},$$

$$(a - c)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) = (f - d)\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d}\right).$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{f}{d} + \frac{d}{f}.$$

Po przekształceniach dostajemy

$$(af - cd)(ad - cf) = 0.$$

Zatem $af = cd$ lub $ad = cf$, co oznacza, że odcinek af jest równoległy do cd lub odcinek ad jest równoległy do cf.
W każdym z tych przypadków odcinek łączący punkty $\frac{a+f}{2}$ i $\frac{c+d}{2}$ przechodzi przez punkt 0.
Postępując analogicznie dla równości $|a-e| = |b-d|$ i $|c-e| = |b-f|$ otrzymujemy, że odcinki łączące środki przeciwległych boków przechodzą przez punkt 0, co dowodzi tezy.

Przypadek 2

Załóżmy, że punkty a, b, c, d, e, f leżą na okręgu o środku 0 promieniu 1. Do liczb b, d, f dodajmy liczbę x tak, aby sześciokąt $a, b + x, c, d + x, e, f + x$ był wypukły.
Środki kolejnych boków sześciokąta $a, b + x, c, d + x, e, f + x$ są równe

$$\frac{a+b}{2} + x, \frac{b+c}{2} + x, \frac{c+d}{2} + x, \frac{d+e}{2} + x, \frac{e+f}{2} + x, \frac{f+a}{2} + x.$$

Wobec tego odcinki łączące środki przeciwległych boków sześciokąta $a, b + x, c, d + x, e, f + x$ także muszą przecinać się w jednym punkcie.

□

Komentarz.
Sposób 4 oparty jest w istocie na rozumowaniu ze sposobu 2. Próba rozwiązania zespolonego w przypadku ogólnym (bez rozważania przypadku 1) natrafia na poważne trudności rachunkowe, które uniemożliwiają, także ze względów czasowych, na rozwiązanie zadania w trakcie zawodów. Wszyscy uczniowie, którzy próbowali rozwiązać metodą zespoloną, nie podołali temu zadaniu.

Uczeń KR22,który próbował rozwiązywać zadanie metodą zespoloną, napisał:

Rozważmy płaszczyznę zespoloną; niech też punktowi X odpowiada liczba x na płaszczyźnie zespolonej.
Bez straty ogólności załóżmy, że $a = 0, b = 1$. Z równań danych w zadaniu wynika, że

$$|c| = |d - f|, |c - e| = |f - 1|, |e| = |d - 1|.$$

Pokażmy, iż punkt x leży na prostej YZ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{x-y}{z-y} = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\overline{z}-\overline{y}}.$$

Istotnie, współliniowość X, Y, Z jest równoważna temu, iż

$$x - y = (z - y)r,$$

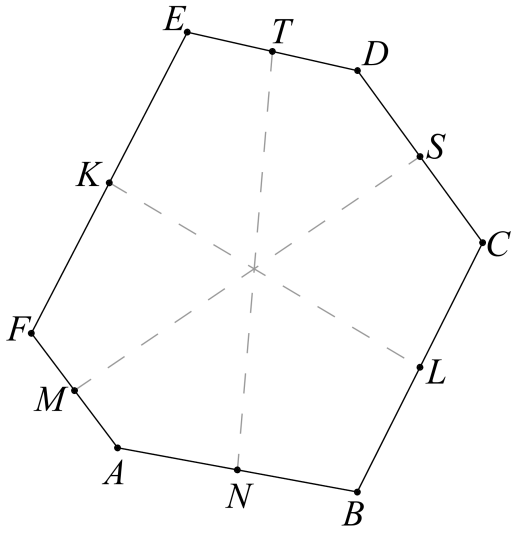
gdzie $r \in \mathbb{R}$, dlatego $\frac{x-y}{z-y}$ jest liczbą rzeczywistą, czyli jest równa swemu sprzężeniu.

W tym miejscu urywa się zaproponowane rozwiązanie. Uczeń przedstawił tylko założenia w postaci warunku dla liczb zespolonych oraz opisał oczywisty warunek współliniowości punktów.

Także uczeń WA90 próbował wykorzystywać metodę zespoloną.

Niech T, U, M, N, L, S będą środkami odpowiednich boków. Oznaczmy przez X punkt przecięcia NT i LU. Chcemy pokazać, że $X \in MS$. Rozważmy płaszczyznę zespoloną i niech współrzędną X będzie 0. Małymi literami będę oznaczać współrzędne odpowiednich punktów. Mamy:

$$n = \frac{a+b}{2}, l = \frac{b+c}{2}, s = \frac{c+d}{2},$$
$$t = \frac{d+e}{2}, u = \frac{e+f}{2}, m = \frac{a+f}{2},$$



Mamy z założenia:

$$AC = DF \Leftrightarrow (a-c)(\overline{a}-\overline{c}) = (d-f)(\overline{d}-\overline{f}),$$
$$CE = FB \Leftrightarrow (c-e)(\overline{c}-\overline{e}) = (f-b)(\overline{f}-\overline{b}),$$
$$EA = BD \Leftrightarrow (e-a)(\overline{e}-\overline{a}) = (b-d)(\overline{b}-\overline{d}).$$

$X \in NT$ jest równoważne z:

$$\begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2} & 1 \\ \frac{d+e}{2} & \frac{\overline{d}+\overline{e}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a+b)(\overline{d}+\overline{e}) = (d+e)(\overline{a}+\overline{b}).$$

$X \in LU$ jest równoważne z:

$$\begin{vmatrix} \frac{b+c}{2} & \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} & 1 \\ \frac{e+f}{2} & \frac{\overline{e}+\overline{f}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (b+c)(\overline{e}+\overline{f}) = (e+f)(\overline{b}+\overline{c}).$$

Chcemy pokazać, że $X \in MS$ lub równoważnie

$$\begin{vmatrix} \frac{c+d}{2} & \frac{\overline{c}+\overline{d}}{2} & 1 \\ \frac{a+f}{2} & \frac{\overline{a}+\overline{f}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (c+d)(\overline{a}+\overline{f}) = (a+f)(\overline{c}+\overline{d}).$$

Przekształcając równoważnie tezę i wykorzystując założenia uczeń otrzymał równość:

$$a\overline{e} + e\overline{c} + c\overline{a} - |a|^2 - |c|^2 - |e|^2 = f\overline{d} + d\overline{b} + b\overline{f} - |b|^2 - |d|^2 - |f|^2,$$

a następnie stwierdził:
co jest oczywiście prawdą, więc $X \in MS$ i dowiedliśmy tym samym, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Komentarz.
Uczeń wykazał się dobrą wiedzą i umiejętnościami w zakresie stosowania metody zespolonej. Jednakże podsumowanie jest ewidentnym blefem, gdyż ostatnia równość nie jest *oczywiście prawdą* i nie widać, w jaki sposób można by wykazać, że jest prawdziwa.

Podsumowanie

Spośród dziewięciu uczniów, którzy rozwiązali zadanie 3, sześciu zostało laureatami (w tym wszyscy uczniowie z miejsc 1-4), jeden uzyskał wyróżnienie, natomiast zawodnik WA63, uczeń I klasy XIV LO w Warszawie, rozwiązał w finale tylko to jedno zadanie.

3.3.2 Rozwiązania, które zawierały błędy

Stosowane twierdzenia

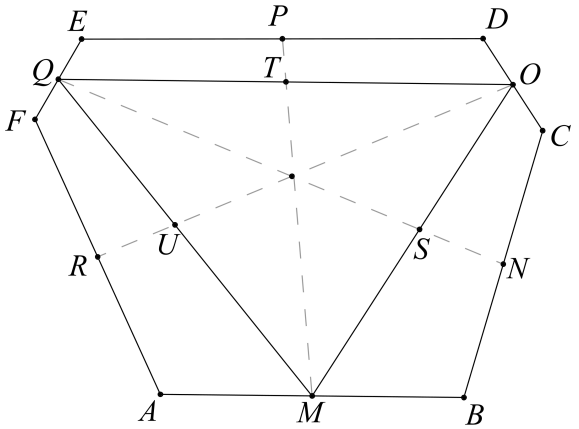
Uczniowie WA30, KR01, KR11 próbowali stosować twierdzenie Cevy.

Uczeń WA30 przeprowadził następujące rozumowanie:

Niech punkty M, N, O, P, Q, R będą środkami odcinków, odpowiednio, AB, BC, CD, DE, EF.
Aby dowieść, że proste łączące środki naprzeciwległych boków sześciokąta $ABCDEF$ przecinają się w jednym punkcie, można skorzystać z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy. Należy więc udowodnić, że

$$\frac{QU}{UM} \cdot \frac{MS}{SO} \cdot \frac{OT}{TQ} = 1.$$

Ponieważ $AB = 2AM, AF = 2AR$, zatem korzystając z podobieństw trójkątów AMR i ABF otrzymujemy, że $MR = \frac{1}{2}BF$, ale $BF = CE$ i analogicznie $OP = \frac{1}{2}CE$. Mamy więc $MR = OP$ i analogicznie $MN = QP$ oraz $NO = QR$.
Stąd proste $QU = UM, MS = SO, OT = TQ$, zatem przecinają się w jednym punkcie c.b.d.u.



Komentarz.

Rozumowanie w końcowej fazie ma znamiona blefu: uczeń ma świadomość, że nie wykazał, iż $QU = UM, MS = SO, OT = TQ$. Wnioski, do których doszedł poprzednio, nie uprawniają w żaden bezpośredni sposób do stwierdzenia, że rozwiązał zadanie.
Trudno także ustalić, jak miałby przebiegać dowód z wykorzystaniem twierdzenia Cevy.

Uczeń WA30 w finale 57 OM otrzymał 0 punktów.
Uczeń KR11 zdobył 18 punktów (6, 6, 0, 6, 0, 0) i wyróżnienie.
Uczeń KR01 zdobył 24 punkty (6, 6, 0, 6, 0, 6) i nagrodę drugiego stopnia.
W przypadku dwóch uczniów z Krakowa można przyjąć, że niepowodzenie w zadaniu 3.3.57 było efektem braku czasu nad dogłębną refleksją nad zadaniem (obaj w pierwszym dniu zawodów rozwiązali zadania 1 i 2).

Uczniowie KR41 i KR36 próbowali stosować twierdzenie Desarguesa.

Uczeń KR41 napisał:
Wystarczy udowodnić, że $F'B' \parallel C'E'$, $D'F' \parallel C'A'$, $E'A' \parallel D'B'$. Wtedy na mocy twierdzenia Desarguesa proste $A'D', C'F', B'H'$ przecinają się w jednym punkcie.

Komentarz.
Uczeń chciał powołać się (prawidłowo) na twierdzenie Desarguesa, ale założenia tego twierdzenia nie mogły być spełnione. Gdyby uczeń narysował rysunki w różnych sytuacjach, to zapewne dostrzegłby, że nie zachodzi równoległość podanych przez niego prostych. Zawodnik chciał wykorzystać twierdzenie, w którym nie były spełnione założenia - podał warunek wystarczający, który jednak był zbyt mocny.

Uczeń KR36 napisał:
Trójkąty ACE i BDF są przystające. Oznacza to, że istnieje obrót, który przekształca trójkąt BDF na taki trójkąt, którego boki są równoległe do odpowiednich boków trójkąta ACE. Tak więc kąty między prostymi: AC i DF, BD i AE, BF i CE są takie same.
Z tego wszystkiego wynika, że punkty przecięcia prostych AC i DF, BD i AE, BF i CE leżą na jednej prostej, a że proste $AC, DF, C'F'$ przecinają się w jednym punkcie (analogicznie dla pozostałych par), więc wobec tego z twierdzenia Desarguesa proste $A'D', B'E', C'F'$ przecinają się w jednym punkcie.

Komentarz.
Uczeń mylił się pisząc, że *że punkty przecięcia prostych AC i DF, BD i AE, BF i CE leżą na jednej prostej*. Gdyby tak było, to każde dwa trójkąty podobne miałyby środek perspektywy, co nie jest prawdą.
Uczeń mylił się także, gdy pisał: *proste $AC, DF, C'F'$ przecinają się w jednym punkcie.*

Uczniowie WR01, TO80, KR23, WA11, KR70 próbowali stosować twierdzenie Branchona.

Uczeń WR01 napisał:
Niech A', B', C', D', E', F' będą środkami, odpowiednio, AB, BC, CD, DE, EF. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $A'B' \parallel AC, A'F' \parallel BF$. Ponadto z przystawania trójkątów ACE i BDF: $\sphericalangle FBC = \sphericalangle AEC$, $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BDF$.
Niech G i H będą punktami przecięcia AC odpowiednio z BF i $A'F'$. Wtedy

$$\sphericalangle F'C'B' = 180^\circ - \sphericalangle FGC = 180^\circ - \sphericalangle F'HC = 180^\circ - \sphericalangle F'A'B'.$$

Zatem punkty A', B', C', D' leżą na jednym okręgu.
Analogicznie dowodzimy, że punkty B', C', D', E' leżą na jednym okręgu, więc czworokąt A', B', C', D', E', F' da się wpisać w okrąg. Z twierdzenia Brianchona wynika teza zadania.

Komentarz.
Łatwo dostrzegalna jest próba dostosowania dowodu do twierdzenia Brianchona, które uczeń chciał wykorzystać. Zależność

$$\measuredangle F'C'B' = 180^\circ - \measuredangle FGC$$

nie jest prawdziwa i nie wynika w żaden sposób z założeń.
Bardzo podobne rozumowanie przedstawił uczeń TO80; twierdzenie Brianchona określił jako twierdzenie dualne do twierdzenia Pascala.

Uczeń KR23 napisał:
Musimy więc udowodnić, że przekątne sześciokąta wypukłego, którego przeciwległe boki są równe, przecinają się w jednym punkcie.
Rozwiązanie takiego zadania znajduje się w literaturze (któraś z książek p. Pawłowskiego lub rozwiązanie zadania z jakiejś z wcześniejszych olimpiad)
Ale spróbuję to zrobić również innym sposobem.
W ten sześciokąt da się wpisać elipsę, więc na mocy twierdzenia Branchiona wynika teza.

Komentarz.
Uczeń powoływał się na literaturę, ale w sposób bardzo nieprecyzyjny. Podany przez niego dowód opiera się na przekonaniu, że w sześciokąt o podanych własnościach można wpisać elipsę. Tego jednakże uczeń nie uzasadnia w żaden sposób.
Uczeń zdobył nagrodę trzeciego stopnia (zajął miejsca 5-7).

Uczeń WR60 przeprowadził następujące rozumowanie:
Niech punkty M, N, O, P, R, T będą środkami odcinków, odpowiednio, AB, BC, CD, DE, EF.
Z twierdzenia Talesa

$$MN = PR - \frac{1}{2}AC,$$

$$NO = RT = \frac{1}{2}BD,$$

$$OP = TM = \frac{1}{2}CE.$$

Danymi w zadaniu odcinkami są więc trzy spośród przekątnych sześciokąta $MNOPQR$, który ma tę własność, iż jego przeciwległe boki są równej długości. Zgodnie z twierdzeniem o punkcie przecięcia przekątnych sześciokąta (o parami równych bokach), odcinki te przecinają się w jednym punkcie c.b.d.u.

Komentarz.
Nie istnieje twierdzenie, na które powołuje się uczeń. Zapewne pomylił założenia twierdzenia Brianchona.
Niemal identyczne rozumowanie przeprowadził uczeń WA11.
W taki sam sposób argumentował uczeń KR70, który dodatkowo powołał się na książkę "25 lat olimpiady matematycznej, Straszewski, Browkin".

Zwraca uwagę fakt, że jeden uczeń powoływał się na książkę Prasołowa *Zadania z geometrii*, jeden powoływał się na *którąś z książek Pawłowskiego* i jeden na książkę *25 lat Olimpiady Matematycznej*. Jednak wszystkie te odwołania były nieprecyzyjne i z błędami w pisowni tytułów i nazwisk autorów.

Zawodnik WA30 był uczniem XIV LO w Warszawie. Uczniowie KR01, KR11, KR23, KR36, KR41 i KR70 byli uczniami V LO w Krakowie. Zawodnik WR01 był uczniem XIV LO we Wrocławiu.
Żaden uczeń, który próbował zastosować twierdzenia spoza programu nauczania matematyki w liceum nie rozwiązał zadania. Ponadto ośmiu z nich pochodziło ze szkół o dużej liczbie uczestników III etapu, w tym aż sześciu było z V LO w Krakowie.

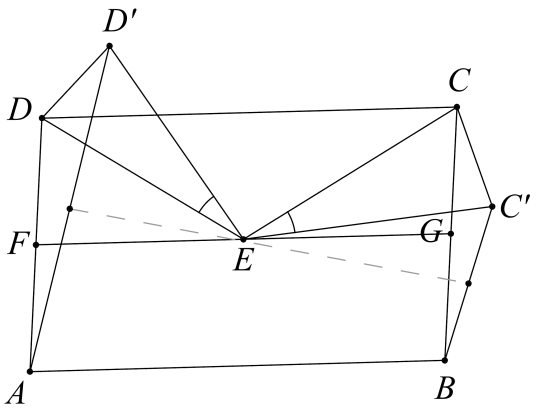
Strategie, które nie zakończyły się sukcesem

Uczeń WA82 napisał:
Mamy więc zadanie: sześciokąt wypukły, przeciwległe boki równe; pokazać, że jego główne przekątne przecinają się w jednym punkcie. Ale zadanie to jest w rozdziale Prasołowa (w tomie planimetria).(Książka pewnie ma tytuł „Zadania z geometrii" albo coś takiego i jest bardzo znana; rozdział ma tytuł „Podobieństwo trójkątów").

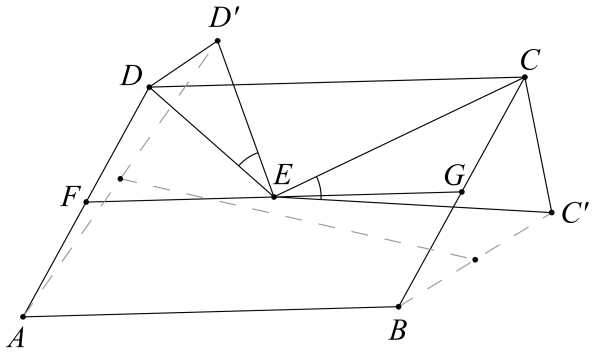
Komentarz.
W książce „Zadaczi po płanimetrii" Prasołowa nie ma takiego zadania. Zatem mamy do czynienia z klasycznym blefem.

Uczeń GD32 całe rozumowanie oparł na zaproponowanym przez siebie lemacie:

Mamy dany równoległobok jak na rysunku. Niech $FE = EG$, $DC \parallel FG$, $FG \parallel AB$. Wykorzystując obrót punktu D i C o dowolny kąt względem punktu E na punkt D', C', to odcinek łączący środki odcinków AD' oraz BC' przechodzi przez punkt E.



Komentarz.
Uczeń nie zamieścił żadnego dowodu tego lematu. Przekonanie o poprawności lematu zaczerpnął z mało precyzyjnego rysunku.
Lemat jest nieprawdziwy; łatwo podać kontrprzykład: wystarczy obrócić punkty D i C dookoła punktu E o odpowiednio dobrany kąt.
Gdyby uczeń wykonał rysunek w nieco innym przypadku, także dostrzegł by, że lemat nie jest prawdziwy.



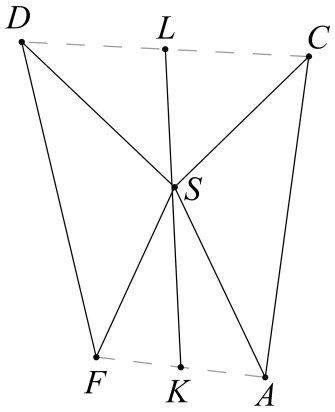
Dwóch uczniów: KA62 i WA05 próbowało stosować metodę analityczną.
Uczeń WA05 jedynie zapisał warunki wynikające z równości długości odcinków oraz równania prostych i na tym zakończył rozwiązanie.
Uczeń KA62 zapisał warunki wynikające z równości długości odcinków oraz równania prostych. następnie wyznaczył współrzędne punktu, który należał do dwóch prostych łączących środki przeciwległych boków. Następnie sformułował równanie, jakie powinno być spełnione, aby teza zachodziła. Nie wykonując już żadnych obliczeń i przekształceń uczeń napisał:
Po zwinięciu w nawiasy i porównaniu z założeniami otrzymujemy tezę, jednak brakło mi czasu na zapisanie całej operacji.

Komentarz.
Końcowe stwierdzenie ucznia jest ewidentnym blefem, gdyż w przypadku ostatniej równości nie widać, w jaki sposób można by wykazać, że jest prawdziwa.

Uczeń KA92 jako pierwszy przypadek przedstawił sytuację, gdy $AC \parallel DF, CE \parallel FB, EA \parallel BD$. Zauważył, że w tym przypadku teza w oczywisty sposób zachodzi.
Następnie stwierdził, że wykaże tezę w przypadku, gdy przesunie trójkąt BDF o pewien wektor. Jednak nie wykonał tego; jedynie opisał, jak mógłby to wykazać korzystając z metody analitycznej.
Wreszcie stwierdził, że obrót trójkąta BDF dookoła punktu B zachowuje przecinanie się prostych łączących środki przeciwległych boków. Uzasadnienie tego faktu sprowadzało się do stwierdzenia, że *tak musi być.*

Komentarz.
Uczeń jako punkt wyjścia postanowił wybrać przypadek szczególny tj. taki przypadek, gdy $AC \parallel DF, CE \parallel FB, EA \parallel BD$. Modyfikacja tego przypadku poprzez obrót jednego z trójkątów nie daje możliwości łatwego dowodu zachowania własności, którą należało wykazać. Zatem strategia rozważania takiego szczególnego przypadku nie przyniosła sukcesu, gdyż przypadek był zbyt szczegółowy i nie pozwalał uogólnić rozumowania.

Uczeń TO73 napisał:



Zauważmy, że trójkąt BDF powstaje poprzez obrót trójkąta ACE wokół pewnego punktu S. W związku z tym: $AS = DS, FS = CS, \measuredangle FSC = \measuredangle DSA$. Stąd wynika, że $\measuredangle DSF = \measuredangle ASC$,czyli $\triangle ACS \equiv \triangle DSF$.
Załóżmy, że punkty L i K leżą odpowiednio na odcinkach DC i AF oraz $DL = LC$ i $AK = KF$.
Wystarczy pokazać, że punkty K, S, L są współliniowe, co będzie równoważne tezie.
Teza oczywiście zachodzi, gdy $AC \parallel DF$.

Zauważmy, że $[ACLK] = [DFKL]$ oraz

$$[AKS] = [FKS], [CLS] = [DFS], [ACS] = [DSF].$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$[AKS] + [CLS] + [ACS] = [FKS] + [DFS] + [DSF].$$

W takim razie

$$[AKS] + [CLS] + [ACS] = [ACLK],$$

czyli punkt S leży na odcinku KL, co należało dowieść.

Komentarz.
Uczeń popełnił szereg błędów, które spowodowały, że rozwiązanie otrzymało ocenę 0 i nie można tego rozumowania poprawić.
Uczeń stwierdził, że wystarczy wykazać współliniowość punktów L, S, K. Obserwacja wynikała z analizy rysunku, w którym przypadkowo wymienione punkty wyglądały na współliniowe.
Zawodnik zauważył, że $[ACLK] = [DFKL]$, co w ogólnym przypadku nie jest prawdą.
W zapisie równości $[CLS] = [DFS]$ zapewne chodziło o równość $[CLS] = [DLS]$.
Ostatni wniosek

$$[AKS] + [CLS] + [ACS] = [ACLK]$$

wynika z fałszywego założenia, że $[ACLK] = [DFKL]$ oraz z założenia, że S należy do odcinka KL, co zawodnik właśnie chciał udowodnić.
Liczba popełnionych błędów świadczy o małym doświadczeniu w rozwiązywaniu zadań geometrycznych oraz sporym zmęczeniu.

Wśród 125 prac uczniów, 84 prace nie zawierały żadnych zapisów.
Wśród prac 31 prac, które otrzymały ocenę 0 punktów i w których uczniowie przedstawili do oceny zapisy, często pojawiały się błędy powierzchownej wiedzy (6) i blefy (11). Dziesięciu uczniów nie pomysłu na rozwiązanie, a w 17 pracach wystąpiły błędy.
Wśród 22 uczniów, którzy zadeklarowali, że rozwiązali zadanie, tylko 10 miało do tego podstawy.

3.4 Zadanie 5 z II etapu 58 OM

3.4.1 Treść i rozwiązania zadania

Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBN$ są rombami o bokach długości a. Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Rozwiązania

Sposób 1

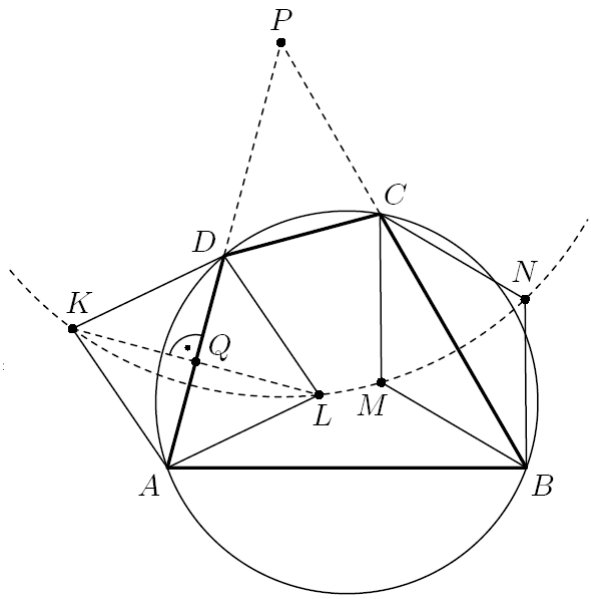
Zaproponowany przez organizatorów sposób 1 opierał się na wykorzystaniu twierdzenia o siecznych okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

Ponieważ cięciwy AB i CD są różnej długości, więc proste AD i BC nie są równoległe. Oznaczmy punkt ich przecięcia przez P. Wykażemy, że punkty K, L, M i N leżą na okręgu o środku P. Prosta AD jest symetralną odcinka KL, a więc $PK = PL$. Analogicznie $PM = PN$.
Wystarczy zatem wykazać, że $PK = PN$. Oznaczmy przez Q punkt przecięcia przekątnych rombu $AKDL$. Wówczas na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$AP \cdot DP = (PQ+AQ)(PQ-AQ) = PQ^2-AQ^2$$

$$= PK^2 - KQ^2 - AQ^2 = PK^2 - AK^2.$$

Analogicznie dowodzimy, ze $BP \cdot CP = PN^2 - BN^2$. Punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu, więc $AP \cdot DP = BP \cdot CP$. W takim razie $PK^2 - AK^2 = PN^2 - BN^2$; a skoro $AK = BN = a$, więc w efekcie uzyskujemy równość $PK = PN$, która kończy rozwiązanie zadania.



□

Komentarz.
143 uczniów rozwiązywało zadanie sposobem 1, z czego 135 zawodników uzyskało 5 lub 6 punktów. 72 uczniów powoływało się na twierdzenie o siecznych okręgu lub na własności potęgi punktu względem okręgu. W pozostałych pracach twierdzenia te były dowodzone. Świadczy to, przynajmniej w części prac, o braku znajomości tych twierdzeń.

Sposób 2

Sposób 2 jest modyfikacja sposobu 1 - do stosownych zależności dochodzi nieco okrężną drogą poprzez kilkukrotne wykorzystanie trójkątów prostokątnych i twierdzenia Pitagorasa. Obydwa sposoby (1 i 2) opierają się na uprzednim dostrzeżeniu, że tylko punkt P może być środkiem poszukiwanego okręgu. Jest to technika heurystyczna, którą Polya nazywa *odgadywać i sprawdzać* ([104], str. 349).

Pozostałe dwa sposoby (3 i 4) rozwiązania zadania oparte są na innej strategii: wykazaniu, że punkty K, L, M, N spełniają warunek równoważny współokręgowości.

Ponieważ cięciwy AB i CD są różnej długości, więc proste AD i BC nie są równoległe. Oznaczmy punkt ich przecięcia przez P. Wykażemy, że punkty K, L, M i N leżą na okręgu o środku P. Oznaczmy przez Q punkt przecięcia przekątnych rombu $AKDL$, a przez O - środek okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.
Prosta AD jest symetralną odcinka KL, a więc $PK = PL$. Analogicznie $PM = PN$. Wystarczy zatem wykazać, że $PK = PN$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów KPQ i OPQ dostajemy

$$PK^2 = KQ^2 + PQ^2 \qquad \text{i} \qquad PQ^2 = PO^2 - OQ^2.$$

Zatem

$$PK^2 = KQ^2 + PO^2 - OQ^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ODQ dostajemy

$$QO^2 = OD^2 - DQ^2,$$

zatem

$$PK^2 = KQ^2 + PO^2 - OD^2 + DQ^2.$$

Odcinek OD jest równy promieniowi R okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ oraz $QD^2 + KQ^2 = a^2$, a więc

$$PK^2 = a^2 - R^2 + PO^2.$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$PM^2 = a^2 - R^2 + PO^2.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$PK = PM,$$

co oznacza, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu o środku P.

□

Komentarz.
Spośród 177 uczniów, którzy rozwiązali zadanie, 36 rozwiązało sposobem 2.
Rozwiązanie sposobem 2 było oparte tylko na stosowanym kilkukrotnie twierdzeniu Pitagorasa. Punktem wyjścia do rozwiązania była obserwacja, że jedynie punkt przecięcia prostych AD i BC może być środkiem okręgu opisanego na czworokącie $KLMN$.

Sposób 3

Sposób 3, zaprezentowany przez ucznia WA47, opiera się na wykorzystaniu własności osi potęgowych trzech okręgów: opisanego na czworokącie $ABCD$, okręgu o środku K i promieniu a oraz okręgu o środku N i promieniu a.

Z własności rombu wiemy, że jego przekątne są prostopadłe oraz przecinają się w połowie długości.
Oznaczmy przez O_1 okrąg opisany na czworokącie $ABCD$. Zauważmy, że prosta AD jest osią potęgową okręgów O_1 i O_2 (o środku w punkcie K i promieniu a). Ponadto ta prosta jest

symetralną odcinka KL. Analogicznie prosta BC jest osią potęgową okręgów O_1 i O_3 (o środku w punkcie N i promieniu a). Zauważmy, że oś potęgowa okręgów O_2 i O_3 jest symetralną odcinka KN. Wynika to z faktu, że okręgi O_2 i O_3 mają równe promienie, a wtedy ich oś potęgowa to symetralna odcinka łączącego środki okręgów. Zatem symetralne odcinków KL, KM i MN przecinają się w jednym punkcie, gdyż osie potęgowe trzech okręgów przecinają się w jednym punkcie. Zatem na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.

□

Komentarz.
Rozwiązanie sposobem 3 przedstawili zawodnicy WA47 i KR84. Pierwszy był uczniem II klasy XIV LO w Warszawie, drugi zaś uczniem I klasy V LO w Krakowie.
Rozwiązania nie były w pełni poprawne, gdyż uczniowie nie sprawdzili, co się dzieje gdy punkty L, O, M się pokrywają (wtedy teza jest oczywista). Ponadto zawodnicy stwierdzili, że osie potęgowe trzech okręgów przecinają się w jednym punkcie - zapomnieli, że osie te mogą być równoległe. Przypadek osi równoległych nie może mieć jednak miejsca w tym zadaniu, gdyż $AD \neq BC$.
Rozwiązanie uczniów jest bardzo proste i eleganckie. Kluczowym momentem tego rozwiązania jest skorzystanie z twierdzenia o osiach potęgowych trzech okręgów. Zawodnicy znali tę technikę bardzo dobrze. Mimo efektownego wyniku z tego zadania WA84 nie awansował do finału; w II etapie zdobył 17 punktów (6, 0, 0, 6, 5, 0). Natomiast KR84 w II etapie uzyskał 34 punkty (6, 6, 5, 6, 5, 6).

Sposób 4

Sposób 4 opierał się na wykorzystaniu twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o siecznych, w odniesieniu do okręgu opisanego na czworokącie $KLMN$i siecznych KL i MN. Poniższe rozwiązanie przedstawił uczeń WA62.

Przez O oznaczmy środek okręgu opisanego na $ABCD$, przez R - jego promień.
Załóżmy, że punkt K leży bliżej punktu O niż punkt L, a punkt M leży bliżej punktu O niż punkt N.
Punkt K jest równoodległy od punktów A i D, więc leży na symetralnej odcinka AD; ponadto punkt O leży na tej symetralnej. Oznaczmy środek boku AD przez E. Czworokąt $AKDL$ jest rombem, więc E jest także środkiem odcinka KL. Załóżmy, że O nie należy do odcinka KL. Niech $x = OK$, $b = EK$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DEK otrzymujemy:

$$DE = \sqrt{a^2 - b^2},$$

zaś z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ODE mamy:

$$DE^2 + (b + x)^2 = R^2.$$

Podstawiając długość DE dostajemy

$$a^2 - b^2 + b^2 + 2bx + x^2 = R^2,$$

więc

$$x^2 + 2bx + a^2 - R^2 = 0.$$

Stąd

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2 + 4R^2}}{2},$$

ale ponieważ $x \geq 0$, więc

$$x = \sqrt{b^2 - a^2 + R^2} - b.$$

Zatem

$$OK \cdot OL = x(x + 2b) = x^2 + 2bx = R^2 - a^2.$$

Oznaczmy środek odcinka BC przez F. Gdyby punkt O należał do odcinka MN, to $CM > CO = R$, czyli $a > R$, ale O nie należy do odcinka KL, więc $a = DK < OD = R < a$. Otrzymujemy sprzeczność.
Zatem punkt O nie należy do odcinka MN, więc dostajemy analogicznie

$$OM \cdot ON = R^2 - a^2.$$

Oczywiście punkty O, M, N są współliniowe. Tak więc

$$OK \cdot OL = OM \cdot ON,$$

czyli punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu, a tego należało dowieść.
Teraz udowodnię, że teza jest prawdziwa, gdy O należy do odcinka KL. Wtedy $DK > DO = R$, więc $a > R$, czyli O także należy do odcinka MN.
Tym razem oznaczmy $x = OK, b = OE$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DOE mamy:

$$DE^2 = R^2 - b^2.$$

Zaś z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DKE otrzymujemy:

$$a^2 = (b + x)^2 + DE^2 = b^2 + 2bx + x^2 + R^2 - b^2.$$

Tak więc

$$x^2 + 2bx + R^2 - a^2 = 0.$$

Zatem

$$OK \cdot OL = x^2 + 2bx = a^2 - R^2.$$

Analogicznie (dzięki temu, że O należy do odcinka MN) otrzymujemy:

$$OM \cdot ON = a^2 - R^2,$$

więc mamy równość, czyli punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

□

Komentarz.
Rozwiązanie sposobem 4 przedstawili uczniowie WA62 i SZ90.
Wszyscy pozostali uczniowie (a było ich 30), którzy próbowali rozwiązać sposobem 4, nie rozważyli przypadków ze względu na położenie punktu O względem odcinków MN i KL. Wszystkie te osoby przyjęły, że punkt O nie należy do odcinków MN i KL i tylko taki przypadek rozważyły.
Brak rozważenia przypadków świadczy o niestarannym rozwiązywaniu zadania, braku kontroli nad rozwiązaniem. Ponadto świadczy o powierzchownej znajomości twierdzenia o siecznych; uczniowie nie dostrzegali, że odwrócenie twierdzenia wymaga precyzyjnego opisu układu punktów.
Zawodnik SZ90 w II etapie zdobył 18 punktów (6, 0, 0, 6, 6, 0) i nie awansował do finału 58 OM.
Zawodnik WA62 w II etapie zdobył 30 punktów (6, 6, 6, 0, 6, 6), a w III etapie 17 punktów (5, 6, 0, 6, 0, 0) i otrzymał wyróżnienie.

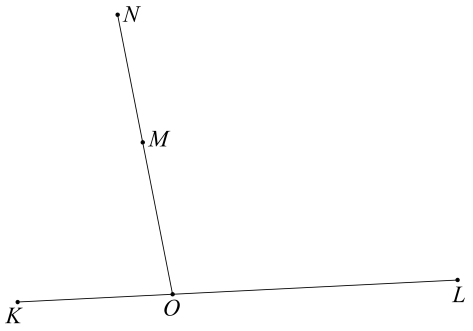
Podsumowanie

Zadanie 5 z II etapu 58 OM rozwiązało poprawnie 177 uczniów, a 36 było na tropie poprawnego rozwiązania.
Wśród uczniów, którzy nie rozwiązali zadania i oddali niepuste prace, 73 poprawnie wskazało środek okręgu opisanego na czworokącie $KLMN$. Uczniowie ci nie potrafili jednak wykazać, że $PK = PM$.
200 uczniów uznało, że w oczywisty sposób z faktu, że $AB \neq CD$ wynika, iż proste AD oraz BC nie są równoległe i nie dowodzili tego faktu. Uczniowie przyjmowali, że proste AD oraz BC mają punkt wspólny i nie zastanawiali się, czy on istnieje. W przypadku poprawnych rozwiązań, uczniowie tracili punkty za brak dowodu, co należy uznać za przesadny rygoryzm, zwłaszcza, że w rozwiązaniu zaproponowanym przez organizatorów też się tego nie dowodzi.
Aż 182 uczniów oddało puste prace.
Uczniowie powoływali się na twierdzenie o siecznych okręgu (o potędze punktu względem okręgu) w 96 pracach. W 77 pracach znalazł się dowód tego twierdzenia.
Dwóch uczniów w swoim rozumowaniu wykorzystało twierdzenie o prostych potęgowych trzech okręgów - w obydwu przypadkach rozwiązania były poprawne.
Trzech uczniów próbowało korzystać z własności inwersji, ale ich rozwiązania nie wyszły poza etap przekształcenia konfiguracji punktów w inwersji względem okręgu.
Jeden uczeń próbował korzystał z twierdzenia Desarguesa i jeden z twierdzenia Newtona, ale w obu przypadkach uczniowie nie znali poprawnych sformułowań tych twierdzeń.
30 uczniów, którzy rozwiązywali zadanie sposobem 4, niepoprawnie korzystało z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o siecznych.
Czterech uczniów próbowało bezskutecznie rozwiązać zadanie metoda analityczną.
Jeden uczeń zastosował metodę zespoloną i mimo dobrej znajomości tej metody utknął w rachunkach.

3.4.2 Rozwiązania, które zawierały błędy

Brak rozważenia wszystkich przypadków

Uczeń KR20 postanowił wykazać, że
$OM \cdot ON = OK \cdot OL$, gdzie O było środkiem okręgu opisanego na $ABCD$. W tym celu udowodnił, że punkty O, K, L i O, M, N są współliniowe oraz przeprowadził obliczenia:



$$OK \cdot OL = (OQ + QL)(OQ - QK) = OQ^2 - QK^2 =$$

$$OA^2 - AQ^2 - QK^2 = OA^2 - AK^2 = r^2 - a^2.$$

Analogicznie otrzymał

$$OM \cdot ON = r^2 - a^2,$$

zatem

$$OK \cdot OL = OM \cdot ON.$$

Następnie stwierdził, że stąd wynika, że punkty M, N, K, L leżą na jednym okręgu. Uczeń jednak nie zauważył, że punkty mogą spełniać warunek $OK \cdot OL = OM \cdot ON$ i nie leżeć na jednym okręgu.

Komentarz.
Taki sposób rozwiązania zaproponowało 30 uczniów. Przyczyną błędu było niepełne zrozumienie twierdzenia o siecznych okręgu.
Zwykle twierdzenie formułuje się następująco:
jeżeli punkt P nie należy do okręgu o_1 oraz dwie proste k i l przecinające się w punkcie P przecinają okrąg o_1 w punktach, odpowiednio, A i B oraz C i D, to spełniony jest warunek $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
Takie sformułowanie nie pokazuje rozróżnienia między dwoma przypadkami: gdy punkt P leży wewnątrz koła i gdy leży poza kołem.
Natomiast zapis warunku $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ w wersji wektorowej daje tę informację:

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PD}} = \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PB}}.$$

Żaden z uczniów nie powoływał się na tę postać twierdzenia o siecznej. Stąd zapewne częściowo wynikały problemy z kontrolowaniem położenia punktów K, L, M, N.
Drugą przyczyną najpewniej jest tendencja do uznawania za prawdziwe twierdzenia odwrotnego bez sprawdzenia, czy istotnie tak jest. Oznacza to najczęściej powierzchowną znajomość tego twierdzenia, bez wnikania w jego strukturę i techniki wykorzystane w dowodzie.

Błędne stosowanie twierdzeń

Uczeń KR41 przyjął, że proste AD i BC przecinają się w punkcie P, chociaż nie wykazał, że taki punkt istnieje. Następnie napisał:
Obierzmy na odcinkach MP, NP, KP takie punkty, odpowiednio, M_1, N_1, K_1, że odcinki MM_1, NN_1, KK_1 mają długość a.
Ponieważ proste MM_1, NN_1, KK_1 przecinają się w punkcie P, to trójkąty MNK i $M_1N_1K_1$ są trójkątami perspektywicznymi, o środku perspektywicznym P.
Dwa trójkąty mają oś perspektywiczną, gdy punkty przecięć odpowiednich prostych MN i M_1N_1, KN i K_1N_1 oraz MK i M_1K_1 są współliniowe, bądź gdy te pary prostych są do siebie równoległe.
Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste MN i M_1N_1 są równoległe, bowiem

$$\frac{PM_1}{M_1M} = \frac{PN_1}{N_1N},$$

gdyż $MM_1 = NN_1 = a$ oraz $PM_1 = PM - a = PN - a = PN_1$.
Z kolei twierdzenie o trójkątach perspektywicznych mówi, że jeżeli trójkąty mają środek perspektywiczny, to mają także oś perspektywiczną.
Zatem trójkąty KMN i $K_1M_1N_1$ mają oś perspektywiczną, wobec tego proste KM i K_1M_1 są równoległe, a stąd wynika, że trójkąty KMP i $K_1M_1P_1$ są podobne, zatem

$$\frac{PM_1}{K_1P} = \frac{PM}{KP} = \frac{PM_1 + a}{K_1P + a}.$$

Nietrudno więc zauważyć, że $MP = KP$.
Mamy więc $LP = KP = MP = NP$, wobec tego punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Komentarz.
Uczeń próbował zastosować twierdzenie Desarguesa, ale podał błędnie warunki równoważne.
Uczeń stwierdził: *Dwa trójkąty mają oś perspektywiczną gdy punkty przecięć odpowiednich prostych MN i M_1N_1, KN i K_1N_1 oraz MK i M_1K_1 są współliniowe, bądź gdy te pary*

prostych są do siebie równoległe. Oczywiście wystarczy, by dwie z podanych prostych były równoległe, aby trójkąty miały środek perspektywy.
Dalsza część rozumowania była już konsekwencją tego błędu: uczeń oparł się na stwierdzeniu, że istnienia środka perspektywy dla trójkątów KMN i $K_1M_1N_1$ oraz równoległości prostych MN i M_1N_1 wynika równoległość prostych KM i K_1M_1.
Widoczna jest powierzchowna znajomość twierdzenia Desarguesa i brak dobrego zrozumienia związków twierdzenia z geometrią rzutową.

Uczeń WR85 napisał:
Oznaczmy miejsca przecięcia się prostych KL i MN z okręgiem jako W_1, W_2 oraz U_1, U_2. Rozpatrzmy czworokąt AW_1DW_2. Bez wątpienia środek przekątnej AD leży na przekątnej W_1W_2, bo AD to również przekątna rombu $AKDL$, zatem połowi się z KL.
AW_1DW_2 jest wpisany w okrąg, zatem zgodnie z twierdzeniem Newtona, środki jego przekątnych i środek okręgu są współliniowe. Środek AD i W_1W_2 leży na prostej W_1W_2, zatem środek okręgu również musi na niej leżeć.
Zatem K i L leżą na jednej średnicy i analogicznie M i N leżą na jednej średnicy.

Komentarz.
Uczeń oczywiście źle zapamiętał twierdzenie Newtona, gdyż mówi ono:
jeżeli czworokąt jest opisany na okręgu, to środki przekątnych czworokąta i środek okręgu wpisanego są współliniowe.
Zawodnik mógł łatwo sprawdzić, że jego „twierdzenie Newtona" nie jest prawdziwe np. rozważając trapez równoramienny, do którego nie należy środek okręgu opisanego na tym trapezie.
Zawodnik WR85 w II etapie uzyskał 4 punkty (0, 2, 0, 2, 0, 0).

Warunek wpisywania czworokąta w okrąg

Uczeń KR04 napisał:
Na to, by punkty K, L, M, N leżały na jednym okręgu potrzeba i wystarcza aby żadne trzy z nich nie leżały jednocześnie na tej samej prostej oraz aby punkty M i L leżały po prawej stronie prostej KN i aby punkt L leżał po prawej stronie prostej KM lub aby punkt M leżał po prawej stronie prostej KL.

Komentarz.
Uczeń wykazał się brakiem zrozumienia pojęcia: warunek wystarczający. Ponadto można przyjąć, że nie znał żadnego z klasycznych warunków wystarczających, skoro stworzył swój własny.
Zawodnik KR04 był uczniem II klasy w V LO w Krakowie; w II etapie zdobył 12 punktów (6, 0, 0, 6, 0, 0).
"Własny warunek" wymyślił także uczeń SZ94:
Wiemy, że na czworokącie możemy opisać okrąg, gdy $KM \cdot LN = KL \cdot MN$.

Uczeń KR14 napisał:
Aby punkty K, L leżały na jednym okręgu, środek tego okręgu musi znajdować się na prostej AD.
Analogicznie, aby punkty M, N leżały na jednym okręgu, środek tego okręgu musi znajdować się na prostej BC.

Oczywistym jest, że jeżeli znajdziemy punkt przecięcia prostej AD i prostej BC, to tym samym znajdziemy środek okręgu na którym leżą punkty K, L, M, N.
Zatem aby dowieść tezy zadania musimy udowodnić tylko, że prosta AD nie jest równoległa do BC.

Komentarz.
Uczeń pomylił warunek konieczny z wystarczającym. Konieczne jest, aby proste AD i BC przecinały się w jednym punkcie, ale nie wystarczy to do wykazania, że punkty np. K i M leżą na jednym okręgu. Charakterystyczne jest także to, że uczeń nie kontrolował swojego rozwiązania, gdyż w żadnym miejscu nie zwrócił uwagi na brak wykorzystania założenia o równych długościach boków obu rombów.

Bardzo podobnie zapisał swoje rozwiązanie WR43:
Punkty M i N są równo oddalone od prostej BC, tak więc wynika stąd, że środki okręgów przechodzących przez punkty M i N znajdują się na prostej BC. Z kolei (analogicznie) środki okręgów przechodzących przez punkty K i L leżą na prostej AD. Tak więc środek okręgu przechodzącego przez punkty K, L, M, N będzie znajdował się w punkcie przecięcia prostych BC i AD. Gdy proste te nie są do siebie równoległe, wówczas istnieje taki punkt P, który będzie środkiem okręgu, na którym leżą punkty K, L, M, N.
Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy proste BC i AD są równoległe. Wówczas nie mają punktu przecięcia.

Próby dynamicznego sposobu rozwiązania

Kilku uczniów próbowało szukać niezmienników przekształceń rombów. Poniżej prezentuję te próby.

Uczeń KR52 napisał:
Przesuńmy romb po okręgu tak, aby punkt C pokrył się z D. Zauważmy, że teraz punktem przecięcia symetralnych LK i $M'N'$ jest punkt D. Jest on oczywiście środkiem okręgu zawierającego punkty L, K, M', N', gdyż $DL = DK = DM' = DN' = a$.
Zauważmy teraz, że przesuwając romb $C'M'B'N'$ po okręgu, punkt przecięcia symetralnych odcinków LK i $M'N'$ „oddala" się od obu rombów, ale zawsze zachodzi równość $EL = EK$ i $EM = EN$, gdzie przez E oznaczamy punkt przecięcia symetralnych odcinków LK i MN.
Zauważmy także, że punkt E oddala się jednakowo od punktu K i od punktu M. Zatem zachodzą równości $EL = EK$ i $EM = EN$ i $EK = EM$. Zatem punkt E jest środkiem okręgu zawierającego punkty K, L, M, N.

Komentarz.
Widoczna jest próba podejścia ‚dynamicznego", która jest jednak jedynie intuicyjna i skazana na niepowodzenie: brak jakiegokolwiek uzasadnienia stwierdzenia *punkt E oddala się jednakowo od punktu K i od punktu M*. Można powiedzieć, że jest to właściwie równoważne tezie zadania.

Uczeń SZ02 zaczął poprawnie (jak WA47 w sposobie 3):
Warunkiem wystarczającym, aby czworokąt mógł być wpisany w okrąg, jest przecięcie się trzech symetralnych jego boków w jednym punkcie, będącym również środkiem okręgu opisanego na

tym czworokącie.
Nie potrafił jednak tego kontynuować:
Poszukamy zatem w tej sytuacji symetralnych przecinających się w jednym punkcie.
Boki KL i MN są przekątnymi rombów $AKDL$ i $BMCN$ o bokach długości a. Z faktu, iż przekątne w rombie przecinają się pod kątem prostym, możemy zauważyć, że symetralne dla tych boków będą przebiegały przez punkty A i D (dla boku KL) oraz B i C (dla MN). Z założeń wiemy też, że $AB \neq CD$, co wyklucza ewentualną równoległość prostych AD i BC. Spotkają się one w jakimś punkcie Q, gdzieś na płaszczyźnie. Będzie to prawdopodobnie środek okręgu, na którym leżą punkty K, L, M, N.
Rozpatrzmy najpierw przypadek graniczny, gdy $a = r$ (gdzie r jest długością promienia okręgu opisanego na $ABCD$). Możemy wtedy zauważyć, że punkty L, M, O (środek tegoż okręgu) pokryją się. Widać wtedy, że $KQ = LQ = NQ$ dzięki czemu warunki zadania są spełnione. Przy czym trójkąty KQL i MQN zawsze będą równoramienne, a więc równości $KQ = QL$ i $MQ = NQ$ zawsze będą spełnione.
Jeśli natomiast $a > r$ lub $a < r$, punkty L i M będą się „odsuwać" od punktu O odpowiednio proporcjonalnie od zależności AD do BC. Zatem trójkąt LOM będzie różnymi wersjami tego samego trójkąta w pewnej skali. Do tego, ze współliniowości wynika, że punkty L i M będą poruszać się po konkretnych prostych. Dlatego $LM \parallel L'M'$ dla dowolnych $a \neq r$.
Tak więc symetralna tego boku zawsze przechodzić będzie przez punkt Q, tworząc odcinki $LQ = MQ$, co prowadzi do stwierdzenia, że na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg, co dowodzi, że K, L, M, N leżą na tym samym okręgu.

Komentarz.
Uczeń rozwiązał zadanie w szczególnym przypadku, a następnie poprzez „dynamiczną" obserwację, próbował przenieść wynik z sytuacji szczególnej na ogólną. Jego rozumowanie nie było poparte żadnymi uzasadnieniami, a jedynie opierało się na przekonaniu autora, że tak musi być.
Uczeń w II etapie zdobył 7 punktów (0, 0, 5, 2, 0, 0), co może oznaczać, że zapis rozwiązania zadania 5 był desperacką próbą zdobycia jeszcze jakiś punktów.

Bardzo podobne rozumowanie przeprowadził uczeń ŁÓ13:
Natomiast, gdy $a \neq r$, punkty K i M uciekają od środka okręgu opisanego O. Gdy a się zmniejsza, obydwie wartości zmieniają się o tyle samo, wobec czego odległość punktów K i M od środka okręgu opisanego O jest taka sama.
Zawodnik ŁÓ13 zdobył w II etapie 14 punktów (6, 2, 0, 6, 0, 0).

Uczeń ŁÓ42 również przedstawił rozwiązanie oparte na pomyśle uogólnienia przypadku szczególnego, ale potrafił swoją intuicję uzasadnić. Napisał:
Rozpatrzmy konkretny czworokąt wpisany w okrąg.
Dla $a = r$ jeden z punktów M, N i jeden z punktów K, L znajduje się w środku okręgu. Bez straty ogólności załóżmy, że te punkty to M i K. Wtedy $M = K$, wtedy $MP = KP$.
Niech E i F będą punktami przecięcia, odpowiednio, przekątnych w rombie $CMBN$ i $AKDL$. Dla ogólnego przypadku

$$MP = \sqrt{EP^2 + EM^2},$$
$$EM = \sqrt{a^2 - EB^2},$$
$$MP^2 = EP^2 - EB^2 + a^2,$$
$$KP^2 = FP^2 - FA^2 + a^2.$$

Jeżeli istnieje wartość a, dla której istnieje okrąg zawierający punkty K, L, M, N wtedy równanie

$$EP^2 - EB^2 + a^2 = FP^2 - FA^2 + a^2$$

jest prawdziwe dla każdej wartości a, więc $MP = KP$, więc punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.
Komentarz do zadania:
Dowód polegał na tym, żeby pokazać, że dla każdego czworokąta $ABCD$ spełniającego warunki zadania istnieje wartość a, dla której teza jest spełniona, a następnie na pokazaniu, że zmiana wartości a nie ma wpływu na prawdziwość tezy dla dowolnego czworokąta.
Zapis rozwiązania jest niepełny; uczeń chciał w istocie stwierdzić, że wartości wyrażeń $EP^2 - EB^2$ i $FP^2 - FA^2$ nie zależą od wyboru wartości a, a wobec zachodzenia równości dla wartości $a = r$ (co uczeń udowodnił), zadanie ma rozwiązanie w sytuacji ogólnej.
Zawodnik ŁÓ42 zdobył w II etapie 19 punktów (2, 2, 5, 5, 5, 0), a w III etapie 5 punktów.

Rozwiązania z przystającymi rombami

Kilku uczniów twierdziło, że podane w zadaniu romby są przystające. Powodem tego jest błędne rozumienie przystawania, zwłaszcza, że uczniowie na rysunkach mieli naszkicowane nieprzystające romby.

Uczeń PO40 stwierdził, że proste AD i CB przecinają się w punkcie P, a następnie napisał: *Warunkiem wpisania czworokąta wypukłego w okrąg jest*

$$\frac{PD}{DA} = \frac{PC}{CB}.$$

Zauważmy, nasze romby $AKDL$ oraz $BNCM$ mają równe boki, co za tym idzie przekątne $AD = BC$, $MN = LK$ oraz pola $\left(\frac{1}{2} \cdot AD \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MN\right)$.

Komentarz.
Uczeń próbował korzystać z nieprawdziwych założeń: najpierw powoływał się na warunek konieczny wpisywalności czworokąta w okrąg (widoczne jest, że musiał się z podobnym warunkiem spotkać, ale go nie rozumiał i nie zapamiętał poprawnie), a następnie założył, że romby są przystające (wnioskował z faktu, że romby mają równe boki).

Uczeń LU90 napisał:
Z warunków zadania wynika, że $BM = CM = AL = DL$. Odcinki te są sobie równe i wynoszą a. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy punkty M i L leżą w środku okręgu w punkcie S. Dowód: Punkty M, N leżą na symetralnej odcinka BC, a punkty K, L leżą na symetralnej odcinka AD. Ponieważ romby są przystające, więc jeden z punktów M, N i jeden z punktów K, L pokrywają się ze sobą (te punkty to M oraz L). Punkt przecięcia symetralnych jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Wniosek z tego, że punkty M, L, S pokrywają się.
Ponadto punkty M, L, S nie są współliniowe. Punkty te byłyby współliniowe, gdyby symetralne boków BC i AD pokrywały się, czyli wtedy, gdyby czworokąt $ABCD$ był trapezem równoramiennym. Ponieważ czworokąt można wpisać w okrąg i $AB \neq CD$, więc ten czworokąt nie może być trapezem równoramiennym o podstawach BC i AD. Punkty te nie są więc współliniowe.
Wystarczy teraz dowieść, że punkty K, N, S leżą na jednym okręgu. Jest to oczywiste, bo na dowolnym trójkącie można opisać okrąg.

Punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Komentarz.
Punktem wyjścia rozumowania ucznia było stwierdzenie, że *romby $AKDL$ i $BMCN$ są przystające*. Jest to tym bardziej zaskakujące, że rysunek wykonany przez ucznia nie potwierdza tego stwierdzenia. Podanie fałszywych założeń można także tłumaczyć niezrozumieniem przez ucznia pojęcia przystawania czworokątów lub próbą dostosowania dowodu do faktu, że punkty M, L, S się pokrywają. Ostatnia obserwacja pochodziła z rysunku, który przedstawiał szczególną sytuację.

3.4.3 Statystyka błędów

Okręg	*u*	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gdański	40	14	4	29	3	7	1	4	1	4	4	11	3
katowicki	69	26	12	48	1	7	13	2	0	6	1	10	1
krakowski	64	18	7	40	4	15	5	8	3	1	2	12	4
lubelski	53	17	12	40	3	6	4	4	0	3	6	10	4
łódzki	32	16	1	22	1	6	3	1	1	3	1	4	1
poznański	23	4	3	14	1	6	2	3	1	3	0	6	2
szczeciński	49	15	5	29	6	7	7	9	0	5	0	12	3
toruński	56	17	7	36	4	12	4	6	0	5	5	12	4
warszawski	118	35	12	55	8	35	20	6	5	0	4	8	8
wrocławski	58	20	8	36	5	13	4	6	2	1	2	6	7
Polska	562	182	71	349	36	114	63	49	13	31	25	91	37

Tabela 64: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 - wielkości w liczbach bezwzględnych.**

Okręg	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gdański	35,0	10,0	72,5	7,5	17,5	2,5	10,0	2,5	10,0	10,0	27,5	7,5
katowicki	37,7	17,4	69,6	1,4	10,1	18,8	2,9	0	8,7	1,4	14,5	1,4
krakowski	28,1	10,9	62,5	6,3	23,4	7,8	12,5	4,7	1,6	3,1	18,8	6,3
lubelski	32,1	22,6	75,5	5,7	11,3	7,5	7,5	0	5,7	11,3	18,9	7,5
łódzki	50,0	3,1	68,8	3,1	18,8	9,4	3,1	3,1	9,4	3,1	12,5	3,1
poznański	17,4	13,0	60,9	4,3	26,1	8,7	13,0	4,3	13,0	0	26,1	8,7
szczeciński	30,6	10,2	59,2	12,2	14,3	14,3	18,4	0	10,2	0	24,5	6,1
toruński	30,4	12,5	64,3	7,1	21,4	7,1	10,7	0	8,9	8,9	21,4	7,1
warszawski	29,7	10,2	46,6	6,8	29,7	16,9	5,1	4,2	0	3,4	6,8	6,8
wrocławski	34,5	13,8	62,1	8,6	22,4	6,9	10,3	3,4	1,7	3,4	10,3	12,1
Polska	32,4	12,6	62,1	6,4	20,3	11,2	8,7	2,3	5,5	4,4	16,2	6,6

Tabela 65: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich prac.**

Okręg	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gdański	15,4	57,7	11,5	26,9	3,8	15,4	3,8	15,4	15,4	42,3	11,5
katowicki	27,9	51,2	2,3	16,3	30,2	4,7	0	14,0	2,3	23,3	2,3
krakowski	15,2	47,8	8,7	32,6	10,9	17,4	6,5	2,2	4,3	26,1	8,7
lubelski	33,3	63,9	8,3	16,7	11,1	11,1	0	8,3	16,7	27,8	11,1
łódzki	6,3	37,5	6,3	37,5	18,8	6,3	6,3	18,8	6,3	25,0	6,3
poznański	15,8	52,6	5,3	31,6	10,5	15,8	5,3	15,8	0	31,6	10,5
szczeciński	14,7	41,2	17,6	20,6	20,6	26,5	0	14,7	0	35,3	8,8
toruński	17,9	48,7	10,3	30,8	10,3	15,4	0	12,8	12,8	30,8	10,3
warszawski	14,5	24,1	9,6	42,2	24,1	7,2	6,0	0	4,8	9,6	9,6
wrocławski	21,1	42,1	13,2	34,2	10,5	15,8	5,3	2,6	5,3	15,8	18,4
Polska	18,7	43,9	9,5	30,0	16,6	12,9	3,4	8,2	6,6	23,9	9,7

Tabela 66: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich niepustych prac.**

Na podstawie tabel 64, 65, 66 można stwierdzić, że zadanie okazało się dosyć łatwe (wg kryteriów olimpijskich): 177 uczniów (na 562) rozwiązało je poprawnie, a dalszych 36 miało dobry pomysł na jego rozwiązanie. Najwięcej poprawnych rozwiązań pojawiło się w okręgach: warszawskim (55), krakowskim i katowickim (po 20). Najgorzej zaprezentowali się uczniowie z okręgu gdańskiego i poznańskiego (po 8), łódzkiego (9) oraz lubelskiego (10). Aż 46% uczniów z okręgu warszawskiego i 34% z okręgu poznańskiego rozwiązało poprawnie zadanie. Najgorzej pod tym względem wypadły okręgi lubelski (19%) i gdański (20%).
12% uczniów z okręgu szczecińskiego otrzymało 2 punkty - jest to dwukrotnie większy procent uczniów niż w całej Polsce.
W całej Polsce 32% uczniów oddało czyste prace. Najwięcej prac bez żadnych notatek oddali uczniowie z okręgu łódzkiego (50%), a najmniej uczniowie z okręgu poznańskiego (17%).
Błędy powierzchownej wiedzy najczęściej pojawiały się u uczniów z okręgów: szczecińskiego (18,4%) i krakowskiego (12%), a najrzadziej u uczniów okręgów łódzkiego (3%) i warszawskiego (5%).
Błędy walki o wynik pojawiały się wyjątkowo często w okręgu poznańskim (13%).
Błędy świadome, czyli blefy pojawiały się wyraźnie częściej w okręgu lubelskim (11%), gdańskim (10%) i toruńskim (9%). Znikoma liczba blefów pojawiła się w pracach uczniów z okręgów: łódzkiego, poznańskiego, katowickiego i szczecińskiego.
Błędne strategie, które nie mogły przynieść sukcesu, wyraźnie częściej pojawiały się u uczniów z okręgów: gdańskiego (27,5%), poznańskiego (26%) i szczecińskiego (24%).
Wśród niepustych prac, 66% uczniów z okręgu warszawskiego rozwiązało poprawnie zadanie.
Wśród uczniów, którzy oddali niepuste prace, aż 17% uczniów z okręgu lubelskiego i 15% uczniów z okręgów gdańskiego blefowało.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
A	123	3	0	7	18	56	42	17	1	1	0	6	14
B	439	179	71	342	18	58	21	32	12	30	25	85	23
Polska	562	182	71	349	36	114	63	49	13	31	25	91	37

Tabela 67: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
A	2,4	0	5,7	14,6	45,5	34,1	13,8	0,8	0,8	0	4,9	11,4
B	40,8	16,2	77,9	4,1	13,2	4,8	7,3	2,7	6,8	5,7	19,4	5,2
Polska	32,4	12,6	62,1	6,4	20,3	11,2	8,7	2,3	5,5	4,4	16,2	6,6

Tabela 68: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu - wielkości wyrażone w procentach.**

Na podstawie tabeli 67 i 68 można zauważyć, że tylko 7 uczniów, którzy nie rozwiązali zadania ani nie mieli dobrego pomysłu na rozwiązanie, przeszło do finału.
78% uczniów, którzy nie weszli do finału, nie potrafiło rozwiązać zadania.
Błędy powierzchownej wiedzy wystąpiły w 14% prac uczniów, którzy weszli do finału, podczas, gdy w pracach pozostałych uczniów stanowiły 7,3%.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
dziewczęta	88	26	19	68	5	7	8	10	2	9	5	20	8
chłopcy	443	125	52	250	31	107	55	39	11	22	20	71	29
Polska	562	182	71	349	36	114	63	49	13	31	25	91	37

Tabela 69: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 w zależności od płci.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
dziewczęta	29,5	21,6	77,3	5,7	8,0	9,1	11,4	2,3	10,2	5,7	22,7	9,1
chłopcy	28,2	11,7	56,4	7,0	24,2	12,4	8,8	2,5	5,0	4,5	16,0	6,5
Polska	32,4	12,6	62,1	6,4	20,3	11,2	8,7	2,3	5,5	4,4	16,2	6,6

Tabela 70: **Błędy popełniane w zadaniu 5.2.58 w zależności od płci - wielkości wyrażone w procentach.**

Na podstawie tabel 69 i 70 można stwierdzić, że porównywalna liczba chłopców i dziewcząt oddawała puste (po ok. 28%). Jednak prace puste i prace bez strategii stanowiły 51% prac dziewcząt i 40% prac chłopców. Chłopcy znacznie lepiej radzili sobie z rozwiązywaniem zadania: prawie 37% z nich rozwiązało zadanie, podczas w przypadku dziewcząt odsetek wyniósł tylko 17%.
Wyraźnie można dostrzec, że błędy powierzchownej wiedzy i walki o wynik znacznie częściej występują w pracach dziewcząt.

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gimnazjum	9	3	1	4	1	2	2	0	0	0	0	0	0
klasa I	80	32	9	51	4	14	11	5	1	3	4	11	3
klasa II	207	61	35	136	9	42	20	17	6	10	9	37	10
klasa III	266	86	26	158	22	56	30	27	6	18	12	43	24
Polska	562	182	71	349	36	114	63	49	13	31	25	91	37

Tabela 71: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 w zależności od klasy, do jakiej uczęszczał uczestnik.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
gimnazjum	33,3	11,1	44,4	11,1	22,2	22,2	0	0	0	0	0	0
klasa I	40,0	11,3	63,8	5,0	17,5	13,8	6,3	1,3	3,8	5,0	13,8	3,8
klasa II	29,5	16,9	65,7	4,3	20,3	9,7	8,2	2,9	4,8	4,3	17,9	4,8
klasa III	32,3	9,8	59,4	8,3	21,1	11,3	10,2	2,3	6,8	4,5	16,2	9,0
Polska	32,4	12,6	62,1	6,4	20,3	11,2	8,7	2,3	5,5	4,4	16,2	6,6

Tabela 72: **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 w zależność od klasy, do której uczęszczał zawodnik - wielkości wyrażone w procentach.**

W tabelach 71 i 72 widać, że najwięcej pustych prac oddawali uczniowie klas I (40%), a najmniej uczniowie klas II (29,5%).
Zauważyć należy, że z zadaniem dobrze radzili sobie startujący w OM gimnazjaliści: na 9 uczniów poprawnie rozwiązało je aż czterech. Uczniowie liceów, niezależnie od klasy, do której uczęszczali, uzyskali podobny wynik: ok. 30% poprawnych rozwiązań.
Uczniowie gimnazjów raczej nie popełniali błędów: albo oddawali puste prace, albo mieli poprawne rozwiązanie; jeden gimnazjalista otrzymał 2 punkty

	u	*br*	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
a	15	8	1	11	0	3	1	0	1	0	1	1	1
b	28	8	3	18	3	6	1	3	1	2	3	7	3
c	16	4	2	8	1	6	1	1	0	0	2	2	1
d	43	12	4	25	3	12	3	5	2	1	1	6	4
e	26	7	1	13	6	5	2	8	0	2	0	8	3
f	16	5	0	8	2	4	2	3	1	0	0	1	4
g	72	18	8	28	6	25	13	3	4	0	1	2	6
h	216	62	19	111	21	61	23	23	9	5	8	27	22
Polska	562	182	71	349	36	114	63	49	13	31	25	91	37

Tabela 73: **Błędy popełniane przez uczniów z wybranych szkół w zadaniu 5.2.58.**

	br	*bs*	*0*	*2*	*5*	*6*	*pw*	*z*	*w*	*bf*	*bł*	*ds*
a	53,3	6,7	73,3	0	20,0	6,7	0	6,7	0	6,7	6,7	6,7
b	28,6	10,7	64,3	10,7	21,4	3,6	10,7	3,6	7,1	10,7	25,0	10,7
c	25,0	12,5	50,0	6,3	37,5	6,3	6,3	0	0	12,5	12,5	6,3
d	27,9	9,3	58,1	7,0	27,9	7,0	11,6	4,7	2,3	2,3	14,0	9,3
e	26,9	3,8	50,0	23,1	19,2	7,7	30,8	0	7,7	0	30,8	11,5
f	31,3	0	50,0	12,5	25,0	12,5	18,8	6,3	0	0	6,3	25,0
g	25,0	11,1	38,9	8,3	34,7	18,1	4,2	5,6	0	1,4	2,8	8,3
h	28,7	8,8	51,4	9,7	28,2	10,6	10,6	4,2	2,3	3,7	12,5	10,2
Polska	32,4	12,6	62,1	6,4	20,3	11,2	8,7	2,3	5,5	4,4	16,2	6,6

Tabela 74: **Błędy popełniane przez uczniów z wybranych szkół w zadaniu 5.2.58 - wielkości wyrażone w procentach.**

Ponad połowa uczniów III LO we Wrocławiu oddało puste prace.

Najlepiej z zadaniem radzili sobie uczniowie XIV LO w Warszawie (39% prac ocenionych na 0 punktów, 53% prac ocenionych na 5 lub 6 punktów), najgorzej - uczniowie III LO we Wrocławiu: 73% prac ocenionych na 0 i 27% prac ocenionych na 5 lub 6 punktów. Wyniki uczniów III LO we Wrocławiu są gorsze niż uczniów z całej Polski.
Aż 23% uczniów z XIII LO w Szczecinie otrzymało 2 punkty.
Błędy powierzchownej wiedzy, znacznie częściej niż w całej populacji, występowały w pracach uczniów XIII LO w Szczecinie (30%) i XIV LO we Wrocławiu (18%). W pracach uczniów III LO we Wrocławiu takie błędy nie występowały, ale wynika to raczej z tego, że uczniowie tego liceum ogólnie mieli poważny problem z rozwiązywaniem tego zadania.
Blefy wyjątkowo często pojawiały się w pracach uczniów III LO w Gdyni i IV LO w Toruniu.

	x	y	$\frac{x}{y}$
Polska	113	250	0,45
okręg gdański	11	19	0,51
okręg katowicki	10	30	0,33
okręg krakowski	14	34	0,41
okręg lubelski	12	22	0,55
okręg łódzki	5	14	0,36
okręg poznański	6	14	0,43
okręg szczeciński	14	28	0,5
okręg toruński	14	30	0,47
okręg warszawski	17	72	0,24
okręg wrocławski	10	27	0,37
dziewczęta	25	40	0,63
chłopcy	88	250	0,35
gimnazjum	0	4	0
klasa I	11	36	0,31
klasa II	42	104	0,4
klasa III	60	146	0,41
a	1	5	0,2
b	8	15	0,53
c	3	10	0,3
d	10	25	0,4
e	10	17	0,59
f	3	9	0,33
g	9	47	0,19

Tabela 75: **Jak wielu uczniów jest przekonanych, że zrobiło zadanie 5.2.58.**

Wśród uczestników II etapu 58 OM ponad 45% z nich, którzy podali, że rozwiązali zadanie, faktycznie go nie rozwiązało. Najbardziej pozytywnie wypadli uczniowie z okręgu warszawskiego i toruńskiego, w których tylko około 23% z nich błędnie oceniło swoje rozwiązanie.
Dziewczęta (62%) częściej niż chłopcy (35%) były bezpodstawnie przekonane o poprawności swojego rozumowania.
Tylko 19% uczniów XIV LO w Warszawie, 20% uczniów III LO we Wrocławiu myliło się w ocenie swojego rozwiązania. 59% uczniów XIII LO w Szczecinie i 53% uczniów III LO w Gdyni błędnie oceniło swoje rozwiązanie.

3.5 Zadanie 1 z III etapu 58 OM

3.5.1 Treść zadania i rozwiązania

W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, odcinek CD jest wysokością, punkt E leży na boku AB, a punkt M jest środkiem odcinka CE. Prosta prostopadła do prostej OM i przechodząca przez punkt M przecina proste AC, BC odpowiednio w punktach K, L. Dowieść, że

$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}.$$

Rozwiązania

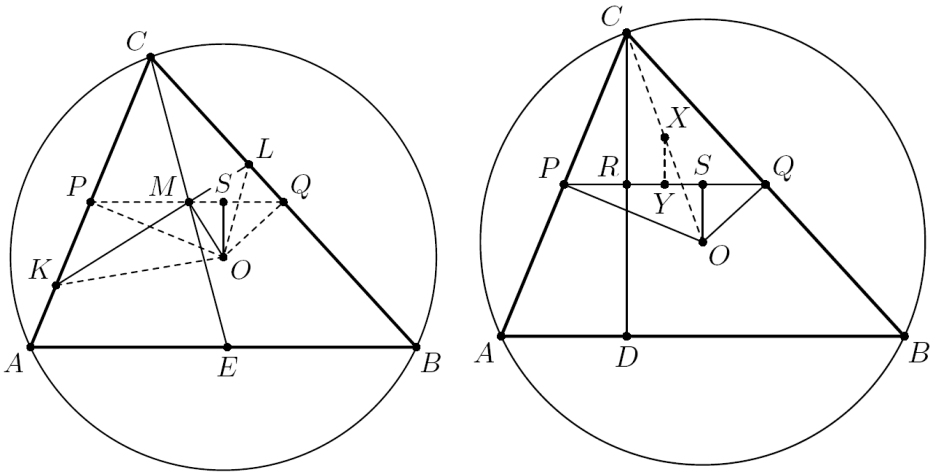
Sposób 1

Sposób zaproponowany przez organizatorów oparty jest na podobieństwie trójkątów OKL i OPQ, wynikającym ze współokręgowości punktów K, P, M, O. Jest to sposób mniej naturalny niż sposób następny, i zapewne dlatego tak poprowadziło dowód tylko sześciu uczniów: KA13, KA44, KA74, KR72, WA16, WA100.

Poprowadźmy przez punkt M prostą równoległą do boku AB, która przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach P i Q. Wówczas punkty P i Q są odpowiednio środkami boków AC i BC. Ponieważ punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, więc $\measuredangle APO = 90°$. Ponadto $\measuredangle KMO = 90°$. Stąd wynika, że punkty K, P, M, O leżą na jednym okręgu, którego średnicą jest odcinek KO. Wobec tego $\measuredangle OKM = \measuredangle OPM$. Analogicznie dowodzimy, że $\measuredangle OLM = \measuredangle OQM$. Z równości tych wynika, że trójkąty OKL i OPQ są podobne. Oznaczając zatem przez S rzut prostokątny punktu O na prosta PQ uzyskujemy

$$\frac{LM}{MK} = \frac{QS}{SP}.$$

Oznaczmy przez X środek odcinka OC oraz niech Y, R będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów X i C na prosta PQ.



Ponieważ $\measuredangle OPC = \measuredangle OQC = 90°$, więc punkty C, P, O, Q leżą na jednym okręgu, którego środkiem jest punkt X. Zatem $PX = XQ$, a więc $PY = YQ$. Ponadto punkt X jest środkiem odcinka OC, więc $RY = YS$. Stąd uzyskujemy $PR = QS$. Wobec tego

$$\frac{QS}{SP} = \frac{PR}{RQ} = \frac{AD}{DB}.$$

Ponieważ $\frac{LM}{MK} = \frac{QS}{SP}$, zatem otrzymujemy tezę.

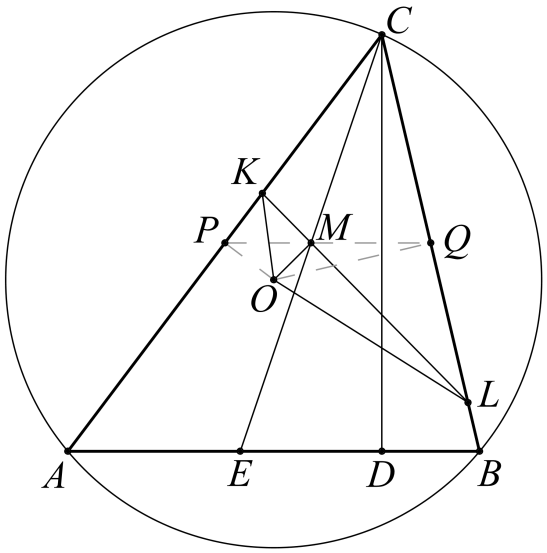
□

Komentarz.
Zadanie to nadaje się bardzo dobrze jako propozycja na uogólnienie poprzez dostrzeżenie tych elementów dowodu, które można zobaczyć w szerszym kontekście.
Zauważmy, że w dowodzie korzystamy z własności punktu O, jako środka okręgu, tylko przy stwierdzeniu, że punkty P, M, Q są współliniowe. Zatem ten sam dowód - z minimalnymi zmianami - stanowi uzasadnienie następującego twierdzenia.
Przez punkt M trójkąta ostrokątnego ABC prowadzimy prostą równoległą do boku AB przecinającą boki AC i BC w punktach, odpowiednio, P i Q. Niech K, L będą punktami wspólnymi prostej prostopadłej do prostej OM i przechodzącej przez punkt M z, odpowiednio, prostymi AC i BC.
Wykazać, że

$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}.$$

Sposób 2
Sposób 2 oparty jest na, łatwiejszym do spostrzeżenia, podobieństwie trójkątów LMO i CDB. Przedstawione rozwiązanie jest autorstwa ucznia SZ40.

Poprowadźmy przez punkt M prostą równoległą do boku AB, która przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach P i Q. Wówczas punkty P i Q są odpowiednio środkami boków AC i BC.
Jeżeli $P = K$ i $Q = L$, to $\measuredangle OLM = \measuredangle CAD$ i $\measuredangle OKM = \measuredangle CBD$. Zatem trójkąty KOM i CAD oraz LMO i CDB są podobne. Stąd już wynika teza.
Załóżmy, że $P \neq K$ i $Q \neq L$.
Przyjmijmy, że punkt K leży odcinku PC, a punkt L na półprostej QB (gdy będzie na odwrót, rozumowanie jest analogiczne).
Ponieważ punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, więc $\measuredangle APO = 90°$. Ponadto $\measuredangle KMO = 90°$. Stąd wynika, że punkty K, P, M, O leżą na jednym okręgu, którego średnicą jest odcinek KO. Wobec tego



$$\measuredangle KOM = \measuredangle KPM = \measuredangle CPQ = \measuredangle CAB.$$

Zatem trójkąty KOM i CAD są podobne, a stąd

$$\frac{KM}{OM} = \frac{CD}{AD}. \tag{26}$$

Ponieważ $\measuredangle OML = \measuredangle OQL = 90°$, punkty L, Q, M, O leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\measuredangle MOL = \frac{\pi}{2} - \measuredangle OLM = \frac{\pi}{2} - \measuredangle OQM = \measuredangle PQC = \measuredangle DBC.$$

Zatem trójkąty LMO i CDB są podobne, czyli

$$\frac{ML}{OM} = \frac{CD}{DB}. \tag{27}$$

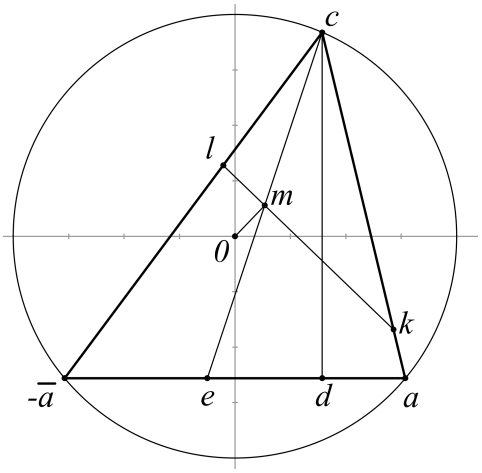
Dzieląc stronami równości (26) i (27) otrzymujemy tezę.

□

Komentarz.
Takie rozwiązanie zaprezentował uczeń SZ40.
Ponadto 31 uczniów w swoich rozwiązaniach wykorzystywało motyw podobieństwa trójkątów LMO i CDB oraz KOM i CAD. 20 uczniów w zasadzie wykorzystało motyw podobieństwa trójkątów poprzez zapisywanie odpowiednich proporcji długości boków z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kątów w trójkątach prostokątnych.
Uczniowie: WA180, WA09, WA87, WA04, WA23 otrzymali za rozwiązanie po 2 punkty, gdyż nie rozważyli wszystkich możliwych przypadków związanych z położeniem punktów K i L względem punktów P i Q.
Można zatem przyjąć, że rozwiązanie sposobem 2 było rozwiązaniem naturalnym.

Sposób 3

Dana jest płaszczyzna zespolona.
Niech trójkąt ABC będzie wpisany w okrąg o środku 0 i promieniu 1. Punktom A, B, C, D, E, M przypiszmy liczby zespolone $a, -\overline{a}, c, d, e, m$.



Punkty $a, -\overline{a}, c$ leżą na okręgu o środku 0 i promieniu 1, więc $a \cdot \overline{a} = 1, c \cdot \overline{c} = 1$. Punkt m jest środkiem odcinka ec, zatem $m = \frac{e+c}{2}$.
Ponieważ punkt e jest współliniowy z punktami $a, -\overline{a}$, zatem

$$a - e = \overline{a} - \overline{e}.$$

Stąd

$$\overline{e} = e + \frac{1}{a} - a.$$

Punkty a, k, c są współliniowe, zatem

$$\overline{a}k + \overline{k}c + \overline{c}a = a\overline{k} + k\overline{c} + c\overline{a}.$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\overline{k}(c-a)ac + k(c-a) = (c-a)(c+a).$$

Ponieważ $c \neq a$,

$$\overline{k} = \frac{a+c-k}{ac}. \tag{28}$$

Prosta km jest prostopadła do prostej $0m$, zatem

$$\frac{k-m}{m} = -\overline{\left(\frac{k-m}{m}.\right)} \tag{29}$$

Po wykonaniu przekształceń i wykorzystaniu faktu $m = \frac{e+c}{2}$ otrzymujemy

$$\frac{k}{e+c} + \frac{ac\overline{k}}{c+a+aec-a^2c} = 1. \tag{30}$$

Z (28) i (30) dostajemy:

$$k = \frac{ac(c+e)}{ac-1}.$$

Postępując analogicznie dla punktu l otrzymujemy:

$$l = \frac{c(e+c)}{a+c}.$$

Prosta cd jest prostopadła do prostej ae i punkty $-\overline{a}, d, a$ są współliniowe, zatem

$$c - d = -\overline{c} + \overline{d} \qquad \text{i} \qquad d - e = \overline{d} - \overline{e}.$$

Stąd otrzymujemy

$$d = \frac{ac^2 + a^2 + a - c}{2ac}.$$

Aby wykazać tezę, wystarczy udowodnić równość

$$\frac{k-m}{m-l} = \frac{d+\overline{a}}{a-d}.$$

Wykonujemy przekształcenia

$$\frac{k-m}{m-l} = \frac{\frac{ac(c+e)}{ac-1} - \frac{e+c}{2}}{\frac{e+c}{2} - \frac{c(e+c)}{a+c}} = \frac{(ac+1)(a+c)}{(ac-1)(a-c)},$$

$$\frac{d+\overline{a}}{a-d} = \frac{d+\frac{1}{a}}{a-d} = \frac{c+a+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{a-c+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}} = \frac{(ac+1)(a+c)}{(ac-1)(a-c)}.$$

Zatem $\frac{k-m}{m-l} = \frac{d+\overline{a}}{a-d}$, co kończy dowód tezy zadania.

□

Komentarz.
Rozwiązanie, wykorzystujące metodę liczb zespolonych przedstawił tylko uczeń KR22.
Metodę geometrii analitycznej, jako sposób rozwiązania zadania, wybrało pięciu uczniów: WA82, SZ30, KA43, WA76, WR42. Wszyscy uzyskali po 6 punktów. Wybór metody analitycznej jest zaskakujący: sposób okazywał się żmudny, chociaż niewymagający rachunkowo. Wszystkie obliczenia przebiegały w sposób naturalny i niepotrzebne były żadne „tricki" czy też sprytne łączenie warunków. Przeciętnie takie rozwiązanie zajmowało 3-4 strony tekstu (głównie przeliczeń).

3.5.2 Rozwiązania, które zawierały błędy

Uczeń WA84 napisał:
Wiadomo, że CD i CO są prostymi izogonalnie sprzężonymi dla kąta ACB, jako wysokość opuszczona z punktu C i prosta przechodząca przez C oraz środek okręgu opisanego na ABC. Rozważmy teraz zbiór odcinków KL. Każdy z odcinków przechodzi przez M, gdzie $MO \perp KL$, stąd O jest jednym z ognisk elipsy stycznej do KL, a drugie ognisko leży na CD, ponieważ ogniska elips wpisanych w kąt leżą na prostych izogonalnie sprzężonych, a ponieważ punkt styczności jest w M, to $\frac{KM}{LM} = const$, zatem pozostaje udowodnić, że choć dla jednego przypadka zachodzi

$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}.$$

Komentarz.
Uczeń WA84 przedstawił rozumowanie, które wskazywało na wiedzę w zakresie własności elipsy wpisanej w trójkąt, ale wiedza ta była powierzchowna.

Uczeń rozważał zbiór odcinków KL, z których każdy przechodził przez punkt M i był prostopadły do MO. Jednakże dla ustalonego punktu M istniał tylko jeden odcinek KL. Należało zatem rozumieć, że uczeń chciał spojrzeć na zadanie w sposób „dynamiczny" i ruszać punktem M.
Uczeń pisał, że proste CD i CO są izogonalnie sprzężone i stąd wnioskował, że ognisko elipsy musi znajdować się w punkcie O. Wówczas, czego uczeń już nie precyzował, drugie ognisko elipsy wpisanej w trójkąt ABC znajduje się w ortocentrum tego trójkąta. Nieprawdą jednak jest, że prosta KL jest styczna do tej elipsy w punkcie M - uczeń pomylił w tym miejscu własności okręgu z własnościami elipsy, gdyż styczna do elipsy nie musi być prostopadła do odcinka łączącego jedno z ognisk z punktem styczności.
Trudno ustalić, na jakiej podstawie uczeń twierdzi, że $\frac{KM}{LM} = const.$, gdyż to nie wynika z podanych wcześniej informacji. Można przypuszczać, że skojarzył to nieprawidłowo z własnością, iż suma odległości dowolnego punktu elipsy od jej ognisk jest stała.
Wyraźnie widać, że uczeń słyszał o własności prostych izogonalnych i na siłę próbował na tej podstawie zrobić dowód.
Można powiedzieć, że to postawa charakterystyczna dla ucznia ze stajni olimpijskiej: trzeba znaleźć ogólną metodę, za pomocą której zadanie da się rozwiązać od razu. Stąd też wynikał blef, gdyż zawodnik wszystko pragnął nagiąć do metody, która wydawała się właściwa.
Zawodnik WA84 był uczniem III klasy XIV LO w Warszawie; w finale zdobył 0 punktów, a w II etapie miał ich 19.

Spośród 123 uczniów biorących udział w III etapie 58 OM, zadanie 1.3.58 rozwiązało poprawnie 64 zawodników, a 9 uczniów przedstawiło dobry pomysł na rozwiązanie, lecz z powodu braku rozważenia wszystkich przypadków bądź braku determinacji i konsekwencji, nie uzyskali ani 5 ani 6 punktów.
34 zawodników oddało prace bez żadnych notatek. Wśród dwudziestu uczniów, którzy otrzymali 0 lub 2 punkty, jeden uczeń popełnił błąd powierzchownej wiedzy, trzech blefowało, a u sześciu widoczne były oznaki zmęczenia intelektualnego.
Spośród 73 uczniów, którzy twierdzili, że rozwiązali zadanie, tylko czterech myliło się w ocenie swojej pracy. Pozostali poprawnie rozwiązali zadanie lub mieli mocne podstawy sądzić, że je rozwiązali (chodzi tu przede wszystkim o uczniów, którzy nie dostrzegli pewnych przypadków, które należało krótko skomentować lub przynajmniej dostrzec ich występowanie).

3.6 Twierdzenia wykorzystywane w rozwiązaniach zadań geometrycznych

3.6.1 Stosowane twierdzenia

Twierdzenie 13. *Twierdzenie o odcinkach stycznych (najmocniejsze twierdzenie geometrii)*

Jeżeli przez punktu A leżący poza okręgiem S przechodzą proste styczne w punktach P i Q do okręgu S, to $AP = AQ$.

Twierdzenie 14. *Twierdzenie o dwusiecznej*

Jeżeli dwusieczna kąta ACB w trójkącie ABC przecina bok AB w punkcie D, to $\frac{CA}{CB} = \frac{AD}{BD}$.

Twierdzenie 15. *Twierdzenie Ptolemeusza*

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $AB \cdot CD + AD \cdot CB = AC \cdot BD$.
Dla dowolnych czterech punktów płaszczyzny A, B, C, D zachodzi nierówność

$$AB \cdot CD + AD \cdot CB \geq AC \cdot BD$$

.

Twierdzenie 16. *Twierdzenie o siecznych okręgu*

Dany jest okrąg S i punkt O, który nie należy do okręgu S. Dwie proste k i l przechodzące przez punkt O przecinają okrąg S w punktach, odpowiednio, A, B oraz C, D wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{OB}}$.

Twierdzenie 17. *Twierdzenie o osiach potęgowych trzech okręgów*

Na płaszczyźnie dane są trzy okręgi: o_1, o_2, o_3. Osie potęgowe okręgów o_1 i o_2, o_2 i o_3, o_3 i o_1 przecinają się w jednym punkcie lub są parami równoległe.

Twierdzenie 18. *Własności inwersji*

Obrazem okręgu przechodzącego przez środek okręgu inwersyjnego jest prosta.

Twierdzenie 19. *Twierdzenie Newtona*

Jeżeli czworokąt jest opisany na okręgu, to środki przekątnych czworokąta i środek okręgu wpisanego są współliniowe.

Twierdzenie 20. *Twierdzenie Desarguesa*

Trójkąty T_1 i T_2 mają środek perspektywy wtedy i tylko wtedy, gdy mają oś perspektywy.

Twierdzenie 21. *Twierdzenie Pascala*

Jeżeli sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w krzywą stożkową, to punkty przecięcia par prostych BC i EF, AB i DE, AF i CD są współliniowe.

Twierdzenie 22. *Twierdzenie Brianchona*
Jeżeli sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na krzywej stożkowej, to proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Twierdzenie 23. *Twierdzenie Menelaosa*

Dany jest trójkąt ABC. Na prostych AB, BC i CA wybrano odpowiednio punkty D, E, F. Punkty D, E, F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = 1$$

Twierdzenie 24. *Twierdzenie Cevy*

Dany jest trójkąt ABC. Na prostych AB, BC i CA wybrano odpowiednio punkty D, E, F. Proste DC, EA i FB przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = 1$$

Twierdzenie 25. *Liczby zespolone w geometrii*

1. *Wektor $\overrightarrow{Oz}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{Ow}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{z}w + z\overline{w} = 0$.*
2. *Trójkąty: T_1 o wierzchołkach a, b, c i T_2 o wierzchołkach d, e, f są niezdegenerowane i jednakowo zorientowane. Wówczas trójkąt T_1 jest podobny do trójkąta T_2 wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$\frac{f-d}{e-d} = \frac{c-a}{b-a}.$$
3. *Punkty a, b, c są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a = a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a}.$$
4. *Punkty a, b, c, d są współliniowe lub współokręgowe wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$\frac{(a-c)(d-c)}{(d-b)(a-b)} = \overline{\left(\frac{(a-c)(d-c)}{(d-b)(a-b)}\right)}.$$
5. *Rzutem punktu c na prostą ab jest punkt*
$$\frac{\overline{a}b - a\overline{b} + (\overline{a} - \overline{b})c + (a-b)\overline{c}}{2(\overline{a} - \overline{b})}.$$
6. *Jeżeli styczne do okręgu jednostkowego o środku O w punktach k, l przecinają się w punkcie b, to*
$$b = \frac{2kl}{k+l}.$$
7. *Jeżeli prosta przechodząca przez a i c oraz prosta przechodząca przez b i d ($a \neq c, b \neq d$) przecinają się w punkcie e, to*
$$e = \frac{\overline{a}c(b-d) + \overline{b}d(c-a) + \overline{c}a(d-b) + \overline{d}b(a-c)}{\overline{a}(b-d) + \overline{b}(c-a) + \overline{c}(d-b) + \overline{d}(a-c)}.$$
8. *Pole trójkąta abc o dodatniej orientacji wyraża się wzorem:*
$$S = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1. \end{vmatrix}$$

3.6.2 Literatura do nauki geometrii płaskiej

W przypadku zadań na nierówności dostępna jest obszerna literatura adresowana właśnie do olimpijczyków, zwłaszcza książki Lva Kourliandtchika ([66], [65], [67]).
W przypadku geometrii sytuacja wygląda nieco odmiennie.
Trudno znaleźć pozycje, w których - analogicznie jak w przypadku nierówności - znajduje się przegląd *tricków* i metod charakterystycznych dla olimpijskich zadań geometrycznych.
Literatura w języku polskim zasadniczo ogranicza się do pozycji: *Geometria trójkąta* S.I. Zydlera, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej* H.S.M. Coxetera ([37]), książeczek z serii *Biblioteczka Matematyczna* oraz serii *Zajęcia fakultatywne*. Wszystkie wyżej wymienione pozycje były wydawane przed 1989 rokiem, a zatem ich dostępność jest ograniczona (w zasadzie tylko w bibliotekach i antykwariatach).
Stąd też najczęściej uczniowie korzystają publikacji obcojęzycznych. Do najbardziej cenionych należy książka Prasołowa *Zadaczi po płanimetrii* ([107]), która w wersji elektronicznej jest dostępna na stronie www.math.ru. Wśród uczniów krąży także wersja elektroniczna tłumaczenia tejże książki na angielski.
Ponadto na stronie www.math.ru dostępne są także inne, bardzo cenne z punktu widzenia olimpijczyka, pozycje z zakresu geometrii płaskiej i przestrzennej autorstwa W.W. Prasołowa oraz I.F. Szarygina.
W zakresie zastosowania liczb zespolonych w geometrii najbardziej popularne są prace J.P. Ponarina *Algebra kompleksnych cziseł w geometriczeskich zadaczach* ([106]) oraz Titu Andreescu i Dorin Andrica *Complex Numbers from A to ... Z* ([4]).

3.6.3 Twierdzenia wykorzystane do rozwiązywania zadań geometrii płaskiej

Zadanie 2.2.57

Twierdzenie o odcinkach stycznych bywa nazywane przez uczniów *Najmocniejszym Twierdzeniem Geometrii*. W zadaniu 2 z II etapu 57 OM należało skorzystać z tego twierdzenia. 90 uczniów powołało się na to twierdzenie, w tym 66 uczniów, którym nie udało się rozwiązać zadania. Ponieważ 230 uczniów przedstawiło jakiekolwiek zapisy w swoich czystopisach oznacza to, że 140 spośród nich nie dostrzegło możliwości zastosowania tego twierdzenia.

Twierdzenie o dwusiecznej wykorzystało w swoich rozwiązaniach sześciu uczniów, z czego dwóch z powodzeniem.

Twierdzenie Ptolemeusza było wykorzystywane w 10 pracach, przy czym w czterech spowodowało, że uczniowie otrzymali poprawne rozwiązanie.

Twierdzenie o potędze punktu względem okręgu wykorzystywało trzech uczniów, ale tylko jeden z nich rozwiązał zadanie poprawnie.

Z własności obrazu okręgu w inwersji próbowało skorzystać czterech uczniów. Wszystkie próby były nieudane.

Zadanie 5.2.57

Twierdzenie Ptolemeusza stosowało 14 uczniów, z czego 9 rozwiązało zadanie.
Twierdzenie o potędze punktu względem okręgu stosowało 12 uczniów, z czego 5 rozwiązało zadanie poprawnie.
Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie wykorzystywało 5 uczniów; tylko jeden z nich nie rozwiązał zadania.
Własności inwersji (obraz prostej i okręgu, konforemność) stosowało 10 uczniów, z czego poprawnie rozwiązało zadanie siedmiu uczniów.
Dwóch uczniów stosowało twierdzenia charakterystyczne dla metody zespolonej.

Wielu uczniów stosowało także twierdzenia: sinusów, cosinusów, Talesa, Pitagorasa, ale są one umieszczone w programie szkoły średniej i nie są specyficzne dla uczniów biorących udział w OM.
Zatem tylko 43 uczniów (spośród 560) próbowało stosować twierdzenia specyficzne dla olimpiady.

Zadanie 3.3.58

Uczniowie WA30, KR01, KR11 próbowali stosować twierdzenie Cevy.
Uczniowie KR41 i KR36 próbowali stosować twierdzenie Desarguesa.
Uczniowie WR01, TO80, KR23, WA11, KR70 próbowali stosować twierdzenie Branchona.
Trzech uczniów: KR22, KR32 i WA90 próbowało, bezskutecznie, wykorzystać liczby zespolone do rozwiązania zadania.
Uczniowie KA62 i WA05 próbowali, nieskutecznie, rozwiązywać metodami geometrii analitycznej.
Zawodnik WA30 był uczniem XIV LO w Warszawie. Zawodnicy KR01, KR11, KR23, KR36, KR41 i KR70 byli uczniami V LO w Krakowie. Zawodnik WR01 był uczniem XIV LO we Wrocławiu.
Żaden uczeń, który próbował zastosować twierdzenia spoza programu nauczania matematyki w liceum nie rozwiązał zadania.

Zadanie 5.2.58

Uczniowie powoływali się na twierdzenie o siecznych okręgu (o potędze punktu względem okręgu) w 96 pracach. W 77 pracach znalazł się dowód tego twierdzenia.
Dwóch uczniów w swoim rozumowaniu wykorzystało twierdzenie o prostych potęgowych trzech okręgów - w obydwu przypadkach rozwiązania były poprawne.
Trzech uczniów próbowało korzystać z własności inwersji, ale ich rozwiązania nie wyszły poza etap przekształcenia konfiguracji punktów w inwersji względem okręgu.
Jeden uczeń próbował korzystał z twierdzenia Desarguesa i jeden z twierdzenia Newtona, ale w obu przypadkach uczniowie nie znali poprawnych sformułowań tych twierdzeń.
30 uczniów, którzy rozwiązywali zadanie sposobem 4, niepoprawnie korzystało z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o siecznych.
Czterech uczniów próbowało bezskutecznie rozwiązać zadanie metoda analityczną.
Jeden uczeń zastosował metodę zespoloną i mimo dobrej znajomości tej metody utknął w rachunkach.

Zadanie 1.3.58

Poza cechami podobieństwa trójkątów i podstawowymi własnościami funkcji trygonometrycznych, w poprawnych rozwiązaniach zadania 1.3.58 nie były stosowane żadne twierdzenia spoza podstawy programowej. Jedynie rozwiązanie wykorzystujące liczby zespolone odnosiło się do własności obiektów na płaszczyźnie zespolonej.

3.6.4 Kanon metod i twierdzeń geometrii płaskiej

Postanowiłem sformułować kanon („podstawę programową olimpijczyka") twierdzeń i metod geometrycznych (spoza podstawy programowej obowiązującej w szkołach ponadgimnazjalnych), które powinny znajdować się w repertuarze zawodnika startującego w Olimpiadzie Matematycznej.

1. Konstrukcje geometryczne. Metoda miejsc geometrycznych.

2. Punkty szczególne trójkąta.
3. Twierdzenie Menelaosa. Twierdzenie Cevy. Twierdzenie Stewarta.
4. Twierdzenie o okręgu opisanym.
5. Metoda środków ciężkości.
6. Twierdzenie Ptolemeusza. Nierówność Ptolemeusza.
7. Twierdzenie Newtona.
8. Prosta Eulera. Prosta Simpsona. Okrąg Feuerbacha.
9. Twierdzenie o potędze punktu względem okręgu.
10. Twierdzenie Brianchona. Twierdzenie Pascala.
11. Inwersja. Własności inwersji.
12. Własności przekształceń afinicznych.
13. Własności przekształceń rzutowych. Twierdzenie Desarguesa.
14. Własności geometryczne krzywych stożkowych.
15. Metoda liczb zespolonych.
16. Własności iloczynu skalarnego i wektorowego.

4 Analiza rozwiązań zadań stereometrycznych

4.1 Zadanie 5 z III etapu 57 OM

4.1.1 Treść i rozwiązania zadania

Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Rozwiązania

Sposób 1

Sposób zaproponowany przez organizatorów opiera się na analizie przystawania odpowiednich trójkątów w czworościanie oraz wykorzystaniu przekształceń geometrycznych w przestrzeni.

Oznaczmy przez s sferę wpisaną w czworościan $ABCD$. Rozpoczniemy od wykazania, ze trójkąty ABC i ABD są przystające. Niech E będzie środkiem krawędzi AB. Ponieważ K i L są punktami styczności sfery s do ścian czworościanu $ABCD$, to $AK = AL$ i $BK = BL$, skąd wynika, że trójkąty AKB i ALB są przystające. Ich środkowe KE i LE mają jednakową długość, skąd dostajemy $CE = 3 \cdot KE = 3 \cdot LE = DE$. Ale $\measuredangle CEB = \measuredangle KEB = \measuredangle LEB = \measuredangle DEB$, więc trójkąty BEC i BED są przystające. Analogicznie dowodzimy, że trójkąty AEC i AED są przystające. Zatem trójkąty ABC i ABD są przystające.
Niech M i N będą punktami styczności sfery s odpowiednio ze ścianami BCD i CDA. Otrzymujemy następujące pary trójkątów przystających: BKC i BMC; BLD i BMD; AKC i ANC; ALD i AND; CMD i CND. Oznaczmy: $\alpha = \measuredangle AKC, \beta = \measuredangle BKC$. Wtedy $\measuredangle ALD = \alpha$ oraz $\measuredangle BLD = \beta$, gdyż trójkąty ABC i ABD są przystające. Zatem $\measuredangle ANC = \measuredangle AKC = \alpha$, $\measuredangle AND = \measuredangle ALD = \alpha$, $\measuredangle BMC = \measuredangle BKC = \beta$, $\measuredangle BMD = \measuredangle BLD = \beta$. Stąd otrzymujemy $\measuredangle DNC = 360^\circ - 2\alpha$, jak również $\measuredangle DMC = 360^\circ - 2\beta$. Ale $\measuredangle DMC = \measuredangle DNC$, skąd $\alpha = \beta$. Zatem $\measuredangle AKE = \measuredangle BKE$, więc KE jest jednocześnie dwusieczną i środkową w trójkącie AKB. Stąd $AK = BK$, a więc $AC = BC$. Ostatecznie otrzymujemy więc $AC = BC = AD = BD$.
Przez każdą krawędź czworościanu $ABCD$ poprowadźmy płaszczyznę równoległą do przeciwległej krawędzi czworościanu. Płaszczyzny te wyznaczają równoległościan. W każdej z jego ścian jedna przekątna jest krawędzią czworościanu $ABCD$, a druga przekątna jest równa i równoległa do przeciwległej krawędzi tego czworościanu. Ponieważ przeciwległe krawędzie czworościanu $ABCD$ są równe, więc wszystkie ściany otrzymanego równoległościanu są prostokątami. A zatem równoległościan ten jest prostopadłościanem. Wynika stąd w szczególności, ze prosta łącząca środki krawędzi AD i BC jest prostopadła do tych krawędzi. Rozpatrzmy przekształcenie będące obrotem o kąt 180° wokół prostej łączącej środki krawędzi AD i BC. W wyniku tego przekształcenia czworościan $ABCD$ przechodzi na siebie, więc sfera s też musi przejść na siebie. Ponadto ściany ABC i ABD przechodzą odpowiednio na ściany DCB i DCA, a zatem środki ciężkości ścian DCB i DCA pokrywają się z punktami M i N. Wówczas pokazujemy, że środkowe każdej ze ścian są tej samej długości, skąd wnioskujemy, że wszystkie krawędzie czworościanu $ABCD$ są równej długości. Znaczy to, że czworościan $ABCD$ jest foremny.

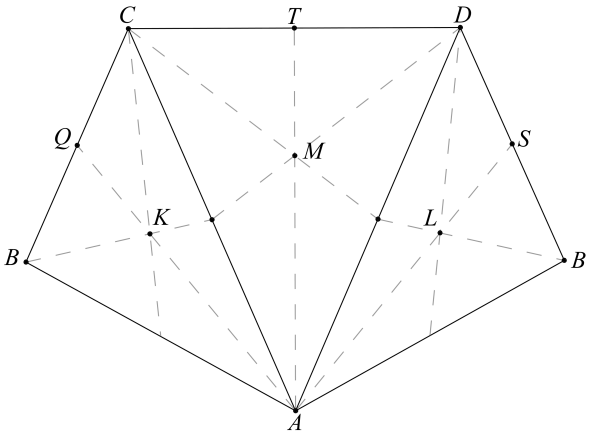
□

Sposób 2

Punkty E, F, G, H, J są środkami odcinków, odpowiednio, AB, BC, CA, BD, DA.
Wiadomo, że wszystkie odcinki od danego punktu do punktów styczności z kulą są przystające.

Z tego wynika, że:

$$AK = AL, BK = BL, EK = EL.$$



Zatem:

$$AF = AH, BG = BJ, EC = ED.$$

Ale $AC^2 = \frac{8}{9}\left(AF^2 + CE^2 - \frac{1}{2}BG^2\right) = \frac{8}{9}\left(AH^2 + DE^2 - \frac{1}{2}BJ^2\right) = AD^2$ *(skorzystałem ze wzoru na środkową). Analogicznie dowodzę, że* $BC = BD$. *W takim razie* $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$, *a trójkąty* ACD *i* BCD *są równoramienne.*
Rozłóżmy na płaszczyźnie ściany ABC, ACD *i* ABD.
Punkt styczności M *kuli i płaszczyzny* ACD *musi spełniać warunki:*

$$CK = CM, AK = AM, DL = DM.$$

Ale $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$, *czyli* $CP_1 = DP_2, CK = DL$, *czyli punkt* M *leży na symetralnej boku* CD.
Niech $J \in CD, CJ = CD$, $AB = CD = a$, $AC = DA = c$, $CB = DB = b$. *Mamy:*

$$AM = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}}, AJ = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CJM *dostajemy:* $(AJ - AM)^2 + CJ^2 = CM^2$, *bo* $AJ - AM = JM$, *gdyż prosta* JM *jest symetralną odcinka* CD *i* $AD = AC$.
Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}} - \sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}}\right)^2,$$

$$\frac{9c^2 + 3a^2 - 3b^2}{9} = \sqrt{\frac{8a^2c^2 + 8c^4 - 4b^2c^2 - 2a^4 - 2a^2c^2 + a^2b^2}{9}},$$

$$9c^4 + a^4 + b^4 + 6a^2c^2 - 6b^2c^2 - 2a^2b^2 = 8a^2c^2 + 8c^4 - 4b^2c^2 - 2a^4 - 2a^2c^2 + a^2b^2,$$

$$3a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 3a^2b^2 = 0. \tag{31}$$

Analogiczne rozważenie trójkątów ABC, BCD i ABD daje równanie:

$$3a^4 + c^4 + b^4 - 2c^2b^2 - 3a^2c^2 = 0. \tag{32}$$

Odejmując równania (31) i (32) stronami otrzymujemy: $3a^2(b^2 - c^2) = 0$*, czyli* $b = c$*. Podstawiając* $b = c$ *do równania (31) otrzymujemy* $3a^2(a^2 - c^2) = 0$*, czyli* $a = c$*.*
Zatem czworościan jest foremny.

□

Komentarz.
Rozwiązanie sposobem 1 przedstawili uczniowie: SZ40, TO72, TO73 i WA68.
Rozwiązanie sposobem 2 przedstawił uczeń KR04.

Zawodniczka SZ40 była uczennicą I klasy w XIII LO w Szczecinie. W finale zdobyła 20 punktów (0, 2, 6, 6, 6, 0) i uzyskała tytuł laureata III stopnia.
Zawodnik TO72 był uczniem II klasy w VI LO w Bydgoszczy. W finale zdobył 17 punktów (0, 0, 0, 6, 6, 5) oraz wyróżnienie.
Zawodnik KR04 był uczniem I klasy w II LO w Krakowie. W finale zdobył 31 punktów (6, 2, 5, 6, 6, 6) i zajął pierwsze miejsce.
Zawodnik TO73 był uczniem III klasy w VI LO w Bydgoszczy. W finale zdobył 13 punktów (6, 2, 0, 0, 5, 0).
Zawodnik WA68 był uczniem III klasy w XIV LO w Warszawie. W finale zdobył 28 punktów (2, 2, 6, 6, 6, 6) i uzyskał tytuł laureata I stopnia.
Wśród uczestników, którzy rozwiązali zadanie, jedyną dziewczyną była SZ40 (wśród ośmiu uczestniczek finału), natomiast chłopców było czterech (wśród 117 chłopców).
Zwraca uwagę fakt, że dwóch uczniów VI LO w Bydgoszczy poprawnie rozwiązało zadanie.

Rozwiązanie sposobem 1 sprowadza się do realizacji dwóch etapów: wykorzystania twierdzenia o odcinkach stycznych oraz symetrii czworościanu $ABCD$ i styczności sfery do środków ciężkości ścian. Tylko 5 uczniów rozwiązało zadanie, w tym 4 sposobem zbliżonym lub identycznym ze sposobem 1. Spośród 125 uczestników finału aż 67 uczniów oddało puste kartki. Spośród 58 uczniów, którzy oddali rozwiązania, praktycznie wszyscy powoływali się na twierdzenie o odcinkach stycznych: 17 uczniów cytowało to twierdzenie, a 30 dowodziło jego prawdziwości. Uczniowie, którzy dowodzili to twierdzenie, nie odwoływali się do jego znajomości. Może to oznaczać, że twierdzenie o odcinkach stycznych do okręgu, znane każdemu olimpijczykowi, nie ma oczywistego dla uczniów uogólnienia dla sfery. Zatem zaskakuje brak przeniesienia wiedzy i intuicji płaskiej na przestrzenną. Wśród 17 uczniów, którzy powoływali się na twierdzenie o odcinkach stycznych do sfery, 7 uczniów używało określeń: największe twierdzenie geometrii, najmocniejsze twierdzenie geometrii, zasadnicze twierdzenie geometrii. 53 uczniów przedstawiło do oceny niepoprawne rozwiązania, z czego aż 25 było przekonanych, że rozwiązało zadanie, co oznacza, że 47% dokonało błędnej oceny poprawności swojego rozwiązania. Jak na uczestników III etapu, odsetek ten jest wyjątkowo duży.
Kazuhiko Nunokawa w artykule [93] opisał pracę absolwenta studiów uniwersyteckich ze specjalnością nauczanie matematyki. Badania zostało przeprowadzone na przykładzie zadania z Olimpiady Matematycznej USA:
Sfera wpisana w czworościan jest styczna do jego ścian w ich środkach ciężkości. Wykaż, że jest to czworościan foremny.
Celem badania było określenie korelacji między rozwiązywaniem zadań za pomocą rozbijania ich na podproblemy, a rozumieniem problemów matematycznych. Autor w artykule pokazuje przewagę zastosowania strategii rozwiązywania krokami pośrednimi.

4.1.2 Rozwiązania, które zawierały błędy

28 uczniów nie miało żadnej strategii rozwiązania zadania i ograniczyło się do podania oczywistych faktów z poprawnymi uzasadnieniami. 11 osób miało błędną strategię rozwiązania. Pozostałe 14 osób swoje rozwiązania oparło na prawdziwych, choć nie udowodnionych przez siebie faktach. Najwięcej pojawiło się błędów w wyniku walki o wynik (13) oraz blefów (10).

Problem z wyobraźnią przestrzenną i wiedzą stereometryczną.

Ośmiu uczniów: WA20, WR60, TO91, TO32, KR55, KA15, WA63 oraz WA102 podało jako oczywisty fakt, że punkt O należy do płaszczyzny CED. Jedynie uczeń WA20 próbował uzasadniać ten fakt. Pozostali przyjęli go jako twierdzenie nie wymagające uzasadnienia i „powszechnie znane".
Fakt przyjęty przez wymienionych uczniów był "kuszący" i bardzo prawdopodobny, bo wyglądał na prawdziwy i ściśle powiązany z regularnością tezy, którą należało pokazać.

Uczeń WA20 napisał:
Zgodnie z definicją punkty K i L leżą na przecięciach środkowych trójkątów odpowiednio ABC i ABD. Zatem punkt $K \in \overline{EC}$ i $L \in \overline{ED}$. Punkt O, który jest środkiem kuli wpisanej, znajdzie się na przecięciu prostych prostopadłych do ściany ABC w punkcie K i do ściany ABD w punkcie L. Biorąc pod uwagę fakt, że odcinki EC i ED mają wspólny punkt E, warunkiem przecięcia się opisanych wyżej prostych jest to, żeby płaszczyzna wyznaczona przez punkty C, E i D była prostopadła zarówno do ściany ABC, jak i ściany ABD.

Uczeń WA90 poprawnie pokazał, że $DN = DM = DL = CK = CM = CN$. Z tego faktu wywnioskował, że punkty A, N, I oraz punkty B, M, I są współliniowe. Uczeń uzasadnił, że $NI = MI$. Następnie pojawiła się błędna obserwacja, że skoro *obrót płaszczyzny BDC o kąt BIA przeprowadza punkt M na punkt N, to także przeprowadza punkt B na punkt A.*

Mamy tu do czynienia z nieprawidłowym rozumieniem pojęcia obrotu w przestrzeni oraz blefem. Uczeń nie zauważył lub nie chciał zauważyć, że punkty M i N nie muszą być środkami ciężkości odpowiednich trójkątów.

Uczeń SZ11 udowodnił, że $AD = AC$ oraz $BC = BD$, z czego wywnioskował bezpodstawnie, że punkt styczności sfery wpisanej do ściany BCD leży na odcinku łączącym punkt B ze środkiem odcinka CD.

Uczeń WR14 przeprowadził następujące rozumowanie:

Punkt O' jest rzutem punktu O na płaszczyznę DEC. Ponieważ $|\sphericalangle ELO'| = |\sphericalangle EKO'| = 90^\circ$ i $LO' = KO'$ i $EL = EK$, $|\sphericalangle LEO'| = |\sphericalangle KEO'|$. Zatem dwusieczna kąta DEC, czyli prosta EO' przecina bok w DC w punkcie I i to pod kątem prostym. Z tego, że punkt O leży na płaszczyźnie dwusiecznej kata dwuściennego między ścianami ABD i ABC wynika, że $O = O'$.

Błędy, które w sytuacji płaskiej najprawdopodobniej nie zostałyby popełnione.

Uczniowie ujawniają w swoich pracach problem z rozumieniem podstawowych faktów z geometrii płaskiej. Prawdopodobnie nie popełnili by takich błędów, gdyby rozwiązywali podobne zadanie planimetryczne. Kontekst przestrzenny zaburzył widzenie prostych relacji geometrycznych.

Uczeń WR60 oparł swoje rozumowanie na fakcie: jeżeli trójkąty ABC i ABD mają środkowe CE i DE równej długości, to trójkąty te są przystające.

Uczeń WA63 powoływał się na twierdzenie: płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego wyznacza na ścianach czworościanu dwusieczne ścian. Uczeń powinien łatwo zauważyć, że dwusieczne kątów w dwóch trójkątach o tej samej podstawie nie zawsze mają punkt wspólny na podstawie.

Uczeń GD90 oparł swoje rozumowanie na fakcie następującym: jeżeli $AD = AC$, to odległości punktów C oraz D od odcinka AB są równe. Oczywiście implikacja taka jest fałszywa.

Fakty bez żadnego uzasadnienia.

Częstokroć w rozwiązaniach uczniów występuje pozorny związek przyczynowo-skutkowy.

Uczeń KR73 założył, że punkt styczności kuli wpisanej do ściany ACD jest jednocześnie środkiem ciężkości trójkąta ACD.

Uczeń KA35 podał następujące rozumowanie:

O jest środkiem kuli wpisanej i opisanej, więc $ABCD$ jest czworościanem foremnym, bo rzut O na płaszczyznę DAC leży na przecięciu środkowych
Uczeń przyjął, że środek kuli wpisanej musi być także środkiem kuli opisanej. Fakt, który został przyjęty przez ucznia jest równoważny temu, że czworościan jest równoboczny, a nie foremny.

Uczeń KR53 udowodnił, że trójkąty ABC i ABD są przystające oraz trójkąty ACD i BCD są równoramienne. Potem napisał: *Skoro trójkąty ACD i BCD są równoramienne, to O leży na płaszczyźnie symetralnej odcinka CD. Ale skoro K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD, a także są punktami styczności kuli wpisanej do nich, biorąc pod uwagę jednoznaczne wyznaczenie czworościanu przez równość $AB = CD$, to możemy stwierdzić, że O leży na płaszczyźnie symetralnej odcinka AB, więc prosta łącząca środki AB i CD jest do nich prostopadła.*

Uczeń WA76 pisał:
Skoro punkty C, K, E są współliniowe, to również punkty E, O, I są współliniowe.

Uczeń TO 73 przeprowadził poprawne rozumowanie, jedynie w końcowej fazie swojego rozwiązania powołał się na nieuzasadniony fakt, że punkty D, O, K są współliniowe. Z tego wywnioskował, że $DA = DB = DC$. Miało tu miejsce myślenie życzeniowe, gdyż był to ostatni fakt niezbędny do zakończenia rozwiązania zadania.

Uczeń KA65 poprawnie udowodnił, że trójkąty CDN i CDM są przystającymi trójkątami równoramiennymi. Następnie napisał:
Co więcej, trójkąt CDE jest także równoramienny, co oznacza, że $EI \perp CD$. Wobec ostatnich faktów i tego, że M i N leżą na dwusiecznych kątów CBD i CAD stwierdzamy, że nasz czworościan jest symetryczny względem płaszczyzny zawierającej trójkąt CDE. To już oznacza, że $BD = BC = AC = AD$, więc ściany czworościanu $ABCD$ są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Uczeń SZ14 wykorzystał fakt, że skoro sfera jest styczna do trójkąta równoramiennego

ADC w punkcie, który należy do środkowej będącej wysokością, to punkt ten musi być środkiem ciężkości.

Uczeń WA171 wpisał czworościan dany w zadaniu w równoległościan ten sposób, że jego podstawami stały się równoległoboki $AZBT$ i $XCYD$. Ponieważ $AB = CD$, czworokąty $AZBT$ i $XCYD$ są prostokątami. Wykorzystując fakt, że $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$, uczeń stwierdził, że równoległościan $AZBTDYCX$ jest prostopadłościanem. Ostatniego faktu w żaden sposób nie udowodnił. Pozostałą część zadania oparł na tym nie udowodnionym fakcie.

Uczeń KR63 przedstawił zaskakujące rozumowanie:

Trójkąty ACD i ABC mają dwa boki tej samej długości, więc jeśli kula jest styczna w środku ciężkości trójkąta ABC, to również jest styczna w środku ciężkości trójkąta ACD, ponieważ środek ciężkości to punkt przecięcia środkowych, więc mają takie same obwody, więc także boki, analogicznie postępujemy z każdymi dwoma trójkątami i dochodzimy do tego, że każde dwa są przystające a ponadto równoramienne, bo gdy porównamy trójkąty ACD i ABC, a potem trójkąty ACD i ABD, i ostatecznie, że wszystkie krawędzie czworościanu mają tę samą długość. Równość obwodów przy danej, że dwa boki są równe i kula styczna w środku ciężkości wynika równość pól małych trójkątów.
Rozumowanie przypomina strumień świadomości. Uczeń wypisuje luźne impresje, których w żaden sposób nie próbuje dowodzić. W pewnych fragmentach jego rozumowanie jest nieczytelne, nielogiczne, nie bardzo wiadomo, o co mu chodzi.

Uczeń TO44 wykazał, że $AD = AC, BD = BC$, z czego wywnioskował poprawnie, iż środkowa AI w trójkącie ACD jest jednocześnie wysokością tego trójkąta oraz środkowa BI w trójkącie BCD jest jednocześnie wysokością tego trójkąta. Stąd wynika, że płaszczyzna ABI jest płaszczyzna symetrii czworościanu $ABCD$ oraz środek kuli wpisanej O należy do tej płaszczyzny. W tym momencie bez uzasadnienia uczeń przyjął, że punkt O należy do środkowej IE trójkąta AIB, skąd dalej wnioskował, że trójkąty BCD i ACD są przystające.

Brak rozważenia przypadków.

Uczeń WR60 oparł swoje rozumowanie na fakcie: jeżeli trójkąty ABC i ABD mają środkowe CE i DE równej długości, to trójkąty te są przystające. Stąd natychmiast wywnioskował, że odcinek AB jest prostopadły do odcinka CD. Uczeń nie zwrócił uwagi na to, które pary boków tych trójkątów sa przystające.

4.2 Zadanie 5 z III etapu 58 OM

4.2.1 Treść i rozwiązania zadania

W czworościanie $ABCD$ spełnione są zależności:

$$\measuredangle BAC + \measuredangle BDC = \measuredangle ABD + \measuredangle ACD,$$

$$\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle ADC.$$

Udowodnić, że środek sfery opisanej na tym czworościanie leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi AB i CD.

Rozwiązania

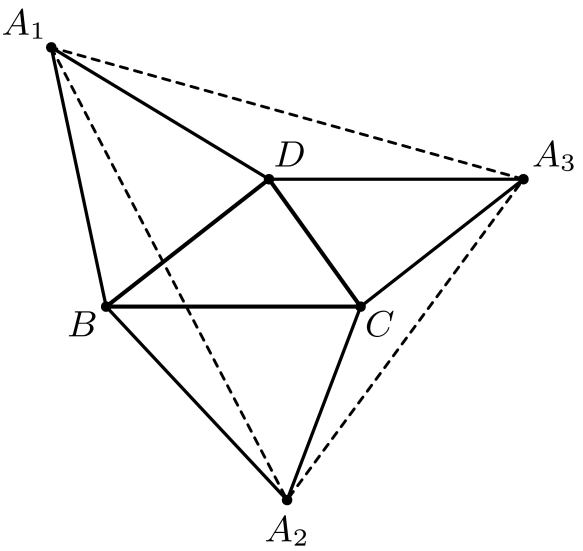
Rozwiązanie zadania składało się z dwóch etapów: uzasadnienia, że $AC = BD$ oraz $BC = AD$ i wykazania, że odcinek MN jest prostopadły do odcinków AB oraz CD. Zasadniczą trudność w zadaniu stanowiła pierwsza część dowodu. Wielu uczniów wskazywało na fakt, że aby udowodnić tezę wystarczy pokazać prostopadłość odcinka MN do odcinków AB i CD.

Rozpatrzmy sześciokąt $A_1BA_2CA_3D$ będący siatką czworościanu $ABCD$.
Przepisując pierwszą z danych w treści zadania równości jako

$$\measuredangle A_1BD + \measuredangle A_3CD = \measuredangle BDC + \measuredangle BA_2C,$$

widzimy, że suma miar katów A_1BA_2 i A_2CA_3 (traktowanych jako kąty wewnętrzne sześciokąta ABA_2CA_3D, a zatem niekoniecznie wypukłych) jest równa sumie miar katów wewnętrznych trójkątów BDC i BA_2C, co daje

$$\measuredangle A_1BA_2 + \measuredangle A_2CA_3 = 360^\circ. \qquad (33)$$



Ponieważ $BA_1 = BA_2$ oraz $CA_2 = CA_3$ (gdyż odpowiednie odcinki pochodzą z rozklejenia jednej krawędzi czworościanu), więc na mocy równości (33) trójkąty równoramienne A_1BA_2 i A_2CA_3 są podobne (przy czym mogą być zdegenerowane do odcinka). Wobec tego

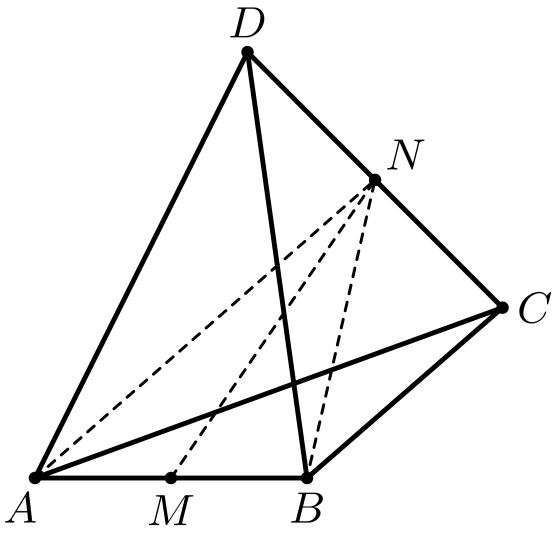
$$\frac{A_2A_1}{A_2B} = \frac{A_2A_3}{A_2C}. \qquad (34)$$

Ponadto $\measuredangle BA_2A_1 = \measuredangle CA_2A_3$, przy czym oba kąty są jednakowo zorientowane, skąd otrzymujemy

$$\measuredangle BA_2C = \measuredangle A_1A_2A_3. \qquad (35)$$

Z zależności (34) i (35) wynika, że trójkąty BA_2C oraz $A_1A_2A_3$ są podobne. Analogicznie korzystając z drugiej równości danej w treści zadania dowodzimy, iż trójkąty A_1BD i $A_1A_2A_3$ są podobne. Wobec tego podobne są trójkąty BA_2C i A_1BD; ze względu na równość $A_1B = BA_2$ są one przystające. Zatem

$$A_2C = BD \qquad \text{oraz} \qquad BC = A_1D. \quad (36)$$



Niech teraz punkty M, N będą odpowiednio środkami krawędzi AB, CD w czworościanie $ABCD$. Na mocy (36) trójkąty BDC i ACD są przystające. Wobec tego odcinki BN i AN, będące odpowiednio środkowymi w tych trójkątach, mają równe długości. Innymi słowy, $AN = BN$, zatem w trójkącie równoramiennym ANB środkowa NM jest prostopadła do boku AB.
Analogicznie rozpatrując trójkąt CMD dowodzimy, ze $MN \perp CD$. Prosta MN jest więc krawędzią przecięcia płaszczyzn symetralnych krawędzi AB i CD czworościanu $ABCD$. Środek sfery opisanej na czworościanie leży na każdej z tych płaszczyzn, zatem leży na prostej MN, co dowodzi tezy zadania.

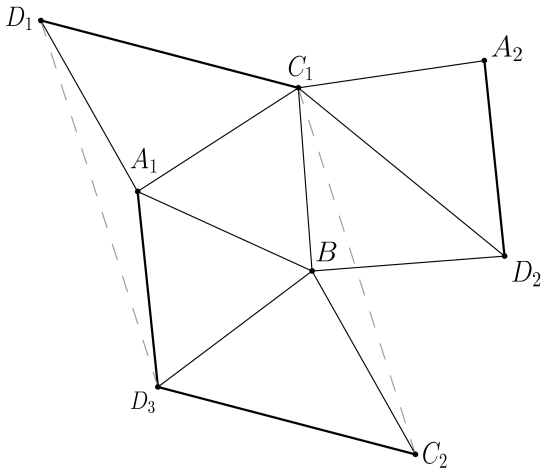
□

Komentarz.
Tylko czterech uczniów: SZ40, KR23, KR51 i WA191 poprawnie rozwiązało zadanie. Każdy z tych uczniów rozwiązał sposobem zbliżonym do zaproponowanego przez organizatorów. Zatem jedynym wykorzystanym twierdzeniem była cecha podobieństwa trójkątów.

Poniżej przedstawiam pewne, odmienne od zaproponowanego przez organizatorów, sposoby realizacji rozwiązania przedstawione przez uczniów, którzy poprawnie rozwiązali zadanie.

Uczennica SZ40 napisała tak:
Niech $A_1, A_2, B, C_1, C_2, D_1, D_2, D_3$ będą takimi punktami, że $\triangle A_1D_1C_1$, $\triangle A_1C_1B$, $\triangle A_1BD_3$, $\triangle BD_3C_2$ tworzą siatkę czworościanu $ABCD$ oraz $\triangle A_1BD_3$, $\triangle A_1BC_1$, $\triangle BC_1D_2$, $\triangle C_1D_2A_2$ tworzą siatkę czworościanu $ABCD$.
Niech $\measuredangle BAC = \alpha, \measuredangle BDC = \delta, \measuredangle ABD = \beta, \measuredangle ACD = \gamma, \measuredangle BAD = \epsilon, \measuredangle BCD = \varphi, \measuredangle ABC = \psi, \measuredangle ADC = \omega, \measuredangle DAC = w, \measuredangle ADB = z, \measuredangle DBC = y, \measuredangle AC = x$.
Z założenia mamy wtedy, że $\epsilon + \varphi = \psi + w, \alpha + \delta = \beta + \gamma$.
Obracamy D_1C_1 wokół C_1 o γ i otrzymujemy odcinek na prostej A_1C_1. Obracamy go o kąt $-\alpha$ wokół A_1, następnie o β i o kąt $-\delta$ wokół D_3. Otrzymujemy odcinek na prostej D_3C_2 pod kątem $\gamma - \alpha + \beta - \delta = 0$ do D_1C_1. Zatem $D_1C_1 \parallel D_3C_2$. Podobnie pokazujemy, że $A_2D_2 \parallel A_1D_3$. Obróćmy D_1C_1 o kąt $\gamma + x$ wokół C_1, następnie o kąt $\psi + \beta + y$ wokół B i o kąt φ wokół C_2. Obróciliśmy go łącznie o 2π, bo po obrotach jest równoległy do D_3C_2. Zatem $\gamma + x + \psi + \beta + y + \varphi = 2\pi$.
Podobnie $\omega + w + \alpha + \epsilon + z + \delta = z + \beta + \psi + y + \delta + \omega = w + \gamma + \varphi + x + \alpha + \epsilon = 2\pi$.
Z powyższych równości otrzymujemy $w + \alpha + \epsilon = \beta + \psi + y = 2\pi - (z + \delta + \omega) = 2\pi - (\gamma + x + \varphi)$.

$\triangle C_1BC_2$ i $\triangle D_1A_1BD_3$ są równoramienne, bo $D_1A_1 = A_1D_3 = AD$, $BC = BC_2 = BC_1$ oraz mają równe kąty przy A_1 i B, równe $w + \alpha + \epsilon = \psi + \beta + y$ lub $2\pi - w - \alpha - \epsilon$, w zależności od tego, czy $w + \alpha + \epsilon$ jest wypukły czy wklęsły.
$D_1C_1C_2D_3$ jest równoległobokiem. Więc $C_1C_2 = D_1D_3$. Zatem $\triangle C_1BC_2 \equiv \triangle D_1A_1D_3$, bo mają równe kąty i równe odpowiednie boki. Stąd $AD = BC$. Podobnie pokazujemy, że $AC = BD$, bo $D_3D_2A_2A_1$ jest równoległobokiem i $\triangle D_3BD_2 \equiv \triangle A_1C_1A_2$ są równoramienne.



Uczeń KR23 do dowodu równoległości odpowiednich odcinków w siatce czworościanu wykorzystał elementarny rachunek na liczbach zespolonych.

Prześledźmy, jak wypadli w finale uczniowie, którzy rozwiązali poprawnie zadanie.

Zawodniczka SZ40 była uczennicą II klasy w XIII LO w Szczecinie. W finale zdobyła 24 punkty (6, 6, 0, 6, 6, 0) i uzyskała tytuł laureata stopnia III.
Zawodnik KR51 był uczniem I klasy w II LO w Krakowie. W finale zdobył 12 punkty (6, 0, 0, 0, 6, 0).
Zawodnik KR23 był uczniem II klasy w II LO w Krakowie. W finale zdobył 36 punktów (6, 6, 6, 6, 6, 6) i zajął pierwsze miejsce.
Zawodnik WA191 był uczniem II klasy w XIV LO w Warszawie. W finale zdobył 23 punkty (6, 6, 0, 5, 6, 0) i uzyskał tytuł laureata stopnia III.

Wśród uczestników, którzy rozwiązali zadanie jedyną dziewczyną była SZ40 (wśród siedmiu uczestniczek finału), natomiast chłopców było trzech (wśród 116 chłopców, którzy byli uczestnikami finału).
Zwraca uwagę, że dwóch uczniów II LO w Krakowie poprawnie rozwiązało zadanie.
Ponadto uczniowie: SZ40 i KR23 w finale 57 OM także rozwiązali zadanie stereometryczne. Uczeń KR51 był po raz pierwszy uczestnikiem finału na 58 OM, natomiast WA191 rok wcześniej nie rozwiązał zadania stereometrycznego.

4.2.2 Rozwiązania, które zawierały błędy

Błędy spowodowane problemami z wyobraźnią i wiedzą przestrzenną

Uczeń WR80 sprawnie wykazał, że suma miar kątów płaskich przy wierzchołkach A i D (a także B i C, A i C, B i D) jest równa 2π. Stąd wywnioskował poprawnie, że

$$\measuredangle CAD = \measuredangle DAB + \measuredangle BAC = \measuredangle ABC + \measuredangle CBD + \measuredangle DBA,$$

$$\measuredangle ACB = \measuredangle BCD + \measuredangle DCA = \measuredangle ADB + \measuredangle BDC + \measuredangle CDA.$$

Wówczas napisał:
Sumy przy wierzchołkach A i B są równe, więc wszystkie obroty punktu D wokół osi AB również będą spełniały ten warunek. Przez analogiczność sytuacji dla AB oraz CD wierzchołki A i B oraz C i D muszą być identyczne.

Komentarz.
W argumentacji widoczna jest daleko idąca nieporadność. Ponadto łatwo zauważyć, że uczeń próbuje przenieść własności obrotu na płaszczyźnie na własności obrotu w przestrzeni - wydaje mu się, że obrót punktu D dookoła osi AB zachowuje równość miar kątów DAC i DBC.

Uczeń WR53 udowodnił, wykorzystując błąd rachunkowy, że $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$, a następnie napisał:
Skoro kąty CAD i CBD są równe, ich ramiona przecinają się w przestrzeni, środek sfery opisanej na $ABCD$ leży na płaszczyźnie dwusiecznych tych kątów, w równej odległości od punktów A i B, czyli na odcinku łączącym środek odcinka AB ze środkiem odcinka CD (na symetralnej AB).

Komentarz.
Trudno ustalić, co uczeń miał na myśli pisząc, że *ramiona przecinają się w przestrzeni.* Natomiast druga część tego zdania pokazuje, że uczeń ma problem z podstawowymi pojęciami geometrii płaskiej: dwusieczne kątów CAD i CBD nie muszą się przeciąć w jednym punkcie - gdy punkty A, B, C i D nie są współpłaszczyznowe dwusieczne podanych kątów będą prawie zawsze prostymi skośnymi. Ponadto umiejscawianie środka sfery wpisanej na tak zdefiniowanej płaszczyźnie pokazuje, że uczeń nie wie, że środek sfery opisanej leży na przecięciu płaszczyzn symetralnych krawędzi czworościanu.

Uczeń WA18 najpierw pokazał, że jeżeli $AD = CB$ oraz $CA = BD$, to środek sfery opisanej na czworościanie leży na odcinku łączącym środki krawędzi AB i CD. Następnie przystąpił do dowodu faktu, że $AD = CB$ oraz $CA = BD$.
Poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do AB i przechodzącą przez M. Mamy kilka przypadków:
1) płaszczyzna nie będzie miała punktów wspólnych z CD,
2) płaszczyzna przetnie prostą CD w punkcie M',
3) płaszczyzna zawiera prostą CD.

1) Wtedy bez zmniejszania ogólności mogę przyjąć $AD < BD$ i $AC < CB$, wtedy

$$|\measuredangle BAD| > |\measuredangle ABD|, |\measuredangle BAC| > |\measuredangle ABC|$$

(bo naprzeciw większego kąta znajduje się większy kąt) oraz $|\measuredangle CAD| > |\measuredangle CBD|$, ponieważ trójkąt ACD mógłby być zawarty w trójkącie CDB (można narysować takie A', aby należało do płaszczyzny BCD i zawierało się w tym trójkącie i był spełniony warunek $\triangle CDA \equiv \triangle CDA'$).

W tym miejscu uczeń popełnia błąd, gdyż z warunków zadania nie wynika, że $|\measuredangle CAD| > |\measuredangle CBD|$, a uzasadnienie jest nieprawidłowe. Dalsza część rozumowania w 1) jest oparta na założeniu $|\measuredangle CAD| > |\measuredangle CBD|$ i nie daje się poprawić.
Następnie uczeń rozważa przypadek 2).

2) Płaszczyzna przecina prostą CD w jednym punkcie, nazwijmy go M'; wtedy mamy dwa mniejsze przypadki.
a) $M' = N$, wtedy $AN = BN$. Załóżmy teraz, że $MM' \perp CD$, jeżeli nie są, to od razu wychodzi sprzeczność. Jeżeli jest prostopadłe, to $CM = DM$ więc O, które leży w płaszczyźnie z M i N prostopadłej do AB oraz w płaszczyźnie z M i N prostopadłej do CD leży na prostej MN.
b) jeżeli $M' \neq N$, to bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć, że $DM' < CM'$; odbijamy teraz C symetrycznie przez M'otrzymując D'. Z tego, że $AD' = CB$ oraz $BD' = AC$ (to

zachodzi z symetrii względem MM') wiemy, że $ABCD'$ spełnia tezę.

Rozumowanie z podpunkt b) zawiera istotny błąd: obrazem odcinka BC w symetrii względem prostej MM' nie jest odcinek AD'. Uczeń założył, nie zdając sobie z tego sprawy, że odcinek MM' jest prostopadły do prostej CD, czyli założył tezę, którą pragnął udowodnić.

Fakty bez żadnego uzasadnienia

Uczeń KR31 oznaczył środki krawędzi AB, BC, CA, AD, DB, DC jako, odpowiednio, M, L, P, K, O, N. Zauważył, że do wykazania tezy wystarczy pokazać, iż prosta MN jest prostopadła do płaszczyzny $KOLP$. co jest równoważne temu, że spodek wysokości ostrosłupa $KMOLP$ poprowadzonej z punktu M jest punktem przecięcia przekątnych rombu $KPLO$ (to oczywiście błąd terminologiczny - chodzi o równoległobok). Z treści zadania zawodnik wyprowadził równości:

$$\measuredangle MKP + \measuredangle MLP = \measuredangle OKM + \measuredangle OLM,$$
$$\measuredangle KPM + \measuredangle KOM = \measuredangle LPM + \measuredangle LOM.$$

Do tego miejsca rozumowanie jest całkowicie poprawne. Następnie napisał (jest to ostatnie rozumowanie rozwiązania):
Z warunków tych wynika, że spodek wysokości z punktu M leży na prostej KL oraz na prostej OP. Musi być zatem punktem przecięcia się przekątnych, a to chcieliśmy wykazać.
Mamy tu do czynienia z klasycznym blefem. Uczeń nie przeprowadził rozumowania, które upoważniało by go do stwierdzenia, że zakończył rozwiązywanie zadania. Nie ma żadnej bezpośredniej zależności między wyprowadzonymi równaniami, a położeniem spodka wysokości w graniastosłupie $KMOLP$.

Uczeń WA96 wykonał rysunek, który miał być w zamyśle pewnego rodzaju siatką czworościanu. Następnie napisał:
Narysujmy w jednej płaszczyźnie trójkąty ABC, ADC, BAD, BCD biorąc pod uwagę fakt, że $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle ADC$. Z faktu tego wynika, że boki AB i CD odpowiednich trójkątów pokrywają się. Z twierdzenia Talesa wynika, że $PQ \parallel XY$. Ponadto $PQYX$ jest trapezem równoramiennym, więc $PY = QX$. Zatem $\triangle KXQ \equiv \triangle LPY$.
Zarówno rysunek, jak i przeprowadzone rozumowanie wykazuje istotne braki w wiedzy ucznia. Nie ma szans na ustalenie, skąd zawodnik wywnioskował podane przez siebie fakty. To może sugerować, że była to zamierzona strategia, czyli blef.

Uczeń TO33 napisał:
sumy miar kątów przy wierzchołkach A i B są równe. Wówczas łatwo obliczyć, że również sumy miar kątów płaskich przy wierzchołkach C i D są sobie równe. Powyższe fakty dowodzą, że środek sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi AB i CD.
Ten fragment rozumowania można zakwalifikować jako blef - uczeń nie przedstawił żadnego uzasadnienia ostatniego zdania.

Uczeń KR44 założył na samym początku swojego rozwiązania, że

$$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle BAD + \measuredangle ABD = \measuredangle ADC + \measuredangle DCA + \measuredangle BCD + \measuredangle CDB.$$

Nie można ustalić, skąd uczeń powziął przekonanie, że ta równość między kątami jest prawdziwa. Nie wynika ona z założeń oraz nie ma w pracy żadnego uzasadnienia. Z równości tej uczeń wnioskował, że suma kątów płaskich przy każdym wierzchołku czworokąta jest równa $180°$, skąd łatwo już dowodził tezy zadania.

Uczeń wykorzystał równość, która, jak mu się wydawało, była niezbędna do dowodu tezy. Liczył zapewne na to, że otrzyma przynajmniej 2 punkty.

Uczeń WA78 zaprezentował ciąg implikacji:

$$\measuredangle BAC + \measuredangle BDC = \measuredangle ABC + \measuredangle ADC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle BDC = \measuredangle ACD \wedge \measuredangle BCD = \measuredangle ADC$$

$$\Downarrow$$

$$\triangle ACD \equiv \triangle BDC$$

Pierwsza równość nie wynika z założeń, a kolejne wnioski są nieuzasadnione.

Uczeń WR14 po wykazaniu, że sumy kątów płaskich przy wierzchołkach A i B oraz C i D są równe stwierdził, że trójkąty ABC, ABD, DAC i DBC są równoramienne.

Uczeń WA76 napisał:
suma kątów przy wierzchołkach C i B jest równa 360° *Podobnie, z drugiego warunku suma kątów przy wierzchołkach A i D także jest równa* 360°*. Biorąc odwrotnie trójkąty analogicznie uzyskujemy, że każda para wierzchołków ma sumę kątów równą* 360°*.*
Ostatnie zdanie nie jest prawdziwe, gdyż z równości danych w zadaniu wynika tylko, że sumy kątów płaskich przy wierzchołkach A i D, B i C, B i D, A i C są równe 360°. Zatem uczeń zbyt daleko poprowadził analogię, nie sprawdzając czy jest ona w istocie uprawniona. Dalsza część rozumowania, opartego na błędnym wniosku, przebiegła szybko - uczeń wykazał, że czworościan jest foremny. Zabrakło, charakterystycznego dla dojrzałego olimpijczyka, sprawdzenia, czy istnieją nieforemne czworościany spełniające warunki zadania.

Uczeń TO32 próbował rozważać wzajemne położenie odcinków AB i CD. Trudno się jednak dopatrzyć dowodu, gdyż uczeń swoje stwierdzenia kwituje sformułowaniami: *tak musi być* lub *tak nie może być.*

Uczeń KR72 po wypisaniu oznaczeń i zapisaniu danych z treści zadania zakończył rozwiązanie następującym tekstem: *Powyższe rozwiązanie godne jest uwagi Szanownej Komisji m.in. ze względu na sliczny, cudowny, a także przeuroczy rysunek czworościanu.*

Kuriozalne rozumowania

Uczeń KA27 próbował rozwiązać zadanie poprzez rozwiązanie problemu dla rzutu czworościanu na bliżej nieokreśloną płaszczyznę.
Zajmijmy się najpierw warunkiem $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle ADC$. Wynika z niego natychmiast, że rzutując czworościan na płaszczyznę powstaje czworokąt, na którym można opisać okrąg.
Prawdopodobnie uczeń wywnioskował to z faktu: na czworościanie $ABCD$ można opisać sferę. Oczywiście, rzut czworościanu na nieokreśloną płaszczyznę nie jest na ogół czworokątem wpisanym w okrąg. Ponadto uczeń przyjął, że w wyniku rzutowania kąty zachowują swoje miary. Stąd wywnioskował, że skoro w czworokącie $ABCD$ wpisanym okrąg $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$ oraz

$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$, to $AC = BD$ i $AB \parallel DC$. Ta implikacja jest fałszywa i wskazuje na słabą intuicję w zakresie geometrii płaskiej.
Swój wywód uczeń kończy następująco:
$ABCD$ jest trapezem równoramiennym, zatem okrąg opisany na nim leży na pokrywających się symetralnych boków AB i CD, czyli na odcinku łączącym ich środki. Aby uzyskać tezę zadania wystarczy zauważyć, że środek okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ pokrywa się ze środkiem sfery opisanej na czworościanie.

5 Analiza statystyczna

5.1 Informacje statystyczne o zadaniach z II i III etapu 57 OM

W rozdziałach omawiających ogólne statystyki 57 i 58 OM przyjąłem system oznaczania zadań za pomocą trójki liczb, z których pierwsza oznacza zadanie, druga - etap (2 - rejonowy, 3 - finał ogólnopolski), zaś trzecia numer olimpiady.
Zarówno drugi, jak i trzeci etap Olimpiady Matematycznej składa się z 6 zadań. Zawody są dwudniowe - pierwszego dnia uczniowie rozwiązują zadania od 1 do 3 , drugiego zadania 4, 5 i 6 (każdego dnia czas pracy to 5 godzin zegarowych).

W tym rozdziale zestawię dane statystyczne związane z II i III etapem 57 OM.

W II etapie 57 OM uczestnicy mieli do rozwiązania następujący zestaw zadań:

Zadanie (1.2.57).
Liczby całkowite dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równości

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

oraz nierówności

$$|x - a| \leqslant 1$$

$$|y - b| \leqslant 1$$

Wykazać, że zbiory $\{a, b\}$ oraz $\{x, y\}$ są równe.

Zadanie (2.2.57).
Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC + BC = 3AB$. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Niech K i L będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów D i E względem punktu I. Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

Zadanie (3.2.57).
Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab + bc + ca = abc$. Dowieść, że

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geqslant 1$$

Zadanie (4.2.57).
Niech c będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg (a_n) jest określony przez warunki

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = d(a_n) + c \qquad \text{dla} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

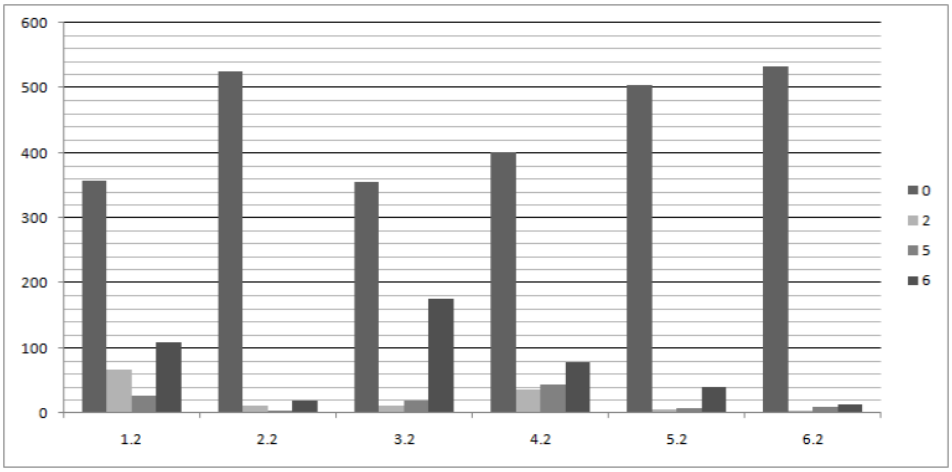
gdzie $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby m. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia k, że ciąg a_k, a_{k+1}, $a_{k+2}, \ldots$ jest okresowy.

Zadanie (5.2.57).
Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez punkty A i C przecina okrąg o_2 przechodzący przez punkty B i C w różnych punktach C i D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera punktu C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera punktu C. Dowieść, że proste PQ i CD są prostopadłe.

Zadanie (6.2.57).
Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita n, przy czym $p \geqslant n \geqslant 3$. Zbiór A składa się z n-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru
$\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ i ma następującą własność:

> Dla dowolnych dwóch ciągów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ze zbioru A istnieją takie różne liczby k, l, m, że
>
> $$x_k \neq y_k$$
>
> $$x_l \neq y_l$$
>
> $$x_m \neq y_m$$

Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru A.



Rysunek 4: **Punktacja rozwiązań zadań z II etapu 57 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów.**

Oceny uzyskane za poszczególne zadania przedstawia rysunek 4. Jak widać, zadanie 3.2.57 okazało się najłatwiejsze z całego II etapu (współczynnik trudności 0,65 przy dwóch zadaniach o współczynnikach 0,76 i 0,78 i trzech dużo trudniejszych: 0,91, 0,96 i 0,96 - wśród nich są oba zadania z planimetrii), ale nawet ono zostało rozwiązane zaledwie przez niecałe 35% uczniów (194 osoby).

Tabela 90 na stronie 245 zawiera podstawowe statystyki wszystkich zadań II etapu 57 Olimpiady Matematycznej, wyliczone dla wszystkich 560 uczestników tego etapu.

Po ocenieniu zadań etapu II do finału zakwalifikowano 125 z 560 uczniów. Tabele od 76 do 81 pokazują, jaki był związek między oceną za poszczególne zadania i awansem. I tak finalistami zostało 96% uczniów, którzy rozwiązali zadanie 2.2.57, 87% tych, którzy rozwiązali zadanie 5.2.57, 82% uczestników, którzy rozwiązali zadanie 6.2.57. W przypadku zadań 1.2.57 i 4.2.57 współczynnik ten osiąga wartość w okolicach 70%, natomiast dla zadania 3.2.57 jest zdecydowanie najniższy i wynosi 54%.

		zad. 1.2.57		razem
		0	1	
awans	tak	31	94	125
	nie	393	42	435
razem		424	136	560

Tabela 76: **Związek między wynikiem zadania 1.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału**

		zad. 2.2.57		razem
		0	1	
awans	tak	102	23	125
	nie	434	1	435
razem		536	24	560

Tabela 77: **Związek między wynikiem zadania 2.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału**

		zad. 3.2.57		razem
		0	1	
awans	tak	20	105	125
	nie	346	89	435
razem		366	194	560

Tabela 78: **Związek między wynikiem zadania 3.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału**

		zad. 4.2.57		razem
		0	1	
awans	tak	39	86	125
	nie	399	36	435
razem		438	122	560

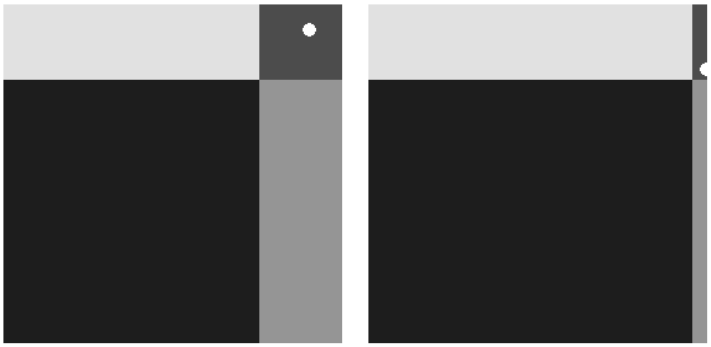
Tabela 79: **Związek między wynikiem zadania 4.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału**

		zad. 5.2.57		razem
		0	1	
awans	tak	84	41	125
	nie	427	8	435
razem		511	49	560

Tabela 80: **Związek między wynikiem zadania 5.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału**

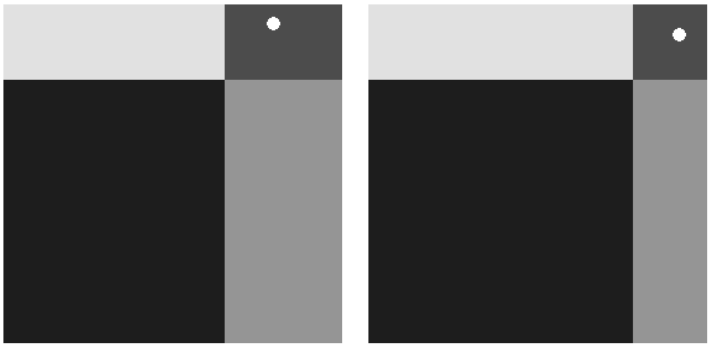
		zad. 6.2.57		razem
		0	1	
awans	tak	105	20	125
	nie	432	3	435
razem		537	23	560

Tabela 81: **Związek między wynikiem zadania 6.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału**



Rysunek 5: **Diagramy do danych z tabel 76 (z lewej) i 77 (z prawej).**

,

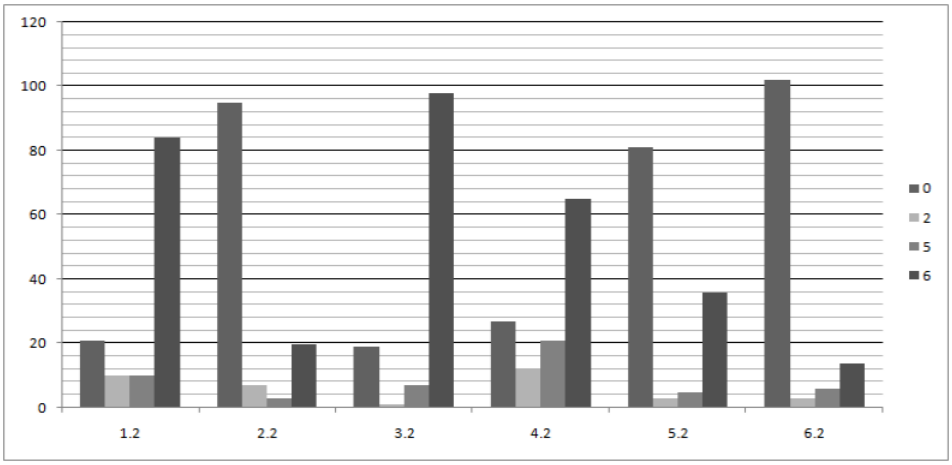


Rysunek 6: **Diagramy do danych z tabel 78 (z lewej) i 79 (z prawej).**

Rysunek 7: **Diagramy do danych z tabel 80 (z lewej) i 81 (z prawej).**

Na podstawie wykresów umieszczonych na rysunkach 5, 6, 7 można zauważyć, że zadania 1.2.57, 3,2.57 oraz 4.2.57 dobrze selekcjonowały, zadanie 5.2.57 - słabo, natomiast zadania 2.2.57 oraz 6.2.57 selekcjonowały źle (według [52]).
Jednakże w przypadku zadań 2.2.57 i 6.2.57 widoczny jest charakterystyczny fakt: w zdecydowanej większości zawodnicy, którzy rozwiązali zadanie, awansowali do finału. Ponadto te właśnie zadania dobrze różnicowały populację (jak w zgodzie z opinią B. Niemierko ([89]), że zadania trudne dobrze różnicują).

Na rysunku 8 znalazły się informacje o ocenach kolejnych zadań 2 etapu w grupie finalistów.



Rysunek 8: **Punktacja rozwiązań finalistów w 2 etapie 57 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów**

Tabela 91 na stronie 246 zawiera te same informacje, które znalazły się w tabeli 90, ale tylko dla tych uczestników 2 etapu, którzy awansowali do finału. Dla tej grupy uczniów wyraźnie można wyodrębnić trzy zadania trudne (wskazują na to średnie, współczynniki trudności, a także np. wartości poszczególnych kwartyli) oraz trzy zadania łatwe (w tym zadanie 3.2.57 - o najniższym współczynniku trudności i najwyższych średnich).

Tabela 82 pokazuje wartości współczynnika korelacji między ocenami zadań z 2 etapu 57 OM. Korelacje zostały wyliczone zarówno dla skali 0-1, jak i dla skali 0-2-5-6. Widać, że wartości w obu przypadkach są bardzo zbliżone, mimo ilościowego potraktowania jakościowej, sztucznej skali 0-2-5-6. Niemniej w rozważaniach będę się posługiwać współczynnikami wyliczonymi przy skali 0-1.

zadanie	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	etap II
1.2	1,00	0,21	0,31	0,38	0,28	0,30	0,72
	1,00	0,23	0,33	0,43	0,29	0,31	0,73
2.2	0,21	1,00	0,18	0,23	0,46	0,13	0,50
	0,23	1,00	0,19	0,27	0,49	0,15	0,52
3.2	0,31	0,18	1,00	0,36	0,19	0,17	0,69
	0,33	0,19	1,00	0,40	0,19	0,19	0,70
4.2	0,38	0,23	0,36	1,00	0,22	0,26	0,71
	0,43	0,27	0,40	1,00	0,23	0,28	0,74
5.2	0,28	0,46	0,19	0,22	1,00	0,10	0,55
	0,29	0,49	0,19	0,23	1,00	0,11	0,55
6.2	0,30	0,13	0,17	0,26	0,10	1,00	0,45
	0,31	0,15	0,19	0,28	0,11	1,00	0,46
etap II	0,72	0,50	0,69	0,71	0,55	0,45	1,00
	0,73	0,52	0,70	0,74	0,55	0,46	1,00

Tabela 82: **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu II 57 OM obliczone dla 560 prac uczestników. Górna wartość obliczona jest przy skali oceniania 0-1, a dolna dla skali 0-2-5-6.** Wszystkie współczynniki są istotne z $p < 0,05$.

Na podstawie tabeli 82 można dostrzec, że umiarkowana korelacja występuje między zadaniami geometrycznymi (2.2.57 i 5.2.57), zadaniami 1.2.57 i 4.2.57 oraz zadaniami 3.2.57 i 4.2.57. W przypadku pozostałych zadań korelacja jest niska.

Biorąc pod uwagę wyniki testu w skali 0-1 i korzystając ze współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej będę obliczyć moc różnicującą poszczególnych zadań II etapu dla całej populacji 560 uczniów.

Wartości współczynników dla poszczególnych zadań etapu II podaję w tabeli 83.

zadanie	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
r_{pb}	0,72	0,49	0,69	0,71	0,55	0,45

Tabela 83: **Moc różnicująca zadań II etapu 57 Olimpiady Matematycznej.**

Wartości obliczane za pomocą współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej niemal pokrywają się z podanymi w tabeli 82 współczynnikami korelacji Pearsona obliczanymi między ocenami poszczególnych zadań i wynikiem ogólnym testu.

W II etapie 57 OM wzięło udział 560 uczniów, w tym 488 chłopców i 72 dziewczęta.

Kategoria	Liczba uczniów	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
Polska	560	24	4	35	22	9	4
dziewczęta	72	18	3	22	10	7	3
chłopcy	488	25	4	35	22	9	4
gimnazjum	13	31	0	23	8	0	0
klasa I	73	21	5	29	23	8	5
klasa II	196	26	4	38	19	10	3
klasa III	278	24	4	34	24	8	5
okręg gdański	28	39	4	54	39	7	14
okręg katowicki	62	24	6	31	23	8	5
okręg krakowski	63	30	8	43	33	10	2
okręg lubelski	60	20	0	37	22	5	3
okręg łódzki	34	15	0	15	12	0	0
okręg poznański	23	9	0	26	22	0	4
okręg szczeciński	46	20	2	35	11	11	7
okręg toruński	64	31	2	30	13	13	2
okręg warszawski	121	26	9	35	22	16	4
okręg wrocławski	59	20	2	39	24	2	5

Tabela 84: **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 57 OM. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej kategorii.**

Na podstawie tabeli 84 można zauważyć, że dziewczęta znacznie gorzej poradziły sobie z zadaniami II etapu 57 OM, zwłaszcza w przypadku zadań z najwyższymi współczynnikami łatwości: zadaniem kombinatorycznym 1.2.57, zadaniem o nierównościach 3.2.57 i zadaniem o ciągach 4.2.57. W przypadku zadań z wysokimi współczynnikami trudności zarówno dziewczęta,jak i chłopcy radzili sobie podobnie, choć chłopcy z nieznacznie lepszym wynikiem.
Zadanie 1.2.57 zostało najlepiej rozwiązanie w grupie uczniów gimnazjów: wśród 13 gimnazjalistów czterech poradziło sobie z tym zadaniem. Najprawdopodobniej wynika to z faktu, że rozwiązanie tego zadania nie wymagało zaawansowanej wiedzy.
Zadanie geometryczne 2.3.57 okazało się bardzo trudne i żaden gimnazjalista go nie rozwiązał, a w grupie uczniów liceów niezależnie od klasy liczba poprawnych rozwiązań wynosiła ok. 4%.
Również drugie zadanie geometryczne z II etapu 57 OM okazało się dosyć trudne: współczynnik trudności wyniósł 0,91. Podobnie jak w zadaniu 2.2.57 gimnazjaliści nie poradzili sobie z zadaniem 5.2.57, a w grupie uczniów liceów niezależnie od klasy liczba poprawnych rozwiązań wynosiła 8-10 %.
Zadanie 3.2.57 z nierównością okazało się zadaniem najłatwiejszym dla uczestników: rozwiązało je 35% wszystkich uczestników. Najlepszy wynik osiągnęli uczniowie klas drugich: 38%.
Uczniowie z okręgu gdańskiego najlepiej poradzili sobie z zadaniami: 1.2.57, 3.2.57, 4.2.57 i 6.2.57.
Uczniowie z okręgu warszawskiego najlepiej poradzili sobie z zadaniami geometrycznymi: 2.2.57 i 5.2.57.
W czołówce okręgów znajdowały się okręgi: warszawski, krakowski, wrocławski. Zdecydowanie najsłabsze był okręgi łódzki i poznański.

Na podstawie tabeli 92 ze strony 247 najlepsze wyniki w zadaniu 1.2.57 osiągnęli uczniowie z miast: Gdynia (50%), Bielsko-Biała (50%), Olsztyn (43%), Grudziądz (43%), Krosno (40%), Bydgoszcz (40%).

Najlepsze wyniki w zadaniu 2.2.57 osiągnęli uczniowie z miast: Bielsko-Biała (17%), Warszawa (13%), Katowice (10%), Kraków (9%).
Najlepsze wyniki w zadaniu 3.2.57 osiągnęli uczniowie z miast: Lublin (78%), Płock (67%), Gdynia (65%), Koszalin (64%), Bydgoszcz (60%), Krosno (60%), Katowice (50%).
Najlepsze wyniki w zadaniu 4.2.57 osiągnęli uczniowie z miast: Krosno (60%), Płock (50%), Gdynia(45%), Katowice (40%), Kraków (37%).
Najlepsze wyniki w zadaniu 4.2.57 osiągnęli uczniowie z miast: Bydgoszcz (33%), Bielsko-Biała (25%), Krosno (20%), Radom (20%), Warszawa (19%).

W omawianym zestawieniu pewne miasta pojawiają się kilkukrotnie: Gdynia, Krosno, Bielsko-Biała, Kraków, Płock, Warszawa, Bydgoszcz. W przypadku Krosna i Płocka jest to związane z tym, że przy małej populacji uczniów z tych miast było wśród nich po dwóch mocnych zawodników, co znacznie podwyższyło wynik. W pozostałych wymienionych miastach występują silne ośrodki olimpijskie.

W zestawieniu w tabeli 93 ze strony 248 zostały szkoły, z których pochodziło co najmniej pięciu zawodników. Postanowiłem uwzględnić także dwie szkoły: LO SS. Prezentek z Rzeszowa, I LO z Konina. W obu tych szkołach, mimo niewielkiej liczby uczestników II etapu 57 OM, po dwóch uczniów awansowało do finału (z I LO z Konina obaj uczestnicy II etapu awansowali). Dopisane także zostało 46 Gimnazjum z Krakowa, z którego pochodziło trzech uczestników II etapu, a jeden z nich awansował do finału.

Zadanie 1.2.57 najlepiej rozwiązali uczniowie: VI LO w Bydgoszczy (75%), II LO w Olsztynie (60%), III LO w Gdyni(53%), V LO w Bielsku-Białej (45%), V LO w Krakowie (43%).
Zadanie 2.2.57 najlepiej rozwiązali uczniowie: V LO w Bielsku-Białej (18%), XIV LO w Warszawie (18%), II LO w Warszawie (17%), VI LO w Bydgoszczy (13%), II LO w Krakowie (11%), V LO w Krakowie (18%). Jednakże w przypadku II LO w Warszawie, VI LO w Bydgoszczy, II LO w Krakowie zadanie rozwiązała jedna osoba.
Zadanie 3.2.57 najlepiej rozwiązali uczniowie: I LO w Koninie (100%), VI LO w Bydgoszczy (88%), I LO w Lublinie (80%), III LO w Gdyni (68%), I LO w Koszalinie (64%), I LO w Krośnie (60%), II LO w Krakowie (56%), VIII LO w Katowicach (50%), I LO w Gliwicach (50%), XIV LO w Wrocławiu (50%), V LO w Krakowie (48%). Obaj uczestnicy z I LO w Koninie rozwiązali omawiane zadanie.
Zadanie 4.2.57 najlepiej rozwiązali uczniowie: I LO w Koninie (100%), VI LO w Bydgoszczy (63%), I LO w Krośnie (60%), VIII LO w Katowicach (50%), III LO w Gdyni (47%), V LO w Krakowie (40%). Obaj uczestnicy z I LO w Koninie rozwiązali omawiane zadanie.
Zadanie 5.2.57 najlepiej rozwiązali uczniowie: VI LO w Bydgoszczy (50%), II LO w Warszawie (33%), V LO w Bielsku-Białej (27%), XIV LO w Warszawie (25%), VI LO w Radomiu (22%), I LO w Krośnie (20%), I LO w Lublinie (20%), II LO w Olsztynie (20%). Zwraca uwagę przede wszystkim wynik uczniów dużych szkół V LO w Bielsku-Białej (27%) i XIV LO w Warszawie (25%).
W zadaniu 6.2.57 zwraca uwagę wynik uczniów III LO w Gdyni: aż trzech spośród 19 uczniów tej szkoły zrobiło to bardzo trudne zadanie.

Finaliści 57 OM w ciągu dwóch dni rozwiązywali następujący zestaw zadań:

Zadanie (1.3.57).

Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

Zadanie (2.3.57).
Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k, dla których liczba $3^k + 5^k$ jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku naturalnym większym od 1.

Zadanie (3.3.57).
Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie (4.3.57).
Na trójce liczb wykonujemy następującą operację. Wybieramy dwie spośród tych liczb i zastępujemy je ich sumą oraz ich iloczynem, pozostała liczba nie ulega zmianie. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od trójki (3,4,5) i wykonując tę operację możemy ponownie uzyskać trójkę liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

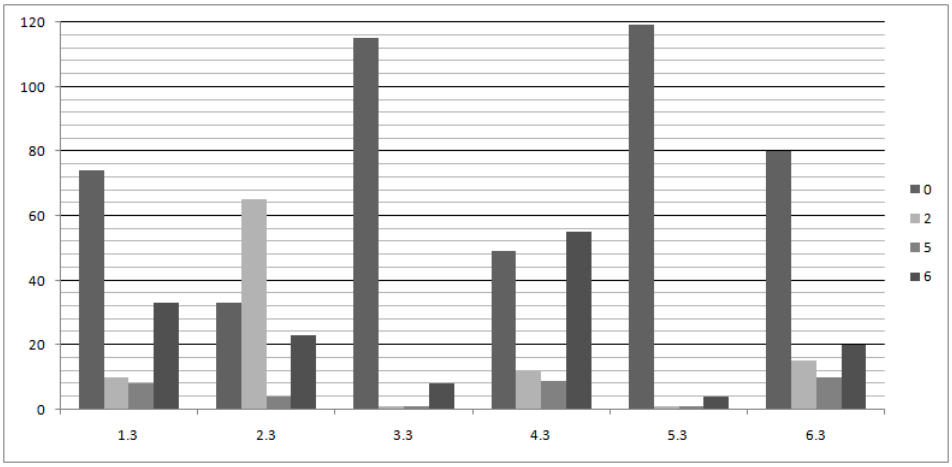
Zadanie (5.3.57).
Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Zadanie (6.3.57).
Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b, dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$ jest wielomianem postaci

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

gdzie każda z liczb c_0, c_1, $\ldots$, c_{n-1} jest równa 1 lub -1.

Informacje o ocenach zadań z finału, prezentuje rysunek 9 oraz tabela 94 ze strony 249.
Najtrudniejsze okazały się zadania geometryczne: 3.3.57 z geometrii płaskiej i 5.3.57 z geometrii przestrzennej (współczynniki trudności wyniosły, odpowiednio, 0,92 i 0,96).
Najłatwiejsze było zadanie kombinatoryczne 4.3.57 opierające się na klasycznej metodzie niezmienników.
Charakterystyczna jest duża liczba *połówek* w zadaniu teorioliczbowym 2.3.57.



Rysunek 9: **Punktacja rozwiązań w 3 etapie 57 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów**

Wartości współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej dla zadań III etapu 57 Olimpiady Matematycznej przedstawia tabela 85.
Wynika z niej, że zadania 1.3.57, 4.3.57 i 6.3.57 dobrze różnicowały, zadania 2.3.57 i 3.3.57 różnicowały umiarkowanie, a zadanie 5.3.57 - słabo. W przypadku zadania 5.3.57 trzeba jednak pamiętać o współczynniku trudności: 0,96. Wówczas róznicowanie nie dotyczy całej populacji,ale ma istotne znaczenie dla ustalenia kolejności na najwyższych miejscach w rankingu.

zadanie	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
r_{pb}	0,66	0,54	0,41	0,64	0,31	0,62

Tabela 85: **Moc różnicująca zadań 3 etapu 57 Olimpiady Matematycznej.**

Tabela 86 pokazuje, że trudno dopatrzeć się istotnej korelacji między wynikami zadań z II i III etapu 57 OM. Wynika to zapewne stąd, że rozwiązanie zadań określonego typu zależy od jednostkowego pomysłu. Widoczna jest tylko pewna korelacja między zadaniem 6.2.57 i zadaniami 2.3.57 oraz 4.3.57, która może wynikać z typu tych zadań: wszystkie lokują się na pograniczu rozważań kombinatorycznych i teorioliczbowych.

zadanie	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
1.2	*0,12*	*0,10*	*0,09*	*0,08*	*0,12*	*0,12*
2.2	*-0,07*	*-0,10*	0,27	*0,00*	0,22	*0,11*
3.2	*-0,20*	*0,12*	*-0,05*	*0,15*	*-0,02*	*0,05*
4.2	*0,07*	*0,06*	*-0,01*	*0,11*	*0,14*	0,19
5.2	*0,06*	*0,00*	0,20	-0,18	0,21	0,23
6.2	*0,02*	*-0,02*	0,30	*0,16*	0,36	*0,15*

Tabela 86: **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu III 57 OM obliczone dla 125 prac uczestników przy skali oceniania 0-1.** Wszystkie współczynniki, które nie są zaznaczone *kursywą* są istotne z $p < 0,05$.

Kategoria	Liczba uczniów	Procent liczby finalistów	Liczba laureatów	Liczba wyróżnionych
dziewczęta	8	6,4%	2	0
chłopcy	117	93,6%	13	16
gimnazjum	4	3,2%	0	0
klasa I	14	11,2%	4	0
klasa II	45	36%	3	8
klasa III	62	49,6%	8	8

Tabela 87: **Uczestnicy III etapu 57 OM.**

Dziewczęta stanowiły tylko 6,4% uczestników finału, ale były wśród nich dwie laureatki. Prawie połowę uczestników finału, laureatów i wyróżnionych stanowili uczniowie klas trzecich. Zwraca uwagę fakt, że czterech pierwszoklasistów zostało laureatami, w tym Przemek Mazur, który zajął pierwsze miejsce.

Na podstawie tabeli 88 można stwierdzić, że z zadaniami 3.3.57, 4.3.57 i 5.3.57 zdecydowanie najlepiej poradzili sobie uczniowie klas pierwszych. Wszystkie te zadania nie wymagały bardzo dużej wiedzy. Bardzo słaby wynik w przypadku kombinatorycznego zadania 3.3.57 osiągnęli uczniowie klas trzecich.
Wyraźnie lepsze okazały się dziewczęta, które lepiej od chłopców poradziły sobie z zadaniami 3.3.57, 4.3.57, 5.3.57 i 6.3.57.
W przypadku zadania geometrycznego 1.3.57 oraz zadania 4.3.57 zwraca uwagę dobry wynik uczniów V LO w Krakowie.
Zadanie 2.3.57 najlepiej rozwiązywali uczniowie IV LO w Toruniu, a zadania 5.3.57 i 6.3.57 uczniowie VI LO w Bydgoszczy.
Tabela 89 pokazuje wartości współczynnika korelacji między ocenami zadań z 3 etapu 57 OM. Korelacje zostały wyliczone zarówno dla skali 0-1, jak i dla skali 0-2-5-6. Widać, że wartości w obu przypadkach są bardzo zbliżone, mimo ilościowego potraktowania jakościowej, sztucznej skali 0-2-5-6.
Najwyraźniej widoczna jest korelacja między rozwiązaniami zadań geometrycznych 3.3.57 i 5.3.57.
Pewna, chociaż mniej istotna, korelacja występuje między zadaniami kombinatorycznymi i teorioliczbowymi.

Kategoria	Liczba uczniów	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
Polska	125	33	22	7	52	4	25
dziewczęta	8	25	13	13	63	13	50
chłopcy	117	33	22	7	51	3	23
gimnazjum	4	0	0	0	25	0	25
klasa I	14	29	21	21	71	14	14
klasa II	45	33	24	11	49	2	22
klasa III	62	35	21	2	52	3	29
XIV LO Warszawa	15	20	27	20	53	7	47
V LO Kraków	15	60	40	0	80	0	33
III LO Gdynia	10	30	30	20	60	0	30
XIV LO Wrocław	7	28	43	0	43	0	14
V LO Bielsko-Biała	5	40	0	0	0	0	20
VI LO Bydgoszcz	5	40	0	0	60	40	60
XIII LO Szczecin	5	0	20	20	60	20	20
IV LO Toruń	5	40	60	20	60	0	0

Tabela 88: **Poprawne rozwiązania zadań III etapu 57 OM. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej kategorii (wybrane szkoły, z których pochodziło co najmniej pięciu finalistów).**

zadanie	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	etap III
1.3	1,00	0,25	*0,07*	0,30	*0,03*	0,23	0,66
	1,00	0,37	*0,09*	0,30	*0,07*	0,30	0,70
2.3	0,25	1,00	*0,00*	*0,15*	*-0,10*	0,24	0,54
	0,37	1,00	*0,00*	0,23	*-0,08*	0,34	0,60
3.3	*0,07*	*0,00*	1,00	*0,14*	0,42	0,20	0,41
	0,09	*0,00*	1,00	*0,12*	0,40	0,18	0,41
4.3	0,30	*0,15*	*0,14*	1,00	*0,11*	*0,14*	0,64
	0,30	0,23	*0,12*	1,00	*0,14*	*0,14*	0,64
5.3	*0,03*	*-0,10*	0,42	*0,11*	1,00	*0,16*	0,31
	0,07	*-0,08*	0,40	*0,14*	1,00	*0,15*	0,34
6.3	0,23	0,24	0,20	*0,14*	*0,16*	1,00	0,62
	0,30	0,34	0,18	*0,14*	*0,15*	1,00	0,64
etap III	0,66	0,54	0,41	0,64	0,31	0,62	1,00
	0,70	0,60	0,41	0,64	0,34	0,64	1,00

Tabela 89: **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu III obliczone dla 125 prac uczestników. Górna wartość obliczona jest przy skali oceniania 0-1, a dolna dla skali 0-2-5-6.** Wszystkie współczynniki, które nie są zaznaczone *kursywą* są istotne z $p < 0,05$.

	zad. 1.2	zad. 2.2	zad. 3.2	zad. 4.2	zad. 5.2	zad. 6.2	suma etapu II
0 punktów	358	525	355	401	505	533	2677
0 punktów %	63,9%	93,8%	63,4%	71,6%	90,2%	95,2%	79,7%
2 punkty	66	11	11	37	6	4	135
2 punkty %	11,8%	2,0%	2,0%	6,6%	1,1%	0,7%	4,0%
5 punktów	27	4	19	44	8	9	111
5 punktów %	4,8%	0,7%	3,4%	7,9%	1,4%	1,6%	3,3%
6 punktów	109	20	175	78	41	14	437
6 punktów %	19,5%	3,6%	31,3%	13,9%	7,3%	2,5%	13,0%
nierozwiązane	424	536	366	438	511	537	2812
nierozwiązane %	75,7%	95,7%	65,4%	78,2%	91,3%	95,9%	83,7%
rozwiązane	136	24	194	122	49	23	548
rozwiązane %	24,3%	4,3%	34,6%	21,8%	8,8%	4,1%	16,3%
średnia	1,64	0,29	2,08	1,36	0,53	0,24	6,16
średnia 0-1	0,24	0,04	0,35	0,22	0,09	0,04	0,98
wsp. trudności	0,76	0,96	0,65	0,78	0,91	0,96	0,84
dolny kwartyl	0	0	0	0	0	0	0
mediana	0	0	0	0	0	0	5
górny kwartyl	2	0	6	2	0	0	11
odch. std.	2,45	1,21	2,80	2,32	1,66	1,13	7,52
odch. std. 0-1	0,43	0,20	0,48	0,41	0,28	0,20	1,27

Tabela 90: **Dane statystyczne o zadaniach II etapu 57 OM.**

statystyka	zad. 1.2	zad. 2.2	zad. 3.2	zad. 4.2	zad. 5.2	zad. 6.2	suma etapu II
0 punktów	21	95	19	27	81	102	345
0 punktów %	16,8%	76,0%	15,2%	21,6%	64,8%	81,6%	46,0%
2 punkty	10	7	1	12	3	3	36
2 punkty %	8,0%	5,6%	0,8%	9,6%	2,4%	2,4%	4,8%
5 punktów	10	3	7	21	5	6	52
5 punktów %	8,0%	2,4%	5,6%	16,8%	4,0%	4,8%	6,9%
6 punktów	84	20	98	65	36	14	317
6 punktów %	67,2%	16,0%	78,4%	52,0%	28,8%	11,2%	42,3%
nierozwiązane	31	102	20	39	84	105	381
nierozwiązane %	24,8%	81,6%	16,0%	31,2%	67,2%	84,0%	50,8%
rozwiązane	94	23	105	86	41	20	369
rozwiązane %	75,2%	18,4%	84,0%	68,8%	32,8%	16,0%	49,2%
średnia	4,59	1,19	5,00	4,15	1,98	0,96	17,87
średnia 0-1	0,75	0,18	0,84	0,69	0,33	0,16	2,95
wsp. trudności	0,25	0,82	0,16	0,31	0,67	0,84	0,51
dolny kwartyl	5	0	6	2	0	0	13
mediana	6	0	6	6	0	0	17
górny kwartyl	6	0	6	6	6	0	22
odch. std.	2,34	2,28	2,17	2,47	2,76	2,11	5,83
odch. std. 0-1	0,43	0,39	0,37	0,47	0,47	0,37	1,03

Tabela 91: **Dane statystyczne o pracach tych uczestników II etapu, którzy awansowali do finału 57 OM.**

Kategoria	Liczba uczniów	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2.	6.2
Polska	560	24	4	35	22	9	4
Warszawa	83	29	13	34	22	19	6
Kraków	54	35	9	46	37	11	2
Wrocław	47	17	2	40	26	2	4
Toruń	27	30	0	26	11	7	0
Szczecin	26	23	4	27	15	15	8
Gdynia	20	50	5	65	45	10	15
Poznań	16	0	0	13	13	0	0
Bydgoszcz	15	40	7	60	33	33	7
Rzeszów	15	20	0	27	13	7	0
Białystok	12	25	0	33	17	0	0
Bielsko-Biała	12	50	17	25	33	25	0
Dąbrowa Górnicza	12	17	0	25	8	0	8
Koszalin	11	9	0	64	9	9	9
Stalowa Wola	11	9	0	36	9	0	0
Katowice	10	30	10	50	40	10	10
Radom	10	10	0	30	20	20	0
Lublin	9	33	0	78	33	11	0
Gliwice	8	25	0	38	25	0	0
Grudziądz	7	43	0	14	0	0	0
Łomża	7	14	0	43	14	14	0
Olsztyn	7	43	0	29	0	14	0
Słupsk	7	0	0	29	14	0	14
Kielce	6	33	0	17	33	0	0
Łódź	6	17	0	17	17	0	0
Płock	6	33	0	67	50	0	0
Przemyśl	6	17	0	0	0	0	0
Jasło	5	0	0	20	0	0	0
Krosno	5	40	0	60	60	20	0
Piotrków Trybunalski	5	20	0	20	0	0	0

Tabela 92: **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 57 OM wg miejscowości z co najmniej 5 uczestnikami. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej miejscowości.**

Kategoria	Liczba uczniów	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
Polska	560	24	4	35	22	9	4
XIV LO Warszawa	56	32	18	30	29	25	7
V LO Kraków	40	43	10	48	40	13	0
XIV LO Wrocław	24	17	0	50	25	0	4
III LO Wrocław	22	18	5	27	23	0	5
III LO Gdynia	19	53	5	68	47	11	16
XIII LO Szczecin	19	21	5	32	21	16	11
IV LO Toruń	16	38	0	31	6	13	0
V LO Bielsko-Biała	11	45	18	27	36	27	0
I LO Koszalin	11	9	0	64	9	9	9
I LO Stalowa Wola	11	9	0	36	9	0	0
II LO Kraków	9	11	11	56	33	11	11
VIII LO Poznań	9	0	0	22	22	0	0
VI LO Radom	9	11	0	33	22	22	0
VI LO Bydgoszcz	8	75	13	88	63	50	13
II LO Dąbrowa Górnicza	8	25	0	38	13	0	13
VIII LO Katowice	8	38	0	50	50	0	13
I LO Białystok	7	29	0	29	0	0	0
I LO Bydgoszcz	7	0	0	29	0	14	0
II LO Grudziądz	7	43	0	14	0	0	0
I LO Łomża	7	14	0	43	14	14	0
LO Akademickie Toruń	7	29	0	29	29	0	0
I LO Gliwice	6	33	0	50	33	0	0
I LO Słupsk	6	0	0	17	17	0	17
II LO Warszawa	6	0	17	33	0	33	0
III LO Białystok	5	20	0	40	40	0	0
I LO Jasło	5	0	0	20	0	0	0
I LO Krosno	5	40	0	60	60	20	0
I LO Lublin	5	40	0	80	20	20	0
I LO Łódź	5	0	0	20	20	0	0
II LO Olsztyn	5	60	0	20	0	20	0
I LO Piotrków	5	20	0	20	0	0	0
16 Gimnazjum Szczecin	5	40	0	20	0	0	0
LO SS. Prezentek Rzeszów	4	50	0	25	25	0	0
46 Gimnazjum Kraków	3	33	0	33	0	0	0
I LO Konin	2	50	0	100	100	0	0

Tabela 93: **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 57 OM wg szkół z co najmniej 5 uczestnikami. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej szkoły.**

statystyka	zad. 1.3	zad. 2.3	zad. 3.3	zad. 4.3	zad. 5.3	zad. 6.3	suma et. III
0 punktów	74	32	115	48	119	79	467
0 punktów %	59,2%	25,6%	92,0%	38,4%	95,5%	63,2%	62,3%
2 punkty	10	66	1	12	1	15	105
2 punkty %	8,0%	52,8%	0,8%	9,6%	0,8%	12,0%	14,0%
5 punktów	8	4	1	10	1	11	35
5 punktów %	6,4%	3,2%	0,8%	8,0%	0,8%	8,8%	4,7%
6 punktów	33	23	8	55	4	20	143
6 punktów %	26,4%	18,4%	6,4%	44,0%	3,2%	16,0%	19,1%
nierozw.	84	98	116	60	120	94	572
nierozw. %	67,2%	78,4%	92,8%	48,0%	96,0%	75,2%	76,3%
rozwiązane	41	27	9	65	5	31	178
rozwiązane %	32,8%	21,6%	7,2%	52,0%	4,0%	24,8%	23,7%
średnia	2,06	2,32	0,44	3,23	0,25	1,64	9,94
średnia 0-1	0,33	0,22	0,07	0,52	0,04	0,25	1,42
wsp. trudności	0,67	0,78	0,93	0,48	0,96	0,75	0,76
dolny kwartyl	0	0	0	0	0	0	4
mediana	0	2	0	5	0	0	8
górny kwartyl	6	2	0	6	0	2	14
odch. std.	2,69	2,05	1,54	2,80	1,15	2,41	7,44
odch. std. 0-1	0,47	0,41	0,26	0,50	0,20	0,43	1,29

Tabela 94: **Dane statystyczne o pracach finalistów 57 OM.**

5.2 Informacje statystyczne o zadaniach z II i III etapu 58 OM

Uczestnicy II etapu 58 OM mieli do rozwiązania następujący zestaw zadań:

Zadanie (1.2.58).
Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

Zadanie (2.2.58).
Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$BC = CD$$

$$DE = EA$$

$$\measuredangle BCD = \measuredangle DEA = 90^\circ$$

Udowodnić, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt. Wyznaczyć miary jego kątów, znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC.

Zadanie (3.2.58).
Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n. Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności:
Wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P. Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę.
Dla każdego $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy istniej początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

Zadanie (4.2.58).
Udowodnić, że jeżeli a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $ad = b^2 + bc + c^2$, to liczba

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest złożona.

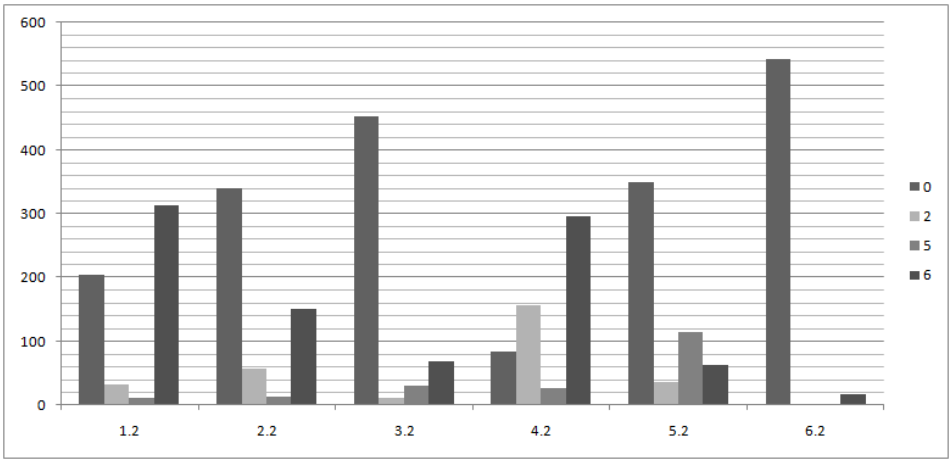
Zadanie (5.2.58).
Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBN$ są rombami o bokach długości a. Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Zadanie (6.2.58).
Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$$

Wykazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leqslant 2(a+b+c+d) - 4$$



Rysunek 10: **Punktacja rozwiązań w II etapie 58 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów.**

Na rysunku 10 przedstawiłem wyniki uzyskane przez uczniów w II etapie 58 OM.

Tabela 109 ze strony 262 zawiera podstawowe statystyki wszystkich zadań etapu II 58 Olimpiady Matematycznej, wyliczone analogicznie jak w poprzednim roczniku w tabeli 90.

Zadanie 6.2.58 na dowodzenie nierówności okazało się bardzo trudne (współczynnik trudności 0,96) - rozwiązało je zaledwie 18 osób.
Zadania 1.2.58 i 4.2.58 okazały się najłatwiejsze: współczynnik trudności wyniósł 0,43.
Zadania geometryczne 2.2.58 i 5.2.58 były zadaniami o średniej trudności (współczynniki trudności wyniosły, odpowiednio, 0,71 i 0,69).

Tabele od 95 do 100 i rysunki od 11 do 13 pokazują, jaki był związek między oceną za poszczególne zadania i awansem; posługuję się tutaj analizą selektywności zadań. Prawie wszyscy finaliści rozwiązali zadania 1.2.57 i 4.2.57.

Na podstawie tych wykresów wnioskuję, że zadanie 2.2.58, 3.2.58 oraz 5.2.58 dobrze selekcjonowały do finału, a zadania 1.2.58 i 4.2.58 - nieco gorzej. Zadanie 6.2.58 przy selekcji nie odgrywało większej roli, gdyż było zadaniem bardzo trudnym.

		1.2.57		razem
		0	1	
awans	tak	5	118	123
	nie	233	206	439
razem		238	324	562

Tabela 95: **Związek między wynikiem zadania 1.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału**

		2.2.58		razem
		0	1	
awans	tak	30	93	123
	nie	369	70	439
razem		399	163	562

Tabela 96: **Związek między wynikiem zadania 2.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału**

		3.2.58		razem
		0	1	
awans	tak	55	68	123
	nie	409	30	439
razem		464	98	562

Tabela 97: **Związek między wynikiem zadania 3.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału**

		4.2.58		razem
		0	1	
awans	tak	9	114	123
	nie	231	208	439
razem		240	322	562

Tabela 98: **Związek między wynikiem zadania 4.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału**

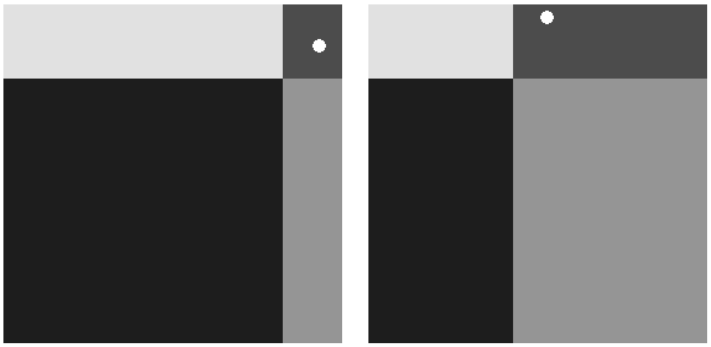
		5.2.58		razem
		0	1	
awans	tak	25	98	123
	nie	360	79	439
razem		385	177	562

Tabela 99: **Związek między wynikiem zadania 5.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału**

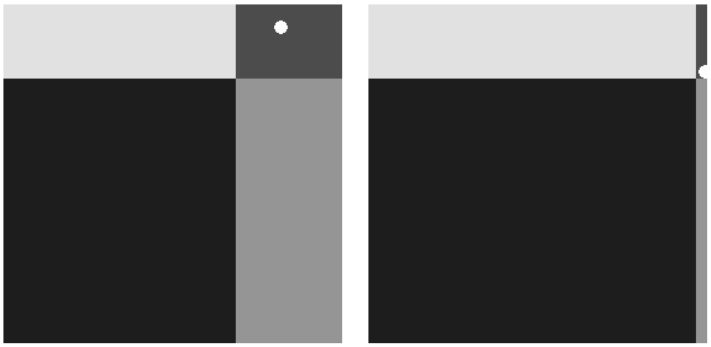
		6.2.58		razem
		0	1	
awans	tak	107	16	123
	nie	437	2	439
razem		544	18	562

Tabela 100: **Związek między wynikiem zadania 6.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału**

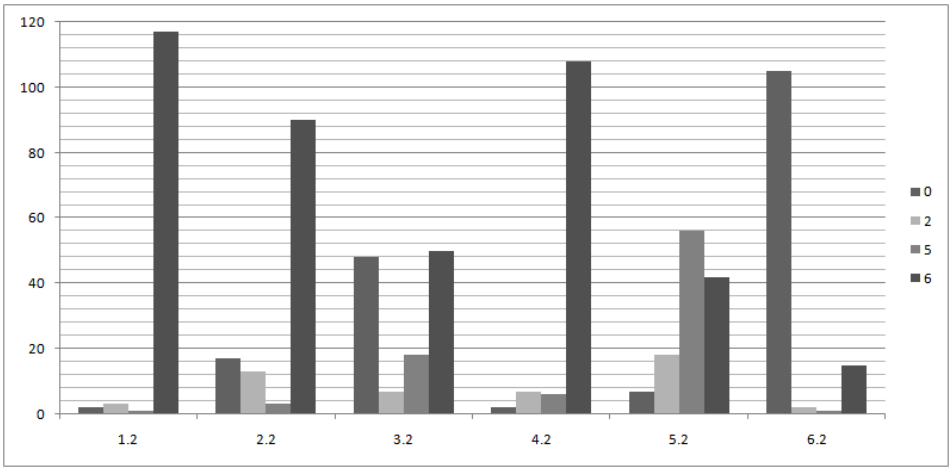
Rysunek 11: **Diagramy selektywności zadań 1.2.58 (z lewej) i 2.2.58 (z prawej).**



Rysunek 12: **Diagramy selektywności zadań 3.2.58 (z lewej) i 4.3.58 (z prawej).**



Rysunek 13: **Diagramy selektywności zadań 5.2.58 (z lewej) i 6.2.58 (z prawej).**



Rysunek 14: **Punktacja rozwiązań finalistów w II etapie 58 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów**

Rysunek 15 wskazuje, że o awansie do finału decydowały dobrze zrobione trzy zadania: 1.2.58, 2.2.58 i 4.2.58. Praktycznego znaczenia selekcyjnego nie miało zadanie 6.2.58 ze względu na swą trudność.

Tabela 101 pokazuje wartości współczynnika korelacji między ocenami zadań z II etapu 58 OM. Korelacje zostały wyliczone zarówno dla skali 0-1, jak i dla skali 0-2-5-6. Widać, że wartości w obu przypadkach są bardzo zbliżone, mimo ilościowego potraktowania jakościowej, sztucznej skali 0-2-5-6.

zadanie	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	etap II
1.2	1,00	0,23	0,23	0,37	0,25	0,11	0,67
	1,00	0,24	0,24	0,38	0,28	0,13	0,62
2.2	0,23	1,00	0,22	0,16	0,31	0,13	0,60
	0,24	1,00	0,22	0,16	0,36	0,13	0,62
3.2	0,23	0,22	1,00	0,25	0,32	0,24	0,60
	0,24	0,22	1,00	0,26	0,37	0,26	0,62
4.2	0,37	0,16	0,25	1,00	0,21	0,12	0,64
	0,38	0,16	0,26	1,00	0,25	0,11	0,61
5.2	0,25	0,31	0,32	0,21	1,00	0,09	0,64
	0,28	0,36	0,37	0,25	1,00	0,13	0,68
6.2	0,11	0,13	0,24	0,12	0,09	1,00	0,32
	0,13	0,13	0,26	0,11	0,13	1,00	0,35
etap II	0,67	0,60	0,60	0,64	0,64	0,32	1,00
	0,68	0,62	0,62	0,61	0,68	0,35	1,00

Tabela 101: **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu II 58 OM obliczone dla 562 prac uczestników. Górna wartość obliczona jest przy skali oceniania 0-1, a dolna dla skali 0-2-5-6.** Wszystkie współczynniki są istotne z $p < 0,05$.

Wszystkie współczynniki w tabeli 101 są dodatnie. Ze względu na małą liczbę poprawnych rozwiązań zadania 6.2.58 współczynniki korelacji między jego rozwiązaniem a rozwiązaniami innych zadań II etapu są bardzo niskie.
Pewną, choć nieznaczną, korelację można zaobserwować między zadaniami geometrycznymi 2.2.58 i 5.2.58 oraz zadaniami 1.2.58 i 4.2.58, co wynika zapewne z tego, że oba zadania były zadaniami pierwszymi w kolejnych dniach (na ogół uczniowie uważają zadania pierwsze za najłatwiejsze, a także w pierwszej kolejności starają się je rozwiązywać).

W tabeli 102 podaję moc różnicującą zadań obliczoną jako współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej.

zadanie	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
r_{pb}	0,67	0,60	0,60	0,64	0,64	0,32

Tabela 102: **Moc różnicująca zadań II etapu 58 Olimpiady Matematycznej.**

Jak widać wartość współczynnika mocy różnicującej dla zadania 6.2.58 jest najniższa i znacząco odbiega od wartości tego wskaźnika dla pozostałych zadań. Jak już wspominałem, jest to związane z bardzo wysokim współczynnikiem trudności tego zadania.

Kategoria	Liczba uczniów	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
Polska	562	58	29	17	57	31	3
dziewczęta	88	39	30	3	36	17	1
chłopcy	474	61	29	20	61	34	4
gimnazjum	9	78	67	22	67	44	0
klasa I	80	51	33	23	60	31	5
klasa II	207	55	25	16	52	30	2
klasa III	266	61	30	17	60	32	4
okręg gdański	40	45	13	15	58	20	0
okręg katowicki	69	65	19	12	57	29	1
okręg krakowski	64	61	39	27	73	31	11
okręg lubelski	53	47	21	15	42	19	2
okręg łódzki	32	53	22	25	50	28	0
okręg poznański	23	35	30	26	48	35	9
okręg szczeciński	49	55	35	12	57	29	2
okręg toruński	56	55	21	11	52	29	2
okręg warszawski	118	63	43	19	58	47	4
okręg wrocławski	58	59	26	17	67	29	0

Tabela 103: **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 58 OM. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej kategorii.**

Na podstawie tabeli 103 można zauważyć, że dziewczęta znacznie gorzej poradziły sobie z zadaniami II etapu 58 OM. Wyjątek stanowiło zadanie geometryczne 2.2.58.
Zadania 1.2.58, 2.2.58, 4.2.58 i 5.2.58 zostały najlepiej rozwiązane w grupie uczniów gimnazjów. Dotyczy to w szczególności obu zadań geometrycznych.
Zadanie 6.2.58 na dowodzenie nierówności okazało się bardzo trudne i żaden gimnazjalista go nie rozwiązał, a w grupie uczniów liceów liczba poprawnych rozwiązań wynosiła ok. 2-5%. Najlepiej to zadanie rozwiązywali uczniowie z okręgu krakowskiego i poznańskiego.
Z zadaniami geometrycznymi (2.2.58 i 5.2.58) najlepiej poradzili sobie uczniowie z okręgu warszawskiego.

W tabeli 111 ze strony 264 przedstawiam wyniki uczniów z miast, z których pochodziło co najmniej pięciu uczestników II etapu 58 OM.

Najlepsze wyniki w zadaniu 1.2.58 osiągnęli uczniowie z miast: Opole i Łomża (wszyscy uczniowie z tych miast rozwiązali zadanie), Bielsko-Biała (93%), Bydgoszcz (90%), Jasło (czterech z pięciu uczestników rozwiązało zadanie), Legnica (75%).
Najlepsze wyniki w zadaniu 2.2.58 osiągnęli uczniowie z miast: Opole (60%), Gliwice (57%), Warszawa (50%).
Najlepsze wyniki w zadaniu 3.2.58 osiągnęli uczniowie z miast: Stalowa Wola (43%), Bydgoszcz (40%), Opole (40%).
Najlepsze wyniki w zadaniu 4.2.58 osiągnęli uczniowie z miast: Bydgoszcz (80%), Dąbrowa Górnicza (80%), Opole (80%), Kraków (77%), Wrocław (73%).
Najlepsze wyniki w zadaniu 5.2.58 osiągnęli uczniowie z miast: Warszawa (49%), Białystok (44%), Radom (43%), Poznań (42%).

W powyższym zestawieniu pewne miasta pojawiają się kilkukrotnie: Opole, Bydgoszcz, Warszawa. W przypadku uczniów z Opola jest to związane z tym, że przy małej populacji

uczniów z tego miasta było wśród nich czterech mocnych zawodników, co znacznie podwyższyło wynik (choć tylko dwóch się dostało do finału, jeszcze dwóch miało po rozwiązane trzy zadania - oznacza to, że znaleźli się tuż pod progiem kwalifikacji do finału).

W zestawieniu w tabeli 112 ze strony 265 przedstawiam szkoły, z których było co najmniej pięciu uczestników II etapu 58 OM. Zostało uwzględnione także I LO w Kielcach. Mimo niewielkiej liczby uczestników II etapu 58 OM, trzech uczniów tej szkoły awansowało do finału.

Zadanie 1.2.58 najlepiej rozwiązali uczniowie: V LO w Bielsku-Białej (100%), I LO w Łomży (100%), II LO w Opolu (100%), II LO w Krakowie (89%).
Zadanie 2.2.58 najlepiej rozwiązali uczniowie: I LO w Białymstoku (60%), II LO w Opolu (60%), VI LO w Bydgoszczy (57%), II LO w Krakowie (56%), XIV LO w Warszawie (53%).
Zadanie 3.2.58 najlepiej rozwiązali uczniowie I LO w Kielcach (100%). Następna w kolejności szkoła to VI LO w Bydgoszczy, której czterej uczniowie (spośród siedmiu) rozwiązali zadanie.
Zadanie 4.2.58 najlepiej rozwiązali uczniowie szkół: VI LO w Bydgoszczy (100%), II LO w Krakowie (89%), XIV LO we Wrocławiu (88%), I LO w Białymstoku (80%).
Zadanie 5.2.58 najlepiej rozwiązali uczniowie: I LO w Kielcach (100%), VI LO w Bydgoszczy (33%), VIII LO w Poznaniu (56%), XIV LO w Warszawa (53%).
W przypadku zadaniu 6.2.58 (o nierówności) warto podać wszystkie szkoły, z których uczniowie rozwiązali to zadanie.
Tabela **??** zawiera dane o rozwiązywalności zadania 6.2.58 dla uczniów ze szkół, które w zawodach II stopnia miały co najmniej 5 uczniów - ze względu na małą liczbę rozwiązań dołączyłem również pozostałe szkoły, w których ktoś potrafił rozwiązać to zadanie. Najlepiej w tym zestawieniu wypada V LO z Krakowa - aż 6 uczniów tej szkoły rozwiązało zadanie 6.2.58 - daje to $\frac{1}{3}$ wszystkich poprawnych rozwiązań. Poza warszawskim XIV LO (trzy poprawne rozwiązania) w pozostałych szkołach zadanie 6.2.58 umiał rozwiązać co najwyżej 1 uczeń na szkołę. Potwierdza to naszą „zasłyszaną" wiedzę, że wśród uczniów krakowskiej „piątki" zadania z nierównościami są bardzo popularne.

Finaliści 58 OM rozwiązywali następujący zestaw zadań:

Zadanie (1.3.58).
W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, odcinek CD jest wysokością, punkt E leży na boku AB, a punkt M jest środkiem odcinka CE. Prosta prostopadła do prostej OM i przechodząca przez punkt M przecina proste AC, BC odpowiednio w punktach K, L. Dowieść, że

$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}$$

Zadanie (2.3.58).
Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *białą*, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite nazwiemy *czarnymi*. Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej *białych* dzielników jest równa sumie jej *czarnych* dzielników.

Zadanie (3.3.58).
Płaszczyznę podzielono prostymi poziomymi i pionowymi na kwadraty jednostkowe. W każdy kwadrat należy wpisać liczbę całkowitą dodatnią tak, by każda liczba całkowita dodatnia wystąpiła na płaszczyźnie dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić w taki sposób, aby każda napisana liczba była dzielnikiem sumy liczb wpisanych w cztery kwadraty sąsiednie.

Zadanie (4.3.58).
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Wyznaczyć liczbę możliwych wartości iloczynu $k \cdot m$, gdzie k, m są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności

$$n^2 \leqslant k \leqslant m \leqslant (n+1)^2$$

Zadanie (5.3.58).
W czworościanie $ABCD$ spełnione są zależności:

$$\measuredangle BAC + \measuredangle BDC = \measuredangle ABD + \measuredangle ACD$$

$$\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle ADC$$

Udowodnić, że środek sfery opisanej na tym czworościanie leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi AB i CD.

Zadanie (6.3.58).
Ciąg a_0, a_1, a_2, ...jest określony przez warunki:

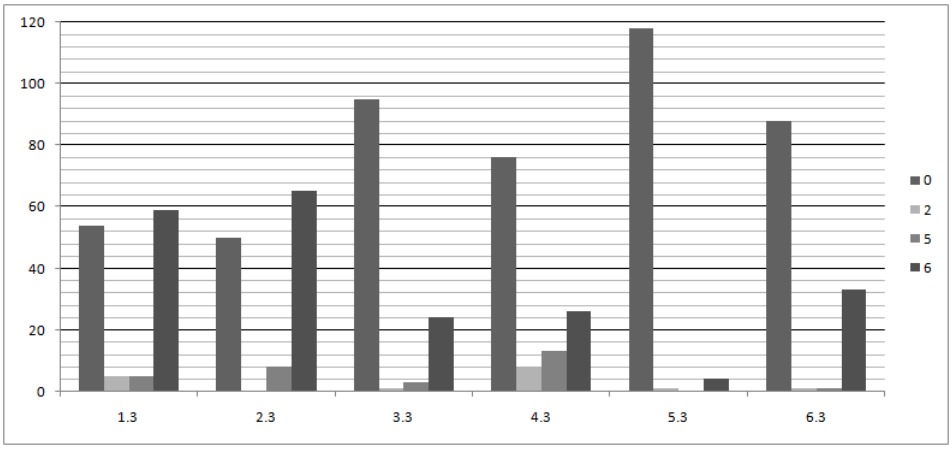
$$a_0 = -1$$

oraz

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \ldots + \frac{a_1}{n} + \frac{a_0}{n+1} = 0$$

dla $n \geqslant 1$.
Wykazać, że $a_n > 0$ dla $n \geqslant 1$.

Na rysunku 15 znalazły się informacje o ocenach kolejnych zadań III etapu w grupie 123 finalistów 58 Olimpiady Matematycznej.



Rysunek 15: **Punktacja rozwiązań finalistów w III etapie 58 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów**

Tabela 110 ze strony 263 zawiera te same informacje, które znalazły się w tabeli 109, ale tylko dla tych 123 uczestników II etapu, którzy wzięli udział w finale. Zadanie 6.2.58 wyraźnie wyróżnia się współczynnikiem trudności dla finalistów.

W tabeli 113 ze strony 266 zebrałem podstawowe dane statystyczne dla zadań III etapu 58 OM.
Zadania 1.3.58 (z geometrii płaskiej) i 2.3.58 (teorioliczbowe) okazały się najłatwiejsze; współczynniki trudności wyniosły, odpowiednio, 0,48 i 0,43. Z kolei najtrudniejsze okazało się zadanie z geometrii przestrzennej 5.3.58,które rozwiązało czterech zawodników. Zadanie z nierównością (6.3.58) miało średni współczynnik trudności: 0,83.

Kategoria	Liczba uczniów	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
Polska	123	52	59	22	32	3	28
dziewczęta	7	71	43	14	14	14	14
chłopcy	116	51	60	22	33	3	28
gimnazjum	5	60	40	40	0	0	0
klasa I	18	56	61	11	33	6	39
klasa II	34	53	62	21	35	9	32
klasa III	66	50	59	24	32	0	24
XIV LO Warszawa	28	46	54	21	18	4	21
V LO Kraków	14	50	64	50	36	0	21
XIII LO Szczecin	6	83	67	0	50	17	33
XIV LO Wrocław	6	67	67	0	17	0	17
VI LO Bydgoszcz	5	40	60	20	60	0	60
II LO Kraków	5	60	40	20	40	40	40
IV LO Toruń	5	80	20	0	40	0	0
III LO Gdynia	4	75	75	25	75	0	25

Tabela 104: **Poprawne rozwiązania zadań III etapu 58 OM. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej kategorii (wybrane szkoły, z których pochodziło co najmniej pięciu finalistów).**

Na podstawie tabeli 104 można stwierdzić, że ze wszystkimi zadaniami oprócz 3.3.58 zdecydowanie najlepiej poradzili sobie uczniowie klas drugich. Uczniowie klas drugich, startujący w 58 OM, w trakcie 57 OM (jako uczniowie klas pierwszych), wypadli bardzo dobrze w porównaniu ze starszymi kolegami i koleżankami.
Uczniowie gimnazjum znakomicie wypadli w pierwszym dniu zawodów, lecz drugiego dnia nie rozwiązali poprawnie żadnego zadania. Przyczyną mogło być zmęczenie, nierówne rozłożenie sił, wreszcie brak obycia z zawodami dwudniowymi.
Dziewczęta dobrze poradziły sobie tylko z najłatwiejszym zadaniem 1.3.58. Każde z zadań od trzeciego do szóstego rozwiązała tylko jedna dziewczyna.
Finał 58 OM zdominowali uczniowie XIV LO z Warszawy i V LO z Krakowa, którzy razem stanowili ponad 30% uczestników zawodów III stopnia. Jednak wyniki uczniów tych szkół nie odbiegały znacząco od wyników wszystkich finalistów.

zadanie	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
r_{pb}	0,56	0,65	0,57	0,70	0,27	0,41

Tabela 105: **Moc różnicująca zadań III etapu 58 Olimpiady Matematycznej.**

W tabeli 105 prezentuję moc różnicującą zadań III etapu 58 OM.

Zadanie 5.3.58 ma bardzo małą moc różnicującą, co wynika z jego trudności. Jednakże odegrało ono decydującą rolę w ustalaniu listy laureatów: Przemysław Mazur, który zajął pierwsze miejsce, rozwiązał zadanie 5.3.58, czego nie zrobili zawodnicy z kolejnych czterech miejsc. Dzięki rozwiązaniu zadania 5.3.58 dwóch zawodników zostało laureatami (bez tego zadania dostaliby wyróżnienie).

zadanie	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
1.2	*0,13*	*0,08*	*-0,09*	*-0,013*	*0,04*	*0,13*
2.2	*0,14*	*-0,05*	0,*0,03*	*-0,10*	*0,10*	*-0,07*
3.2	*0,19*	0,29	*0,16*	0,26	*0,16*	*0,12*
4.2	*0,04*	*0,09*	*0,00*	*0,06*	*0,05*	*0,03*
5.2	*0,04*	*0,08*	*0,07*	*0,08*	*0,09*	*-0,14*
6.2	*-0,02*	0,22	0,26	0,26	*0,07*	*0,09*

Tabela 106: **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu III 58 OM obliczone dla 123 prac uczestników przy skali oceniania 0-1.** Wszystkie współczynniki, które nie są zaznaczone *kursywą* są istotne z $p < 0,05$.

Między zadaniami II i III etapu nie ma w zasadzie korelacji, poza nieznaczną korelacją między zadaniem kombinatorycznym 3.2.58 i zadaniem geometrycznym 1.3.58,choć zapewne wynika to z faktu,że były to najłatwiejsze zadania II i III etapu 58 OM.

Tabela 107 pokazuje wartości współczynnika korelacji między ocenami zadań z 3 etapu 57 OM. Korelacje zostały wyliczone dla skali 0-1.

zadanie	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	etap III
1.3	1,00	0,20	*0,16*	0,27	*0,18*	*-0,06*	0,56
2.3	0,20	1,00	0,28	0,35	*0,06*	*0,07*	0,65
3.3	*0,16*	0,28	1,00	0,27	*0,01*	*0,11*	0,58
4.3	0,27	0,35	0,27	1,00	*0,17*	*0,16*	0,70
5.3	*0,17*	*0,06*	*0,01*	*0,17*	1,00	*-0,01*	0,27
6.3	*-0,06*	*0,07*	*0,11*	*0,16*	*-0,01*	1,00	0,41
etap III	0,56	0,65	0,58	0,70	0,27	0,41	1,00

Tabela 107: **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu III 58 OM obliczone dla 123 prac uczestników.** Wszystkie współczynniki, które nie są zaznaczone *kursywą* są istotne z $p < 0,05$.

Korelacja dla zadań 58 OM jest niska lub jej nie ma.
Pewną, choć nieznaczną korelację, można dostrzec między zadaniami niegeoemtrycznymi 2.3.58, 3.3.58 i 4.3.58.

Kategoria	Liczba uczniów	Procent liczby finalistów	Liczba laureatów	Liczba wyróżnionych
dziewczęta	7	5,7%	1	1
chłopcy	116	94,3%	20	21
gimnazjum	5	4%	0	1
klasa I	18	14,6%	3	2
klasa II	34	27,6%	5	8
klasa III	66	54%	13	11

Tabela 108: **Uczestnicy III etapu 58 OM.**

W finale 58 Olimpiady Matematycznej wzięło udział 123 uczniów, w tym 8 dziewcząt. Dziewczęta stanowiły tylko 5,7% uczestników finału.
Ponad połowę uczestników finału i laureatów stanowili uczniowie klas trzecich.

statystyka	zad. 1.2	zad. 2.2	zad. 3.2	zad. 4.2	zad. 5.2	zad. 6.2	suma etapu II
0 punktów	205	341	452	84	349	542	1973
0 punktów %	36,5%	60,7%	80,4%	14,9%	62,1%	96,4%	58,5%
2 punkty	33	58	12	156	36	2	297
2 punkty %	5,9%	10,3%	2,1%	27,8%	6,4%	0,4%	8,8%
5 punktów	10	13	30	25	114	1	193
5 punktów %	1,8%	2,3%	5,3%	4,4%	20,3%	0,2%	5,7%
6 punktów	314	150	68	297	63	17	909
6 punktów %	55,9%	26,7%	12,1%	52,8%	11,2%	3,0%	27,0%
nierozwiązane	238	399	464	240	385	544	2270
nierozwiązane %	42,3%	71,0%	82,6%	42,7%	68,5%	96,8%	67,3%
rozwiązane	324	163	98	322	177	18	1102
rozwiązane %	57,6%	29,0%	17,4%	57,3%	31,5%	3,2%	32,7%
średnia	3,56	1,92	2,04	3,95	1,81	0,20	12,48
średnia 0-1	0,58	0,29	0,17	0,57	0,31	0,03	1,96
wsp. trudności	0,42	0,71	0,83	0,43	0,69	0,97	0,67
dolny kwartyl	0	0	0	2	0	0	6
mediana	6	0	0	6	0	0	12
górny kwartyl	6	6	0	6	5	0	18
odch. std.	2,85	2,63	2,17	2,38	2,47	1,05	8,42
odch. std. 0-1	0,49	0,45	0,38	0,50	0,46	0,18	1,51

Tabela 109: **Dane statystyczne o zadaniach II etapu 58 OM.**

statystyka	zad. 1.2	zad. 2.2	zad. 3.2	zad. 4.2	zad. 5.2	zad. 6.2	suma etapu II
0 punktów	2	17	48	2	7	105	181
0 punktów %	1,6%	13,8%	39,0%	1,6%	5,7%	85,4%	24,5%
2 punkty	3	13	7	7	18	2	50
2 punkty %	2,4%	10,6%	5,7%	5,7%	14,6%	1,6%	6,8%
5 punktów	1	3	18	6	56	1	85
5 punktów %	0,8%	2,4%	14,6%	4,9%	45,5%	0,8%	11,5%
6 punktów	117	90	50	108	42	15	422
6 punktów %	95,1%	73,2%	40,7%	87,8%	34,1%	12,2%	57,2%
nierozwiązane	5	30	55	9	25	107	231
nierozwiązane %	4,1%	24,4%	44,7%	7,3%	20,3%	87,0%	31,3%
rozwiązane	118	93	68	114	98	16	507
rozwiązane %	95,9%	75,6%	55,3%	92,7%	79,7%	13,0%	68,7%
średnia	5,80	4,72	3,28	5,63	4,62	0,80	24,85
średnia 0-1	0,96	0,76	0,55	0,93	0,80	0,13	4,12
wsp. trudności	0,04	0,24	0,45	0,07	0,20	0,87	0,31
dolny kwartyl	6	5	0	6	5	0	21
mediana	6	6	5	6	5	0	24
górny kwartyl	6	6	6	6	6	0	29
odch. std.	0,97	2,26	2,79	1,19	1,72	2,01	4,39
odch. std. 0-1	0,20	0,43	0,50	0,26	0,40	0,34	0,85

Tabela 110: **Dane statystyczne o pracach tych uczestników II etapu, którzy awansowali do finału 58 OM.**

Kategoria	Liczba uczniów	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
Polska	562	58	29	17	57	31	3
Warszawa	86	62	50	21	57	49	3
Kraków	56	64	43	30	77	34	13
Gdynia	37	46	14	16	59	22	0
Szczecin	34	53	38	6	59	26	3
Wrocław	33	70	24	15	73	33	0
Toruń	27	59	30	7	52	37	0
Bielsko-Biała	15	93	7	20	53	40	0
Katowice	14	64	7	7	57	29	0
Łódź	12	67	17	17	50	0	0
Poznań	12	25	42	8	50	42	0
Lublin	11	45	9	18	64	18	0
Bydgoszcz	10	90	40	40	80	40	10
Białystok	9	78	44	22	56	44	22
Grudziądz	8	38	0	0	50	13	0
Legnica	8	75	13	13	50	25	0
Płock	8	50	13	25	63	38	0
Gliwice	7	57	57	0	57	29	14
Radom	7	57	29	14	57	43	0
Stalowa Wola	7	29	43	43	0	29	0
Koszalin	6	50	33	17	50	33	9
Piotrków Trybunalski	6	17	17	0	67	17	0
Rzeszów	6	50	0	0	33	17	0
Dąbrowa Górnicza	5	40	20	0	80	0	0
Jasło	5	80	0	20	60	20	0
Krosno	5	40	20	0	60	0	20
Łomża	5	100	20	0	60	40	0
Olsztyn	5	20	0	0	40	20	0
Opole	5	100	60	40	80	40	0
Przemyśl	5	60	20	20	40	40	0
Sanok	5	20	40	0	0	0	0

Tabela 111: **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 58 OM wg miejscowości z co najmniej 5 uczestnikami. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej miejscowości.**

Kategoria	Liczba uczniów	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
Polska	562	58	29	17	57	31	3
XIV LO Warszawa	72	61	53	21	58	53	4
V LO Kraków	43	63	42	30	74	35	14
III LO Gdynia	28	54	14	18	68	25	0
XIII LO Szczecin	26	58	42	8	69	27	4
XIV LO Wrocław	17	82	18	6	88	35	0
IV LO Toruń	16	69	44	6	63	44	0
V LO Bielsko-Biała	14	100	7	21	57	43	0
III LO Wrocław	14	64	29	21	57	29	0
VIII LO Katowice	13	62	8	8	62	31	0
I LO Łódź	10	70	20	20	50	0	0
II LO Kraków	9	89	56	44	89	44	11
VIII LO Poznań	9	33	44	11	56	56	0
I LO Legnica	8	75	13	13	50	25	0
VI LO Bydgoszcz	7	86	57	57	100	57	14
II LO Grudziądz	7	43	0	0	43	14	0
VI LO Radom	7	57	29	14	57	43	0
I LO Stalowa Wola	7	29	43	43	0	29	0
I LO Koszalin	6	50	33	17	50	33	0
I LO Piotrków Trybunalski	6	17	17	0	67	17	0
I LO Białystok	5	80	60	20	80	20	20
I LO Jasło	5	80	0	20	60	20	0
I LO Krosno	5	40	20	0	60	0	20
I LO Lublin	5	40	0	0	40	0	0
I LO Łomża	5	100	20	0	60	40	0
II LO Opole	5	100	60	40	80	40	0
I LO Sanok	5	20	40	0	0	0	0
V LO Szczecin	5	20	20	0	0	0	0
X LO Toruń	5	20	20	0	20	20	0
LO Akademickie Toruń	5	80	0	20	60	40	0
I LO Kielce	4	75	50	100	75	100	0

Tabela 112: **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 58 OM wg szkół z co najmniej 5 uczestnikami. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej szkoły.**

statystyka	zad. 1.3	zad. 2.3	zad. 3.3	zad. 4.3	zad. 5.3	zad. 6.3	suma et. III
0 punktów	54	50	95	76	118	88	481
0 punktów %	43,9%	40,7%	77,2%	61,8%	95,9%	71,5%	65,2%
2 punkty	5	0	1	8	1	1	16
2 punkty %	4,1%	0,0%	0,8%	6,5%	0,8%	0,8%	2,2%
5 punktów	5	8	3	13	0	1	30
5 punktów %	4,1%	6,5%	2,4%	10,6%	0,0%	0,8%	4,0%
6 punktów	59	65	24	26	4	33	211
6 punktów %	48,0%	52,8%	19,5%	21,1%	3,3%	26,8%	28,6%
nierozw.	59	50	96	84	119	89	497
nierozw. %	48,0%	40,7%	78,0%	68,3%	96,7%	72,4%	67,3%
rozwiązane	64	73	27	39	4	34	241
rozwiązane %	52,0%	59,3%	22,0%	31,7%	3,3%	27,6%	32,7%
średnia	3,16	3,50	1,31	1,93	0,21	1,67	11,77
średnia 0-1	0,52	0,59	0,22	0,32	0,03	0,28	1,42
wsp. trudności	0,48	0,41	0,78	0,68	0,97	0,72	0,76
dolny kwartyl	0	0	0	0	0	0	6
mediana	5	6	0	0	0	0	12
górny kwartyl	6	6	0	5	0	6	18
odch. std.	2,92	2,92	2,45	2,62	1,08	2,68	8,30
odch. std. 0-1	0,50	0,49	0,42	0,47	0,18	0,45	1,40

Tabela 113: **Dane statystyczne o pracach finalistów 58 OM.**

5.3 Analiza trudności zadań

Zadania olimpijskie są trudne w tym sensie, że rozwiązuje je mała część zawodników. Oto stosowne statystyki.

statystyka	zad. 1.2	zad. 2.2	zad. 3.2	zad. 4.2	zad. 5.2	zad. 6.2
58 OM	0,42	0,71	0,83	0,43	0,69	0,97
57 OM	0,76	0,96	0,65	0,78	0,91	0,96
56 OM	0,89	0,78	0,99	0,80	0,82	0,89
55 OM	0,75	0,91	0,99	0,67	0,66	0,87
54 OM	0,42	0,88	0,87	0,96	0,53	0,82
53 OM	0,46	0,78	0,84	0,36	0,65	0,50
52 OM	0,37	0,24	0,61	0,82	0,78	0,96

Tabela 114: **Dane statystyczne o trudności zadań drugich etapów 54 - 58 OM.**

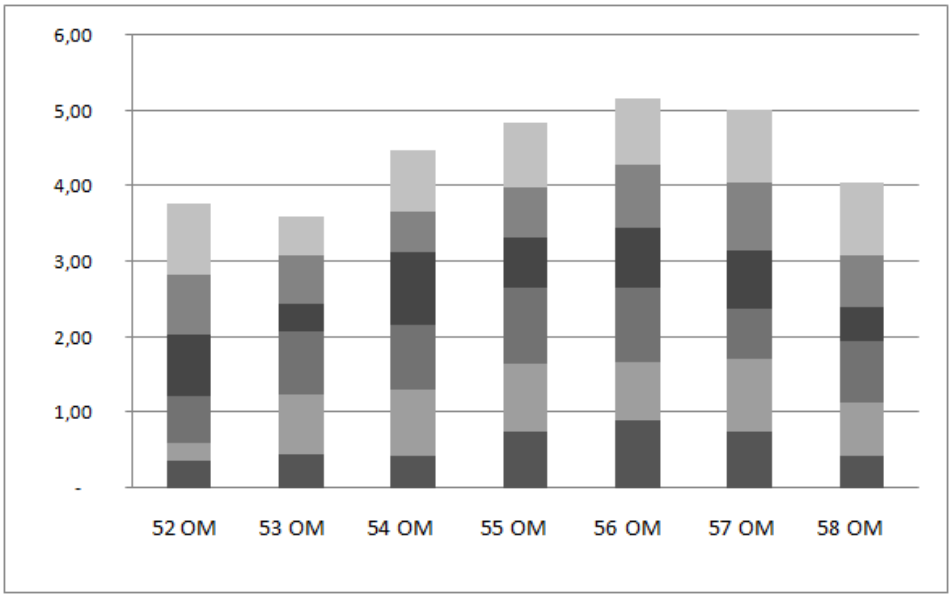
Wyraźnie dostrzegalna jest tendencja wzrastająca trudności zadań II etapów Olimpiad Matematycznych od 52 do 56 OM (rysunek 16). Na tym tle zadania geometryczne nie odbiegają znacząco poziomem trudności od wszystkich zadań II etapów, choć okazały się one trudniejsze niż pozostałe zadania na 57 i 58 OM (rysunek 17). Zadania geometryczne uzyskały też niski współczynnik korelacji ich wyniku z wynikiem globalnym. Świadczy to o słabej znajomości geometrii przez uczniów i jednocześnie o tym, że umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych wpływa stosunkowo nieznacznie na końcowy wynik albo, że zadania z geometrii są *a priori* trudniejsze. Z każdej z nich wynika (tezę wzmacniają wyniki zadań stereometrycznych), że maleje rola geometrii jako przewodniej dyscypliny matematycznej (w każdym razie w szkole).

Andrzej Schinzel podsumowując 50 lat istnienia Olimpiady Matematycznej ([113]) pisał, że *jeśli idzie o treść zadań, to według oceny autora artykułu zadania algebraiczne są obecnie trudniejsze niż w początkach Olimpiady, a zadania geometryczne, jeśli nie łatwiejsze, to w każdym razie inne, brak jest bowiem zupełnie tzw. zadań konstrukcyjnych.*

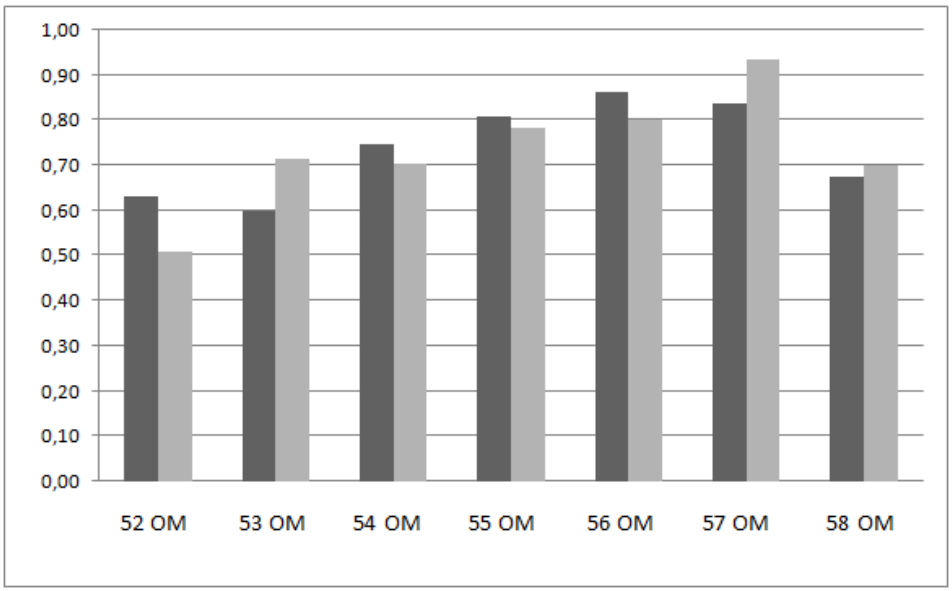
statystyka	zad. 1.3	zad. 2.3	zad. 3.3	zad. 4.3	zad. 5.3	zad. 6.3
58 OM	0,58	0,52	0,82	0,74	0,98	0,77
57 OM	0,67	0,78	0,93	0,48	0,96	0,75
56 OM	0,65	0,89	0,97	0,34	0,98	0,98
55 OM	0,41	0,86	0,95	0,61	0,95	0,86
54 OM	0,87	0,66	0,93	0,52	0,98	0,98
53 OM	0,89	0,40	0,88	0,67	0,81	0,23
52 OM	0,15	0,83	0,68	0,84	0,63	0,82

Tabela 115: **Dane statystyczne o trudności zadań trzecich etapów 52 - 58 OM.**

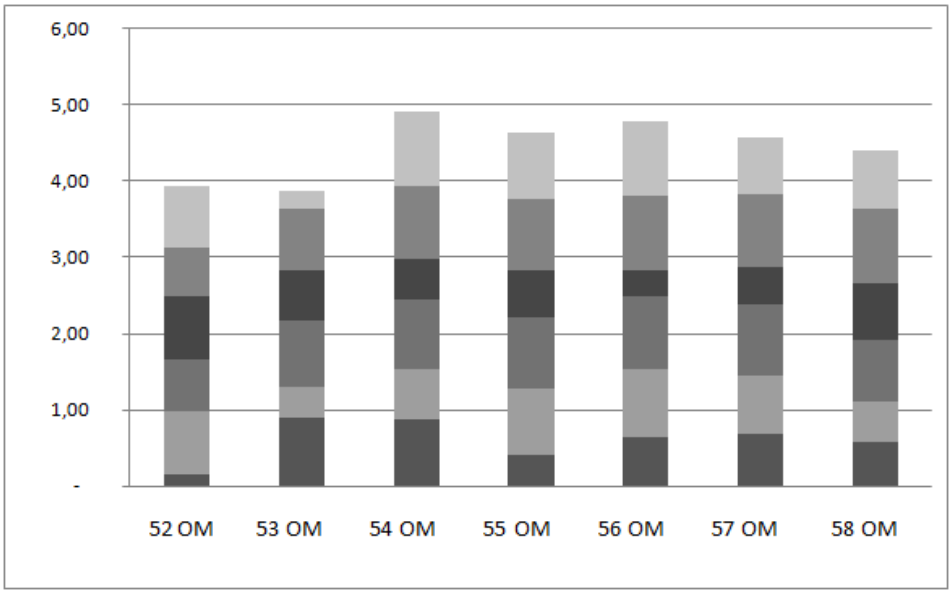
Trudność zadań III etapów Olimpiad Matematycznych pozostaje na bardzo podobnym poziomie od 54 OM (rysunek 18). Zadania geometryczne są trudniejsze od pozostałych zadań III etapów (rysunek 19). Wyraźnie dostrzegalna jest bardzo duża trudność, jaką sprawiają zawodnikom zadania z geometrii przestrzennej (rysunek 20).



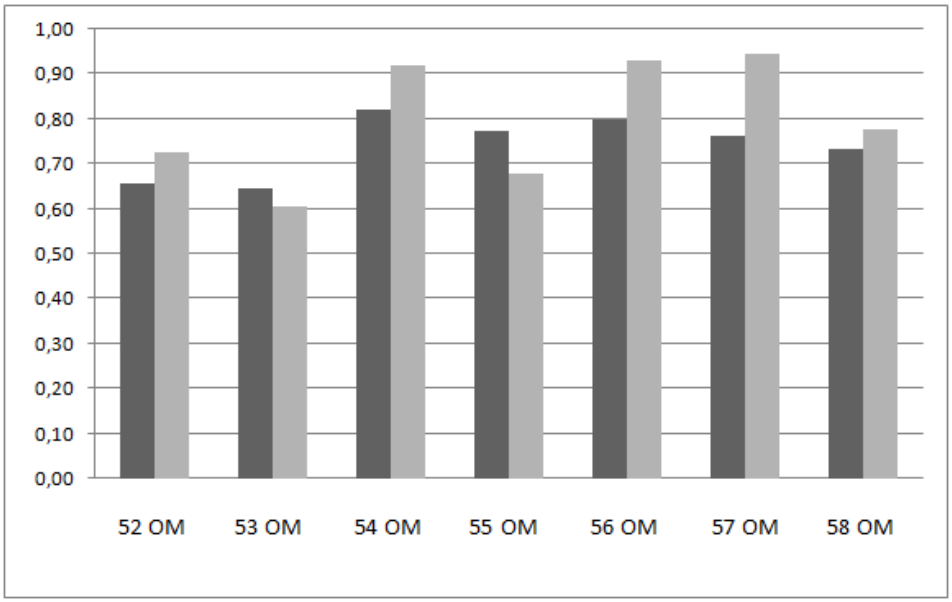
Rysunek 16: **Trudność zadań II etapu olimpiad od 52 OM do 58 OM**



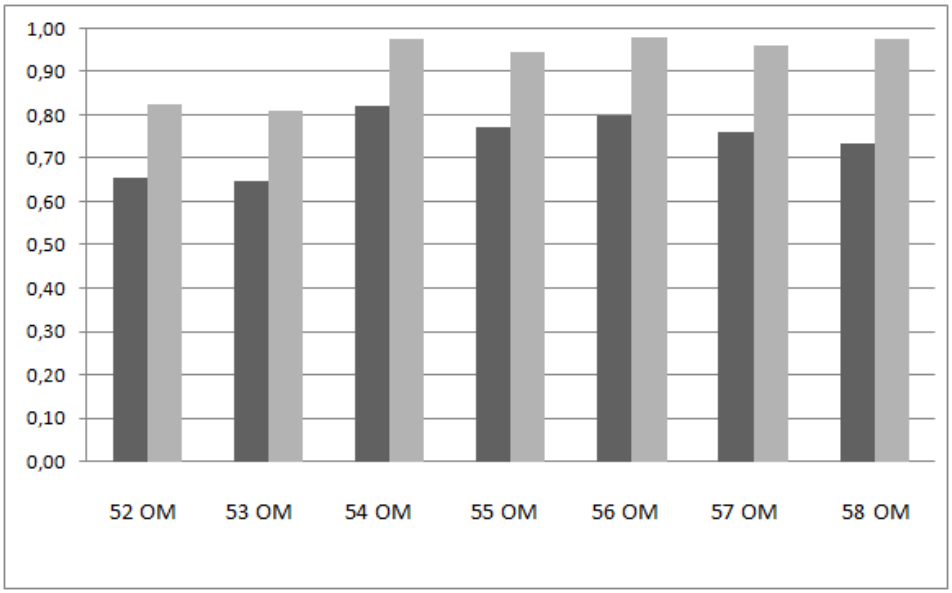
Rysunek 17: **Porównanie średniej trudności zadań geometrycznych ze średnią trudnością zadań II etapu olimpiad od 52 OM do 58 OM**. Zadania geometryczne - słupki po prawej.



Rysunek 18: **Trudność zadań III etapu olimpiad od 52 OM do 58 OM**



Rysunek 19: **Porównanie średniej trudności zadań geometrycznych ze średnią trudnością zadań III etapu olimpiad od 52 OM do 58 OM**. Zadania geometryczne - słupki po prawej.



Rysunek 20: **Porównanie średniej trudności zadań stereometrycznych ze średnią trudnością zadań III etapu olimpiad od 52 OM do 58 OM**. Zadania stereometryczne - słupki po prawej.

5.4 Klasyfikacja zadań w OM

W mojej rozprawie analizie zostały poddane rozwiązania zadań geometrycznych i na dowodzenie nierówności. Zatem warto przyjrzeć się uważniej, jak pod względem ilościowym występowały tego typu zadania w sześćdziesięcioletniej historii Olimpiady Matematycznej.

5.4.1 Zadania na dowodzenie nierówności

O tym, jak ważne były i są zadania na dowodzenie nierówności w Olimpiadzie Matematycznej i kształceniu matematycznych niech świadczy fakt, że pierwszym zadaniem w zawodach stopnia pierwszego w 1. OM było zadanie

Zadanie 1, zawody stopnia I (dla szczebla wyższego), 1 OM
Dowieść, że jeżeli $m > 0$, to $m + \frac{4}{m^2} \geqslant 3$.

W tej chwili zadanie to można uznać za dosyć łatwe dla ucznia interesującego się matematyką, a dla ucznia klasy III LO jest to typowe zadanie na wykorzystanie pochodnej do badania ekstremów funkcji. Nie zachowały się informacje, jak rozwiązywali to zadanie uczniowie biorący udział w I Olimpiadzie Matematycznej, ale w sprawozdaniu Komitetu Głównego OM czytamy: *Dużym powodzeniem cieszyły się zadania 1 i 10, w których stosowano bardzo rozmaite sposoby rozumowania.* Zadanie 1 nie zostało także wymienione wśród zadań, które sprawiły dużo trudności uczestnikom I Olimpiady Matematycznej.

Zadania o nierównościach występowały w już w 1. Olimpiadzie Matematycznej i występują w każdej kolejnej edycji OM.

Zadania na dowodzenie nierówności mają szczególną pozycję w OM. Wynikać to może z wielu przyczyn.

Na pewno ważny jest sposób szacowania wielkości z zadaną dokładnością, z więc taką, aby spełniała warunki zadania. Uczniowie dowodzący nierówności wielokrotnie poprawnie szacują wyrażenia, ale szacowania te są za „grube” i nieprzydatne do dowodu danej nierówności.

Ważną kwestią jest dobór właściwej metody dowodzenia nierówności.

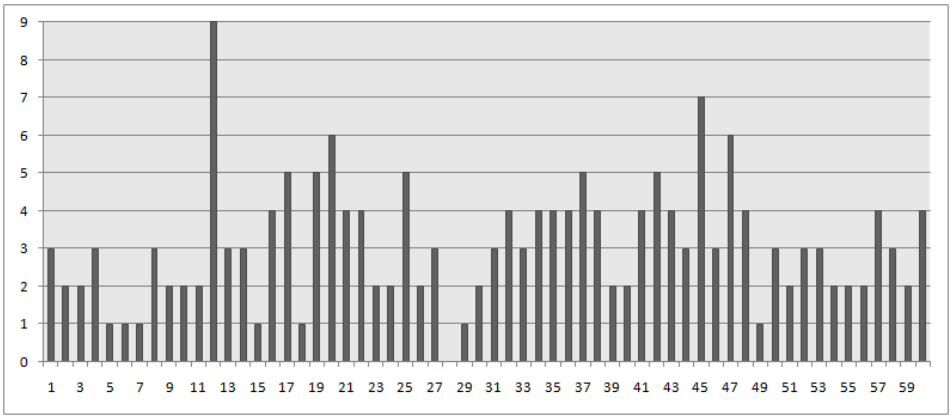
Wśród zadań, jakie występowały na Olimpiadzie Matematycznej skoncentrowałem się na tych, w których należało udowodnić podaną nierówność. Pominąłem w mojej analizie zadania na rozwiązywanie nierówności oraz zadania, w których należało znaleźć wartość największą lub najmniejszą dla danego wyrażenia.

Zadania na dowodzenie nierówności można podzielić na dwie kategorie: nierówności algebraiczne i geometryczne. Zadania na dowodzenie nierówności algebraicznych podzieliłem na trzy kategorie: nierówności w liczbach rzeczywistych, nierówności w liczbach całkowitych, nierówności trygonometryczne. Zadania na dowodzenie nierówności geometrycznych podzieliłem na: nierówności na płaszczyźnie i nierówności w przestrzeni.

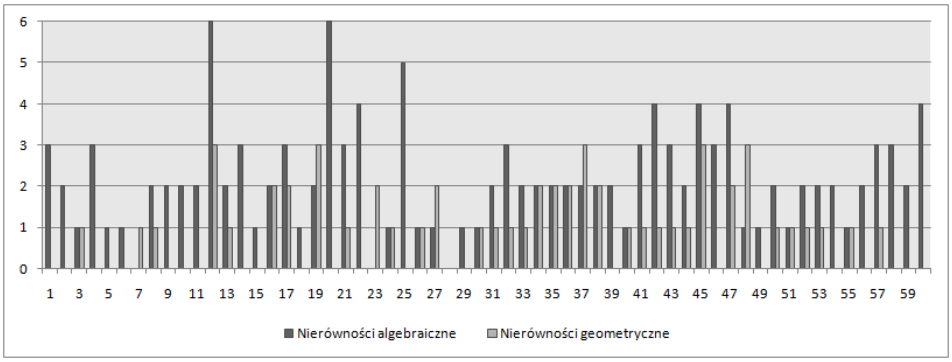
W ciągu 60 edycji Olimpiady Matematycznej pojawiło się 186 zadań na dowodzenie nierówności. Wobec faktu, że w historii olimpiady w zawodach wszystkich stopni pojawiło się 1440 zadań, zadania na dowodzenie nierówności stanowią prawie 13% wszystkich zadań.

Średnio na jedną olimpiadę wypadają trzy zadania na dowodzenie nierówności. Na wykresie na rysunku 21 prezentuję, ile zadań na dowodzenie nierówności pojawiło się na poszczególnych olimpiadach. Można zaobserwować pewne charakterystyczne zjawiska. Najwięcej zadań na dowodzenie nierówności wystąpiło na 12 OM (aż 9 zadań), 45 OM (7 zadań), 20 OM i 47 OM (po 6 zadań). Najmniej zadań tego typu wystąpiło na 28 OM (brak zadań), 5 OM, 6 OM, 7 OM, 15 OM, 17 OM, 29 OM, 49 OM (po jednym zadaniu). Szczególnie dużo takich zadań występuje w okresie od 32 OM do 48 OM (średnio 4 zadania na jedną olimpiadę). Od 49 OM widać wyraźne odejście od zadań na dowodzenie nierówności (średnio 2,5 zadania na olimpiadę). Można chyba mówić o ustaleniu pewnych proporcji: docenienia znaczenia tego typu zadań oraz nie przeceniania ich roli, zwłaszcza w kontekście bardzo rozbudowanej literatury z zakresu dowodzenia nierówności adresowanej do uczniów szkół średnich.

Na wykresie na rysunku 22 prezentuję, ile zadań na dowodzenie nierówności algebraicznych i geometrycznych pojawiło się na poszczególnych olimpiadach. Wyraźna jest przewaga zadań na dowodzenie nierówności algebraicznych (zwłaszcza od 1 OM do 29 OM), chociaż od 30 OM do 50 OM można zaobserwować stałą obecność zadań na dowodzenie nierówności geometrycznych. Od 50 OM nierówności geometryczne pojawiają się sporadycznie.

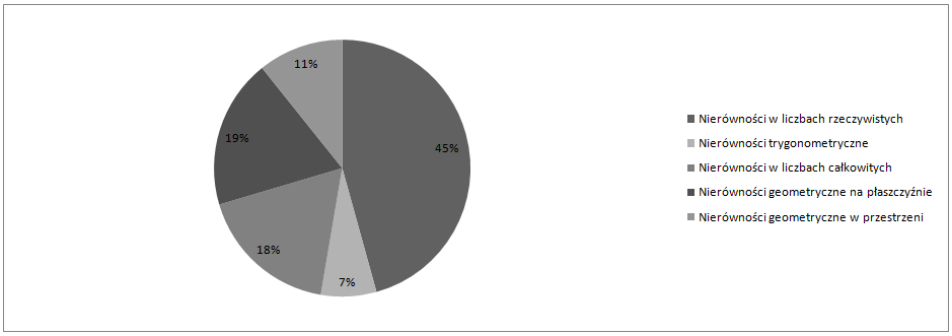


Rysunek 21: **Liczba zadań na dowodzenie nierówności w poszczególnych Olimpiadach**



Rysunek 22: **Liczba zadań na dowodzenie nierówności algebraicznych i geometrycznych w poszczególnych Olimpiadach**

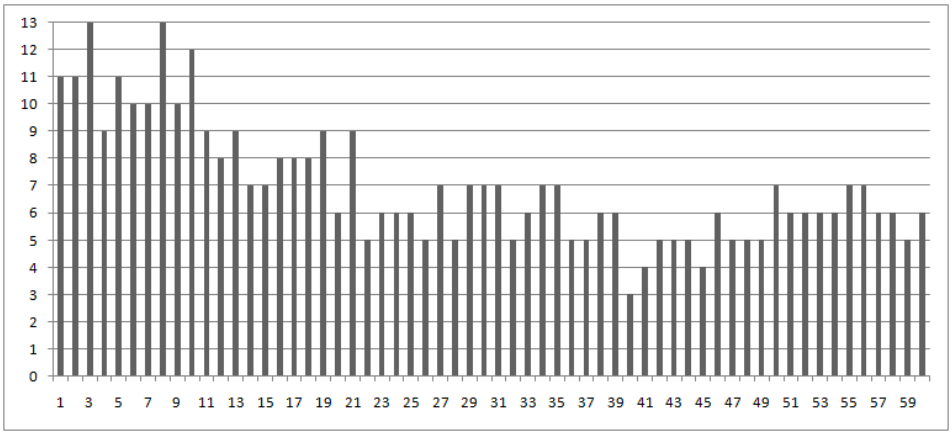
Na wykresie na rysunku 23 zaprezentowałem występowanie (wyrażone w procentach) poszczególnych typów zadań na dowodzenie nierówności. Okazuje się, że prawie połowę (46%) stanowią zadania na dowodzenie nierówności w liczbach rzeczywistych. Drugą co do wielkości grupę tworzą zadania na dowodzenie nierówności w liczbach całkowitych. Wśród zadań na dowodzenie nierówności w liczbach rzeczywistych szczególną rolę odgrywają nierówności z wielomianami symetrycznymi, które stanowią 74% zadań w tej kategorii (pojawiło 59 zadań tego typu). Czterokrotnie pojawiły się zadania na dowodzenie nierówności cyklicznych.



Rysunek 23: **Zadania na dowodzenie poszczególnych typów nierówności w Olimpiadach od 1 do 58**

5.4.2 Zadania z geometrii płaskiej

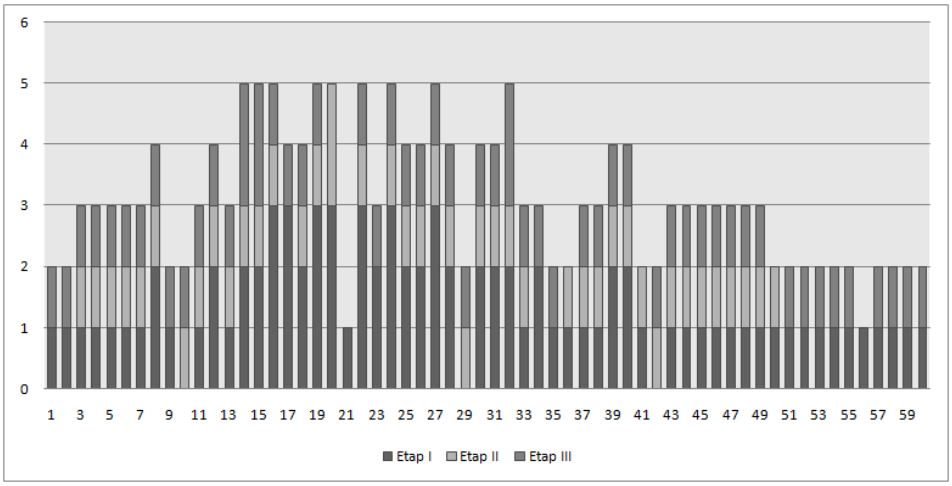
W historii Olimpiady Matematycznej pojawiło się 421 zadań z geometrii płaskiej, co stanowi 29% liczby wszystkich zadań. Obserwacja wykresu 24, że w ciągu pierwszych dwudziestu olimpiad liczba zadań z geometrii płaskiej przekraczała 25% liczby zadań danej OM (średnia liczba zadań planimetrycznych w tym okresie wynosiła prawie 10 zadań w jednej OM). Począwszy od 21 OM liczba tego typu zadań nie przekracza 30% liczby wszystkich zadań (średnia nie przekracza 6 zadań).



Rysunek 24: **Liczba zadań z geometrii płaskiej w poszczególnych Olimpiadach.**

5.4.3 Zadania z geometrii przestrzennej

W trakcie sześćdziesięciu edycji Olimpiady Matematycznej pojawiło się 186 zadań z geometrii przestrzennej (co stanowi 13% liczby wszystkich zadań). Na podstawie rysunku (25) można zauważyć rzecz charakterystyczną: od 12 do 32 olimpiady wystąpiło 86 zadań stereometrycncyh, co stanowi prawie połowę (47%) wszystkich zadań tego typu w ciągu całej historii OM. Natomiast w trakcie olimpiad od 50 do 60 wystąpiło zaledwie 21 zadań stereometrycznych. Praktycznie wszystkie z tych zadań pojawiły się albo na I etapie albo na III etapie zawodów. Fakty te mogą być przyczyną bardzo niskiej rozwiązywalności analizowanych zadań z III etapu 57 i 58 OM. Olimpijczycy niechętnie uczą się stereometrii, gdyż wskazują na fakt, że na II etapie, który decyduje o tytule finalisty, nie występują zadania stereometryczne; jedynie uczniowie o aspiracjach do tytułu laureata uważają za konieczne zajęcie się tego typu zadaniami.

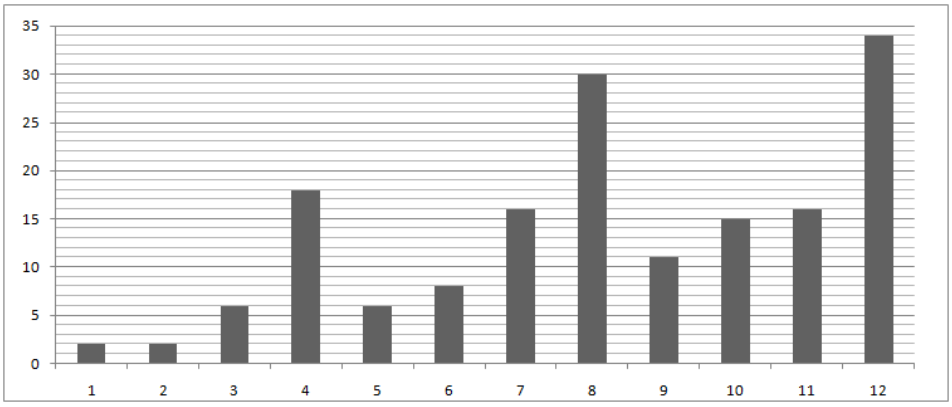


Rysunek 25: **Liczba zadań stereometrycznych w poszczególnych Olimpiadach**

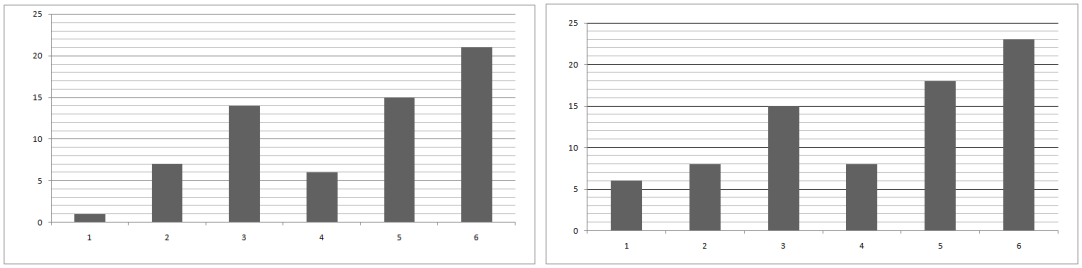
Wśród 182 zadań, 131 to zadania na dowodzenie (charakteryzujące się poleceniem: wykazać, udowodnić, dowieść), 42 to zadania na obliczanie (w tym 9 zadań, w których polecenie brzmiało: rozstrzygnij), 7 to zadania na konstrukcje i 6 na znajdowanie miejsca geometrycznego.

Bardzo silne, potwierdzone wynikami uczniów, jest przekonanie, że zadania występujące

jako ostatnie w danej serii I etapu, w danym dniu zawodów II I III stopnia, są najtrudniejsze. Wykresy 26, 27 wskazują na to, że zadania stereometryczne są uważane za trudniejsze nie tylko przez uczniów, ale także przez osoby układające zadania.



Rysunek 26: **Liczba zadań stereometrycznych w I etapach wszystkich olimpiad matematycznych**



Rysunek 27: **Liczba zadań stereometrycznych w II etapach (z lewej) i III etapów (z prawej) wszystkich olimpiad matematycznych.**

5.5 Analiza statystyczna szkół w OM

Postanowiłem przyjrzeć się dokładniej szkołom, których uczniowie brali udział w zawodach stopnia drugiego i trzeciego OM.

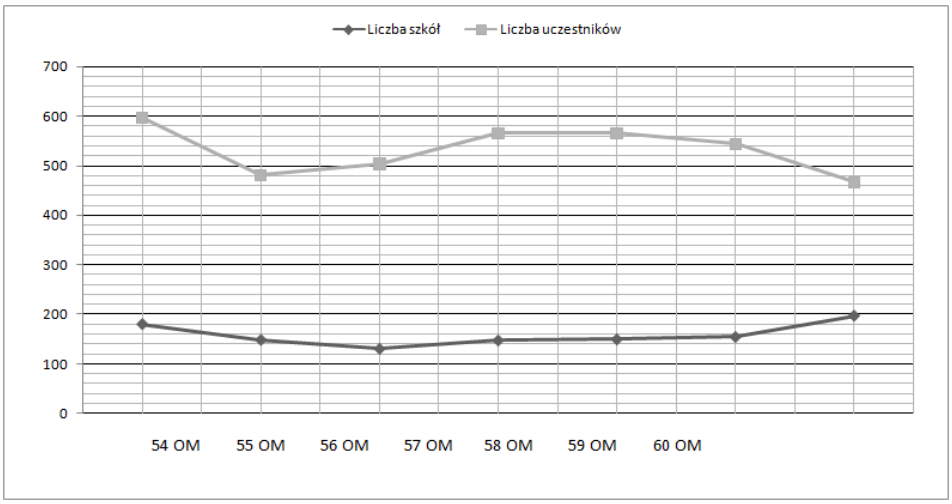
Etap I Olimpiady Matematycznej składa się z 12 zadań, które uczniowie samodzielnie rozwiązują w domu. Zwykle do zakwalifikowania się do zawodów II stopnia wystarczy rozwiązanie 5-7 zadań. Zatem I etap można traktować jako *zapisywanie się* do Olimpiady Matematycznej. Awans do II etapu nie zależy tylko od wiedzy, ale także od chęci, pracowitości, analizy artykułów i książek o tematyce olimpijskiej, czasu poświęconego rozwiązywaniu zadań, zachęty ze strony nauczyciela, atmosfery panującej w szkole. Liczbę zawodników z poszczególnych szkół można zatem traktować jako opis zaangażowania nauczycieli danej placówki w przygotowanie uczniów do startu w Olimpiadzie Matematycznej. Interesujące jest zatem przyjrzenie się tym szkołom, których uczniowie regularnie pojawiają się w drugim etapie.

Szkoła / OM	54	55	56	57	58	59	60	suma
XIV LO w Warszawie	58	43	42	56	72	64	53	388
V LO w Krakowie	24	33	45	42	43	48	26	261
XIII LO w Szczecinie	12	18	21	19	26	22	21	139
XIV LO we Wrocławiu	21	22	16	24	16	21	18	138
IV LO w Toruniu	38	22	21	16	16	15	9	137
III LO w Gdyni	14	8	15	18	30	22	25	132
III LO we Wrocławiu	20	24	22	22	15	10	7	120
VIII LO w Katowicach	14	10	2	8	13	15	14	76
VI LO w Bydgoszczy	10	15	16	8	7	9	11	76
V LO w Bielsku-Białej	6	5	6	11	15	13	13	69
II LO w Krakowie	8	5	2	9	9	11	12	56
VIII LO w Poznaniu	6	4	10	9	9	10	7	55
LO w Stalowej Woli	3	4	13	11	7	6	5	49
II LO w Grudziądzu	12	6	8	7	8	5	3	49
I LO w Łodzi	5	6	7	5	10	11	4	48
I LO w Koszalinie	7	6	12	11	6	4	2	48
I LO w Białymstoku	8	7	7	7	5	6	8	48
GiL w Toruniu	4	5	5	7	5	6	13	45
IV w Rzeszowie	12	8	8	4	3	4	5	44
VI LO w Radomiu	10	3	6	9	7	2	3	40
I LO w Lublinie	6	8	9	5	5	3	3	39
I LO w Łomży	7	2	5	7	5	4	7	37
X w Toruniu	10	3	4	5	5	6	2	35
I LO w Kielcach	5	2	3	4	5	7	7	33
I LO w Piotrkowie Trybunalskim	1	4	3	5	5	4	8	30
I LO w Bydgoszczy	5	1	3	7	3	5	5	29
I LO w Sanoku	3	4	2		5	8	4	26
I LO w Krośnie	2	2	3	5	5	2	7	26
III LO w Białymstoku	5	5	3	5	4	2	1	25

Tabela 116: **Uczestnicy 2 etapu od 54 do 60 OM.**

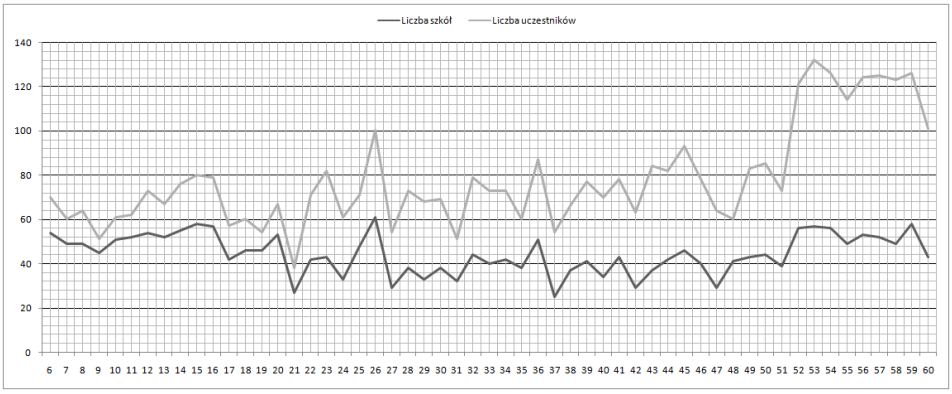
Spośród 402 szkół, których uczniowie uczestniczyli w II etapie w olimpiadach od 6 do 60, co najmniej siedmiu zawodników miało 98 szkół. Przyjrzałem się bliżej szkołom, które miały co najmniej 25 uczestników II etapu od 54 do 60 Olimpiady Matematycznej (na temat uczestników zawodów II stopnia dysponowałem szczegółowymi danymi dotyczącymi tylko olimpiad od 54 do 60).

Widoczna jest (na podstawie tabeli 116) wyraźna dominacja XIV LO w Warszawie (388 uczniów) i V LO w Krakowie (261 uczniów). Pierwsze cztery szkoły w tym zestawieniu to szkoły, które prowadzą klasy z rozszerzonym programem nauczania matematyki we współpracy z uczelniami.
Zwraca uwagę występowanie kilku szkół z jednego miasta: trzy szkoły z Torunia, po dwie szkoły z Białegostoku, Bydgoszczy i Krakowa.
Można przyjąć, że w szkołach wymienionych w tabeli 116 z pewnością odbywa systematyczna praca nauczycieli i uczniów, mająca na celu przygotowanie do startu w Olimpiadzie Matematycznej.

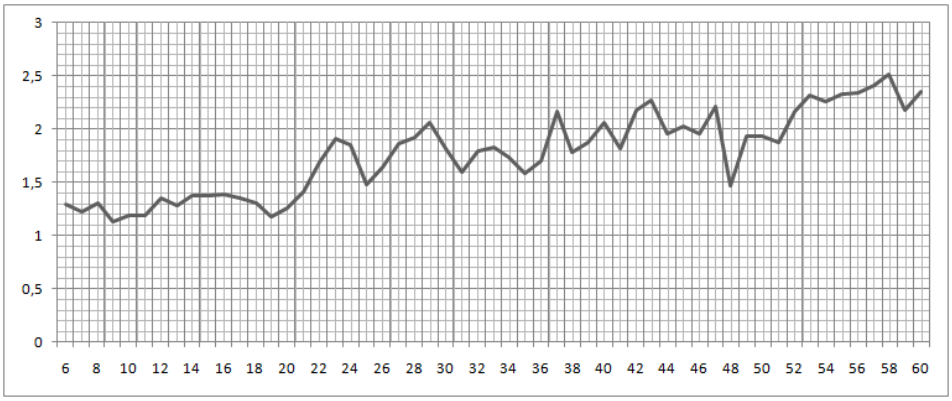


Rysunek 28: **Porównanie liczby szkół i uczestników II etapów od 54 OM do 60 OM.**

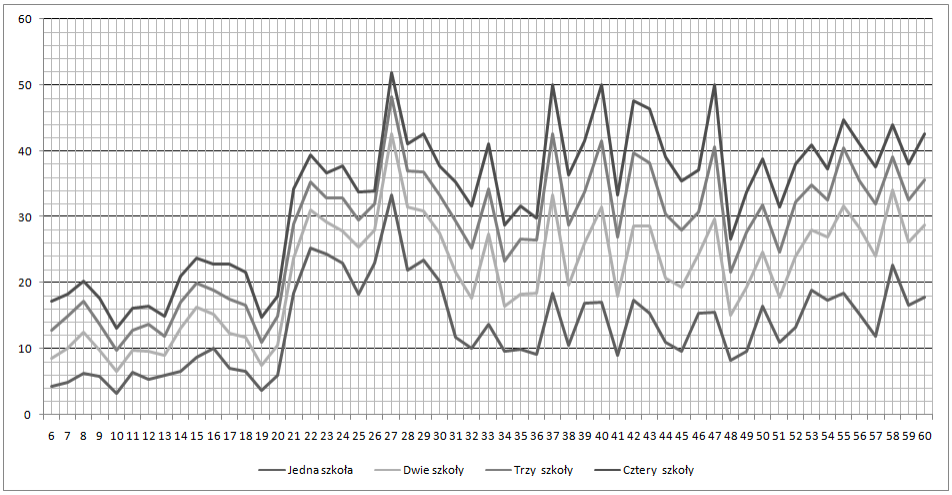
Na rysunku 28 widoczna jest charakterystyczna tendencja: od 56 OM wzrasta liczba szkół, z których pochodzą uczestnicy II etapu i maleje liczba uczestników. Z kolei w przypadku zawodów finałowych (tabele 29, 30) począwszy od 52 OM obserwowany jest wyraźny wzrost liczby uczestników w stosunku do liczby szkół.
Oznacza to dominację *stajni olimpijskich* w zawodach finałowych.



Rysunek 29: **Porównanie liczby szkół i uczestników finałów od 6 OM do 60 OM.**



Rysunek 30: **Stosunek liczby uczestników finałów OM do liczby szkół, z których pochodzili. Na osi odciętych numer OM. Na osi rzędnych iloraz liczby uczestników i liczby szkół.**



Rysunek 31: **Procent uczniów w poszczególnych finałach OM pochodzących z jednej, dwóch, trzech, czterech najlepszych szkół.**

Wykresy 29 30 opisują stałą tendencję: stale wzrasta stosunek liczby uczestników finałów do liczby szkół, z których pochodzili uczestnicy. Oznacza to zwiększanie się znaczenia grupy szkół, które specjalny trening olimpijczyków oraz zmniejszanie się szans awansu pojedynczych uczniów ze szkół nie prowadzących takiego treningu.
Na wykresie 31 można zaobserwować, że w ciągu pierwszych 20 Olimpiad Matematycznych nie występowało w zasadzie zjawisko *stajni olimpijskich*. W okresie tym najliczniej reprezentowana szkoła miała od 5 do 10 procent uczestników finałów, a cztery najliczniej reprezentowane szkoły w sumie nie miały więcej niż 24% uczestników finałów.
W okresie od 20 do 30 OM wyraźnie zaznaczona jest dominacja jednej szkoły: XIV LO w Warszawie. Liczba uczniów tej szkoły przekraczała 20% liczby uczestników finałów, a na 27 OM uczniowie XIV LO stanowili 33% finalistów. Spowodowane to było stworzeniem i realizacją eksperymentalnego nauczania programu nauczania matematyki w tej szkole. Przez kilka lat istniał oddzielny Komitet Okręgowy - tylko dla XIV LO w Warszawie.
Od 37 do 47 OM obserwowano wzrost znaczenia kilku szkół; cztery najliczniej reprezentowane szkoły miały w sumie od 40 do 50 procent finalistów.
Począwszy od 48 OM zaznacza się dominacja dwóch szkół: XIV LO w Warszawie i V LO w

Krakowie.

szkoła	Liczba finalistów
XIV LO w Warszawie	512
V LO w Krakowie	204
XIV LO we Wrocławiu	194
IV LO w Toruniu	185
III LO we Wrocławiu	120
I LO w Gdańsku	101
III LO w Gdyni	96
II LO w Lublinie	60
IX LO w Warszawie	60
XIII LO w Szczecinie	59
VI LO w Warszawie	58
I LO w Lublinie	52
I LO w Krakowie	51
XII LO w Łodzi	45
II LO w Krakowie	41
V LO w Bielsku-Białej	40
I LO w Chorzowie	40
XVIII LO w Warszawie	36
I LO w Łodzi	35
IV w Rzeszowie	35
II LO w Toruniu	35
I LO w Białymstoku	33
VI LO w Bydgoszczy	31
I LO w Łańcucie	31
VI LO w Radomiu	31
VII LO w Warszawie	30
VIII LO w Katowicach	28
I LO w Krośnie	27
I LO w Bydgoszczy	26
VIII LO w Poznaniu	26

Tabela 117: **Liczba uczestników finałów ze szkół, które od 6 OM do 60 OM miały co najmniej 25 finalistów.**

Dominacja uczniów XIV LO w Warszawie (tabele 117 i 118) wśród uczestników finałów Olimpiad Matematycznych jest wyraźna. Początek sukcesów uczniów tej szkoły miał miejsce na 20 OM. Wiąże się to bezpośrednio z rozpoczęciem współpracy XIV LO z Instytutem Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego.
Drugą miejsce według liczby finalistów OM zajmuje V LO w Krakowie, którego rola w ciągu ostatnich dwunastu lat znacznie wzrosła. Wyraźny wzrost liczby finalistów można wiązać z uruchomieniem w 1992 roku Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego kółka matematycznego dla olimpijczyków oraz funkcjonowaniem w latach 1973-2001 matematycznej klasy uniwersyteckiej.
Porównując dane z tabel 117 i 118 łatwo zauważyć, że istnieją szkoły, które w historii olimpiady odgrywały istotną rolę, ale straciły swoje znaczenie w ostatnich latach. Do takich szkół należą: I LO w Gdańsku, II LO w Lublinie, IX LO w Warszawie, VI LO w Warszawie, I LO

w Lublinie, I LO w Krakowie, XII LO w Łodzi.

szkoła	Liczba finalistów
XIV LO w Warszawie	201
V LO w Krakowie	137
XIV LO we Wrocławiu	68
IV LO w Toruniu	57
XIII LO w Szczecinie	57
III LO w Gdyni	52
III LO we Wrocławiu	35
V LO w Bielsku-Białej	34
VI LO w Bydgoszczy	28
VI LO w Radomiu	19
II LO w Krakowie	18
LO w Stalowej Woli	18
VIII LO w Katowicach	14
I LO w Kielcach	14
I LO w Łomży	14
IV LO w Rzeszowie	13
I LO w Łodzi	12
I LO w Białymstoku	12
I LO w Koszalinie	12
I LO w Chorzowie	11
VIII LO w Poznaniu	10

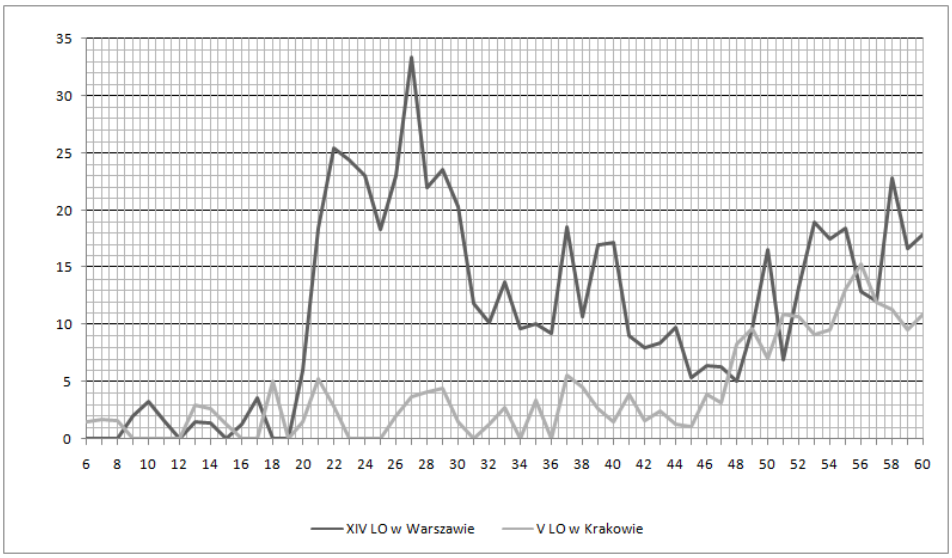
Tabela 118: **Liczba uczestników finałów ze szkół, które od 50 OM do 60 OM miały co najmniej 10 finalistów.**

Nie można pominąć istotnego wpływu nauczycieli *olimpijskich*, których działalność jest widoczna w wymienionych wyżej osiągnięciach uczniów z poszczególnych szkół i okręgów. W ostatnich latach należą do nich między innymi:
Beata Bogdańska z XIII LO w Szczecinie,
Andrzej Bysiewicz z I LO w Krośnie,
Bogusław Kraszewski z V LO w Krakowie,
Paweł Kwiatkowski z I LO w Piotrkowie Trybunalskim, prowadzący także kółko międzyszkolne np. dla uczniów I LO w Bełchatowie,
Piotr Łowicki z I LO w Łomży,
Wojciech Martys z XIV LO w Warszawie,
Michał Matuszczyk z VIII LO w Katowicach, prowadzący także kółko międzyszkolne,
Adam Neugebauer z XIII LO w Szczecinie,
Henryk Pawłowski z IV LO w Toruniu, prowadzący także kółka międzyszkolne np. dla uczniów VI LO w Bydgoszczy,
Waldemar Rożek z LO w Stalowej Woli.
Paweł Rudecki z I LO w Koszalinie,
Tomasz Szymczyk z V LO w Bielsku-Białej,
Wojciech Tomalczyk z III LO w Gdyni, pracujący także w Gimnazjum nr 24,
Ewa Wierdak z I LO w Krośnie,
a także autor niniejszej pracy.

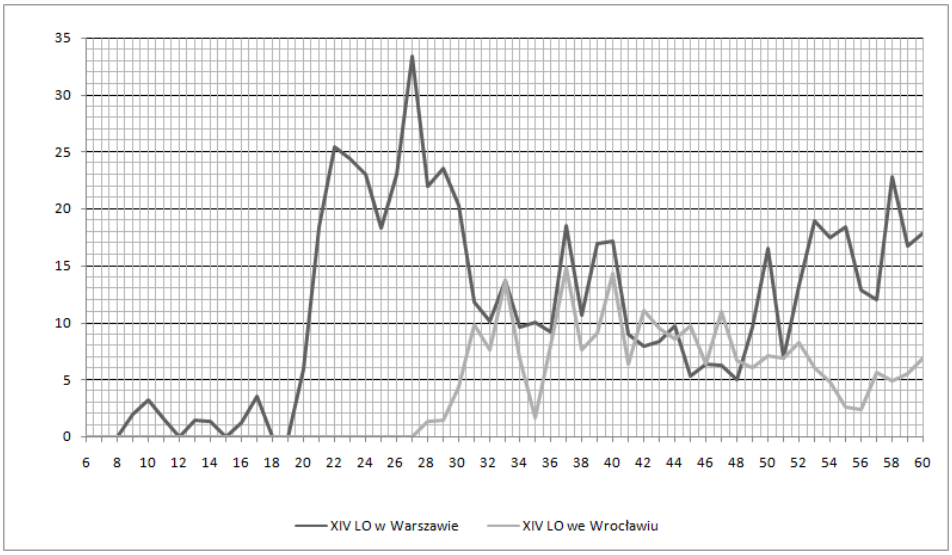
O roli nauczycieli pisał Andrzej Schinzel w artykule *Pięćdziesiąt lat Olimpiady Matematycznej* ([113]):

Inną kategorię osób zasłużonych dla Olimpiady Matematycznej stanowią nauczyciele, którzy wychowali laureatów lub wyróżnionych. Z historii pierwszych 20 Olimpiad wynotowałem następujące nazwiska osób, które były z tego powodu nagradzane co najmniej czterokrotnie: Maksymilian Bylicki z Torunia, Norbert Dróbka,Wanda Kiersnowska i Jan Kozicki z Warszawy, Piotr Malec z Lublina, Jan Marszał z Łańcuta, Feliks Wojnakowski z Ostrowca Świętokrzyskiego, Zofia Załęska z Poznania, Zenon Zięba z Tarnowa. Wybór pierwszych 20 Olimpiad jest usprawiedliwiony, bowiem z końcem lat 60-tych powstały szkoły średnie z rozbudowanym programem matematyki i od tego czasu znaczny procent laureatów Olimpiady pochodzi z tych właśnie szkół, nauczyciele w tych szkołach mają więc pozycję uprzywilejowaną. Najbardziej znane takie szkoły to liceum nr 14 w Warszawie im. Staszica (dawniej Gottwalda) oraz liceum również nr 14 we Wrocławiu im. Polonii Belgijskiej. Dla liceum im. Gottwalda został nawet utworzony w Warszawie w 1972 r. osobny komitet okręgowy, który działał w okresie od XXIV do XXXIV Olimpiady.

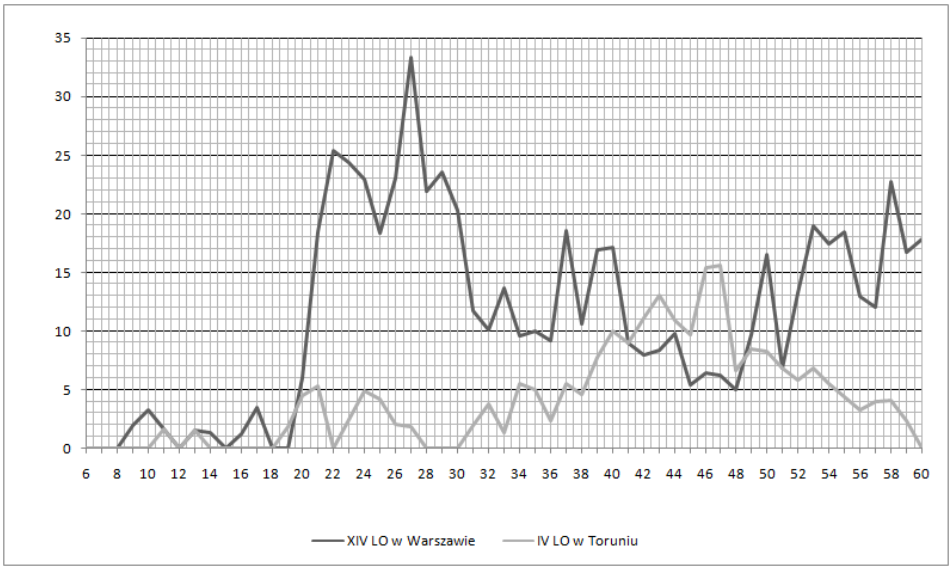
Na rysunkach 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47 przedstawione zostało porównanie liczby uczestników finałów z XIV LO w Warszawie z liczbą uczestników finałów ze szkół, które odgrywały lub odgrywają znaczącą rolę w Olimpiadzie Matematycznej. Do porównań wybrałem XIV LO w Warszawie ze względu na dominującą rolę tego liceum w ciągu ostatnich czterdziestu lat.



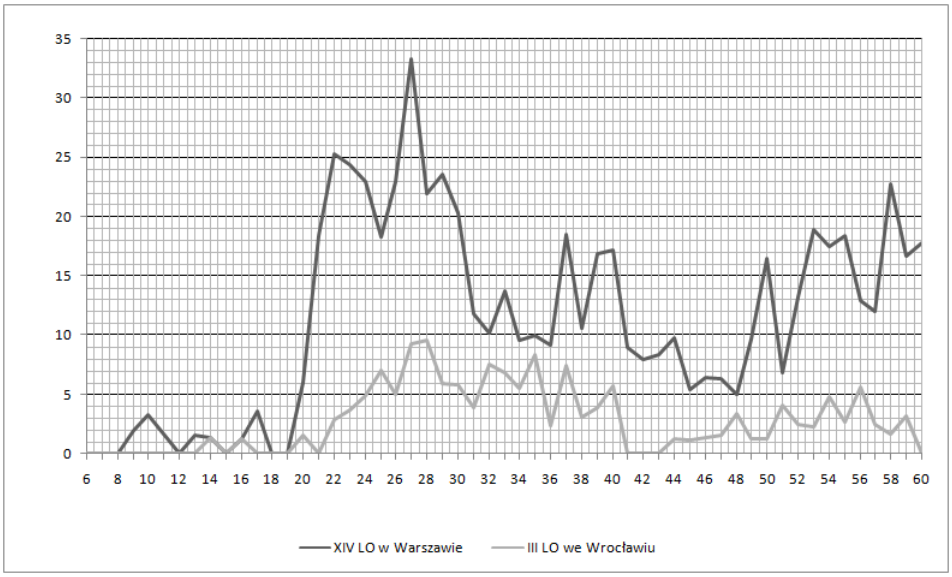
Rysunek 32: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i V LO w Krakowie.**



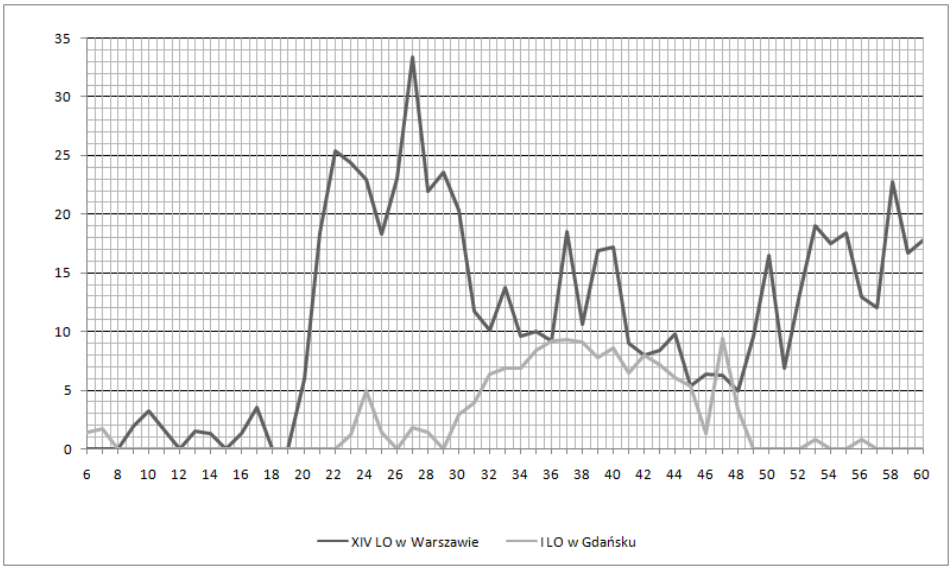
Rysunek 33: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i XIV LO we Wrocławiu.**



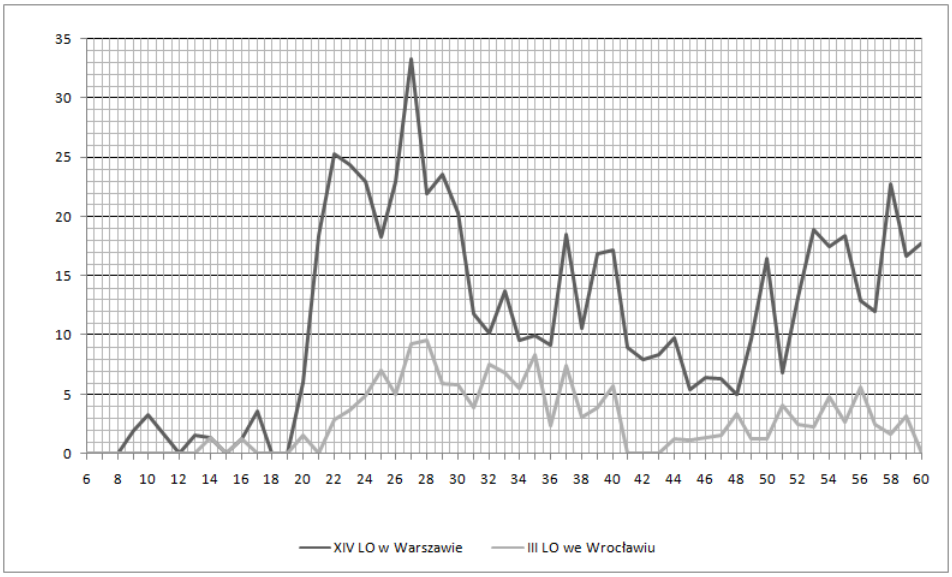
Rysunek 34: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i IV LO w Toruniu.**



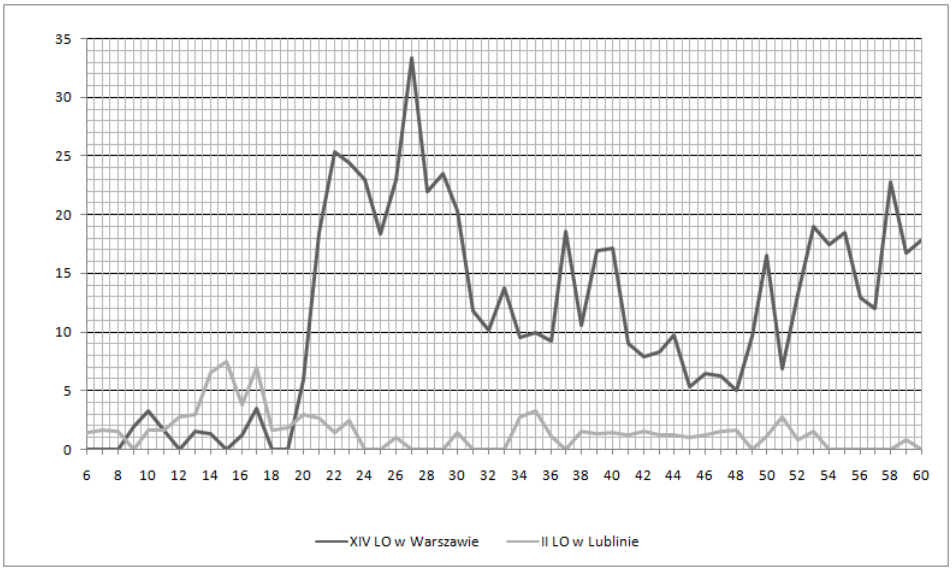
Rysunek 35: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i III LO w Wrocławiu.**



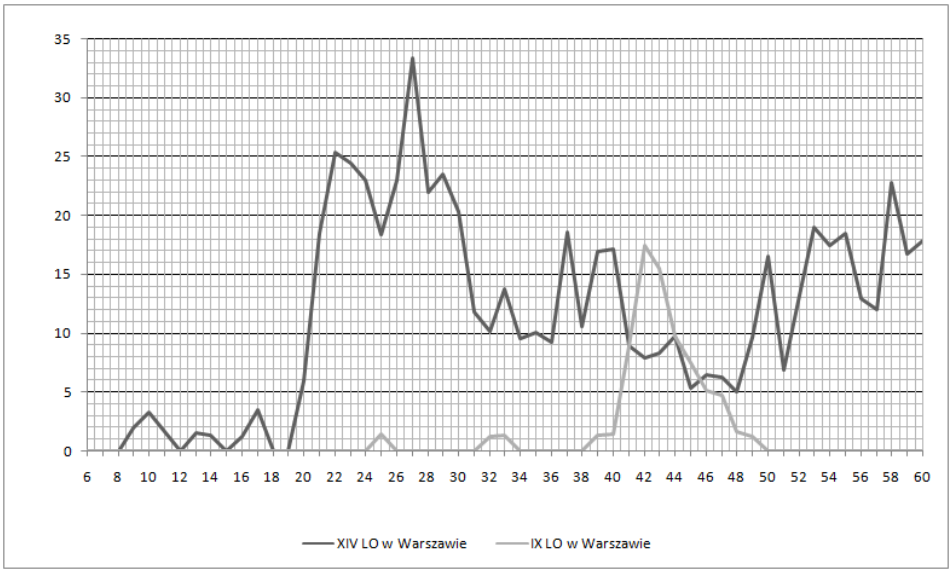
Rysunek 36: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i I LO w Gdańsku.**



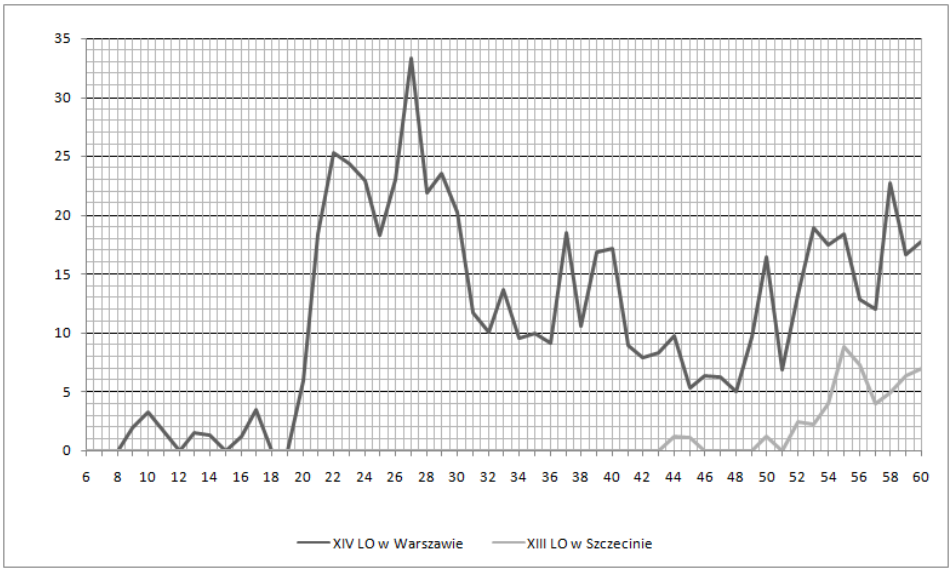
Rysunek 37: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i III LO w Gdyni.**



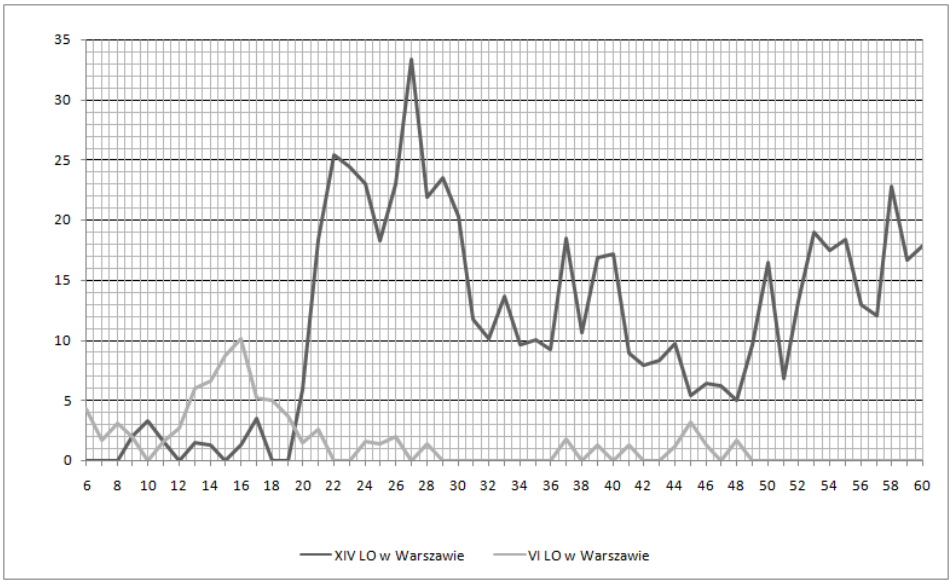
Rysunek 38: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i II LO w Lublinie.**



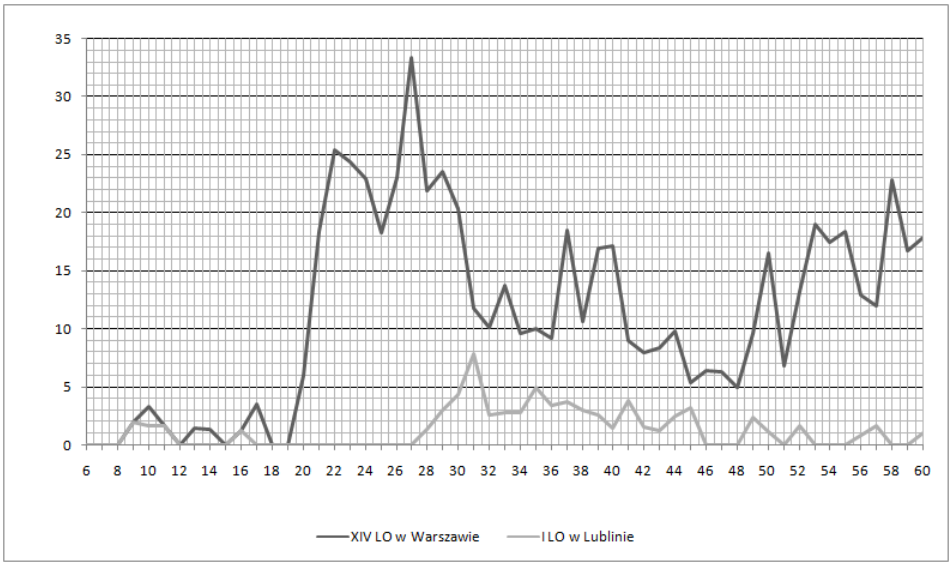
Rysunek 39: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i IX LO w Warszawie.**



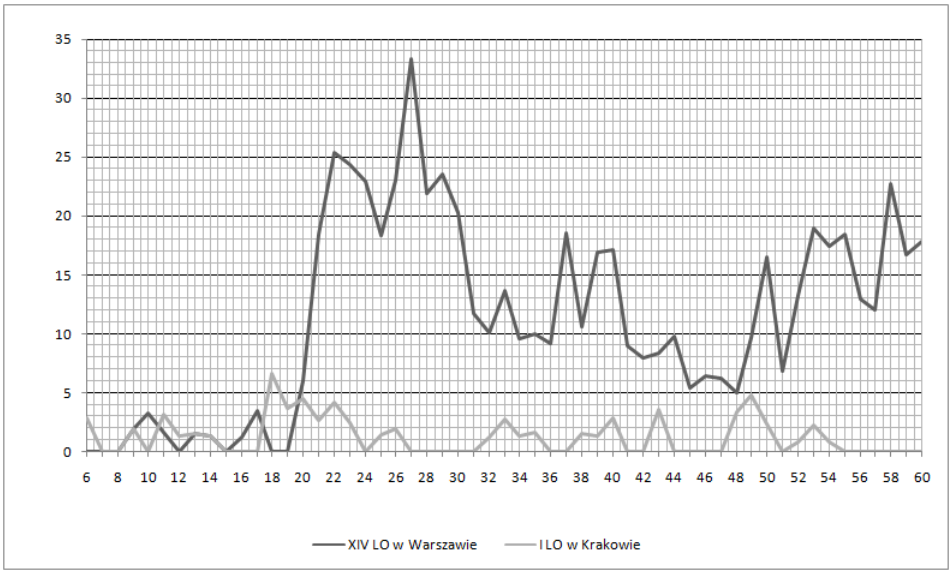
Rysunek 40: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i XIII LO w Szczecinie.**



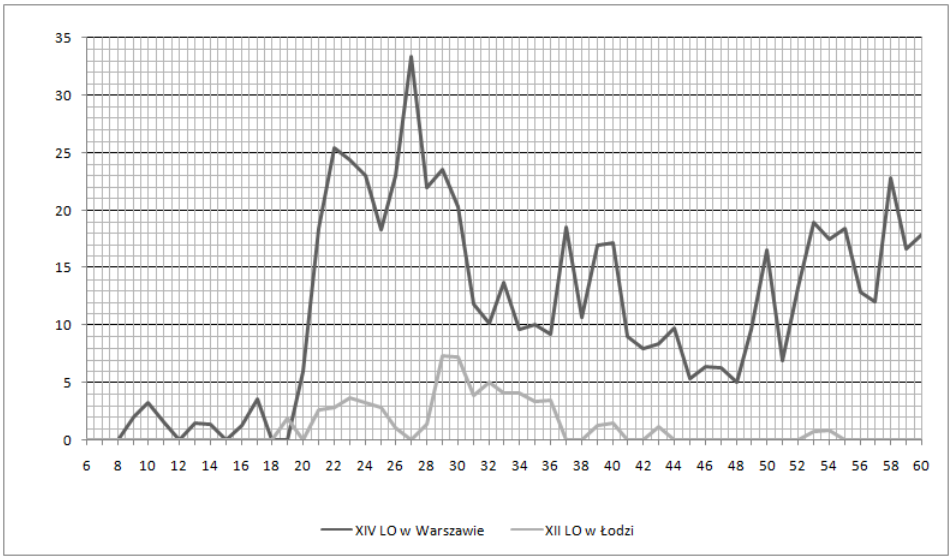
Rysunek 41: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i VI LO w Warszawie.**



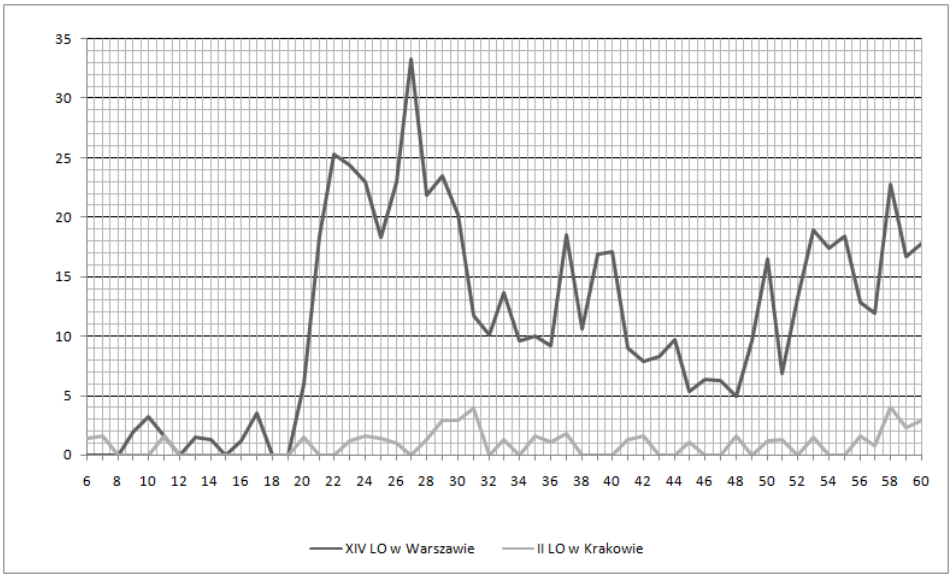
Rysunek 42: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i I LO w Lublinie.**



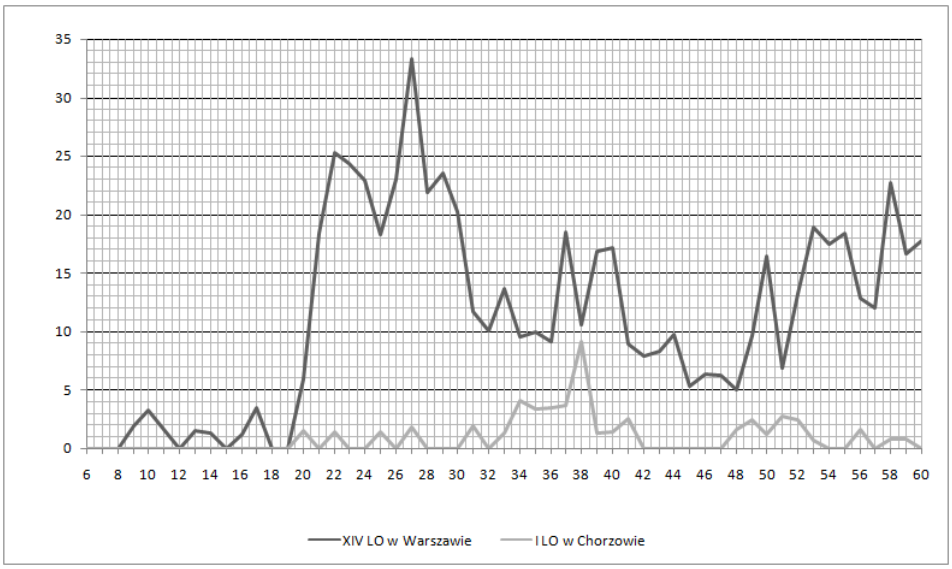
Rysunek 43: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i I LO w Krakowie.**



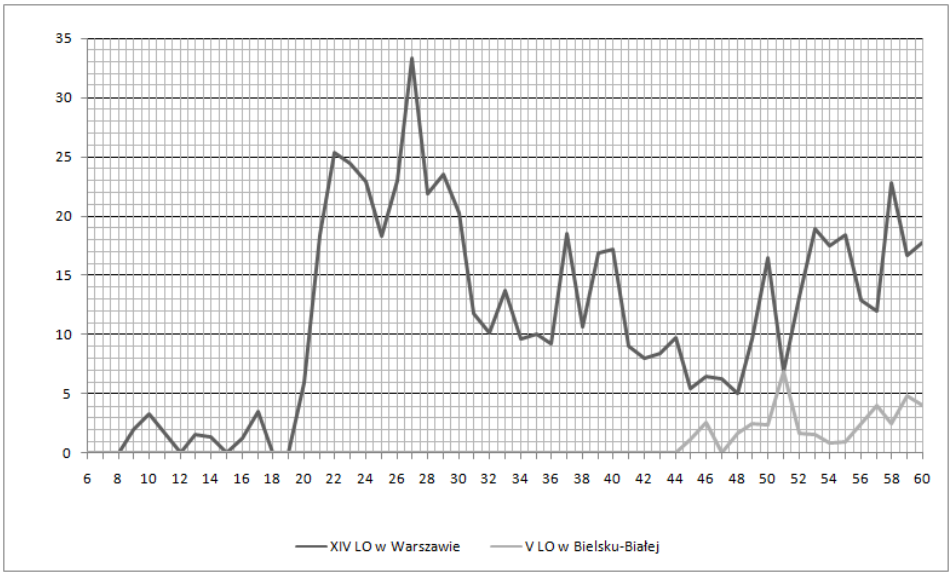
Rysunek 44: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i XII LO w Łodzi.**



Rysunek 45: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i II LO w Krakowie.**



Rysunek 46: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i I LO w Chorzowie.**



Rysunek 47: **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i V LO w Bielsku-Białej.**

Wielokrotnie w tym tekście wspominałem XIV LO w Warszawie. Warto opisać, jakie elementy warunkują liczne sukcesy uczniów tej szkoły.

Poniżej opisuję historię eksperymentalnych klas matematycznych w XIV LO w Warszawie. Pierwsze dwie uniwersyteckie klasy matematyczne (zwane *matexami*) powstały w XIV LO w 1967 roku, gdy do liceów poszli pierwsi absolwenci ośmioletnich podstawówek. Inicjatorką pomysłu była doc. dr Hanna Szmuszkowicz (wówczas UW), działająca bardzo aktywnie na rzecz kształcenia matematycznego. Michał Krych w artykule zamieszczonym w *Matematyka Społeczeństwo Nauczanie* ([71]) pisze:
Istniało wtedy w szkołach średnich niewiele klas z nietypowym programem.W rezultacie kandydatów do klas matematycznych było bardzo wielu. Na egzamin wstępny do uniwersyteckich klas matematycznych przybywali uczniowie z Warszawy i spoza niej,czasami z daleka. Doprowadziło to do tego, że w pewnym momencie w liceum XIV funkcjonowały równolegle trzy takie klasy, a w początkach lat osiemdziesiątych dołączyła jeszcze jedna w IX LO im. Klementyny Hoffmanowej.
Istotą kształcenia w tych klasach był nietypowy program nauczania matematyki realizowany przez pracowników naukowych IM UW. Michał Krych pisze dalej: *Ten ambitny program miał więc w pewnym momencie realizowany w czterech klasach w Warszawie, co oznacza, że należało w każdym roku znaleźć nieco ponad 100 uczniów, którzy byliby skłonni poświęcić się matematyce i podołać dosyć ostremu również w realizacji programowi. Doszło do rozdźwięku między oczekiwaniami nauczających i możliwościami, lub dążeniami, uczniów. W moim odczuciu, słabsi uczniowie byli „niszczeni" w tych klasach. Często nie rozumieli o czym mowa, a najlepsi chcieli już „iść dalej". Prowadziło to do frustracji i całkowitego zniechęcenia do matematyki, przy czym dotyczyło to również osób, które w klasie matematyczno-fizycznej byłyby w stanie radzić sobie z matematyką bardzo dobrze. Zmniejszono więc liczbę klas w liceum XIV do dwóch, a potem do jednej.*
Michał Krych wyartykułował podstawową wadę klas uniwersyteckich: realizacja bardzo zaawansowanego programu nauczania matematyki może się udać tylko w małej i odpowiednio dobranej grupie uczniów. Wydaje się, że w jednym województwie ma szansę zaistnieć co najwyżej jedna trzydziestoosobowa klasa tego typu.

Promotor niniejszej rozprawy, uczący przez pewien czas w klasie eksperymentalnej w IX LO w Warszawie wspomina, że uczniowie jego nie byli wcale wybitnie uzdolnieni. Spróbowali zdać egzamin (zdawało się go wcześniej niż do innych szkół), udało się, więc mimo braku zamiłowania do matematyki,zaczęli uczyć się w tej klasie.
Michał Krych pisze także o innych zagrożeniach:
Kandydatów (poważnych) do klas matematycznych jest coraz mniej, gdyż jest wiele innych atrakcyjnych możliwości wyboru klasy o ciekawym, nietypowym programie,a pracownicy uniwersytetu są mniej zainteresowani nauczaniem w klasach tego typu.
Według moich obserwacji, w latach siedemdziesiątych można było znaleźć pracowników, którzy chcieliby uczyć w takich klasach, stosunkowo łatwo, później stawało się to trudniejsze, obecnie jest bardzo trudne. Wydaje się, że główną przyczyną jest fakt, iż zajęcia w bardzo dobrej klasie są ciekawsze i satysfakcja z nich jest o wiele większa, niż z zajęć z przeciętną grupą studencką - tak przynajmniej było ze mną. Jeśli jednak klasa nie jest bardzo dobra, to różnego rodzaju „niedogodności" szkolne - dłuższy rok nauczania, wywiadówki, rady pedagogiczne - zniechęcają do pracy w szkole.

Ważną przyczyną sukcesu uczniów XIV LO jest program nauczania matematyki.
Michał Krych pisze:
Założenia programowe zmieniały się w czasie. Początkowo próbowano uczyć matematyki aksjomatycznie. Było to dla uczniów zbyt trudne: teoria rozwijała się powoli, wytwarzał się dosyć fałszywy obraz matematyki.Później zrezygnowano z tego na rzecz ***lokalnej*** *ścisłości nie rezygnując z informacji o aksjomatach. Niezależnie od realizowanych koncepcji programowych obowiązywała zasada nauczania poprzez rozwiązywanie zadań.*

Antoni Marian Rusiecki, redaktor Działu Matematyki PZWS, w książeczce [94] w 1950 roku pisał:
Nie podobna zaprzeczyć, że w okresie paru dziesięcioleci zainteresowania matematyczne młodzieży znacznie osłabły. Nie pomylimy się chyba twierdząc, że wśród przyczyn jakie się na to złożyły, dużą rolę odegrała nieodpowiednia tematyka matematyczna narzucona przez zmieniające się zresztą programy i podręczniki.
Po niemal sześćdziesięciu latach słowa Antoniego Rusieckiego pozostają aktualne. Ciągłe, niemal coroczne, zmiany podstaw programowych, programów i podręczników nie mają dobrego wpływu na sposób kształcenia matematycznego, także olimpijczyków. Niekorzystna tendencja, polegająca na zmniejszaniu treści kształcenia matematycznego na wszystkich poziomach edukacyjnych oraz zastępowaniu sztuki myślenia - rzemiosłem stosowania schematów, powoduje, że także uczestnicy OM prezentują liczne niedostatki wykształcenia matematycznego. Szczególnie dobitnie widać to na przykładzie zadań geometrycznych, które sprawiają problem większości olimpijczyków. Nasza analiza pokazuje, że uczniowie XIV LO w Warszawie, szkoły wiodącej w Olimpiadzie Matematycznej, nie mają aż takich problemów. Program, jaki jest realizowany w XIV LO, znacznie odbiega pod względem treści i metod jego realizacji od tego, co dzieje się w pozostałych szkołach ponadgimnazjalnych. Od 2006 roku w XIV LO realizowany jest program nauczania *Matematyka akademicka* napisany przez dr. Edwarda Stachowskiego [126]. Poniżej omawiam jego najistotniejsze cechy.

Liczba godzin matematyki oraz rozbicie lekcji na poszczególne działy (nauczane przez różne osoby) decydują o nietypowości tego programu.

Matematyka nauczana jest w wymiarze 18 godzin (6 godzin tygodniowo przez 3 lata).

Klasa I :
I semestr:

4 godziny - analiza matematyczna,
2 godziny - geometria,

II semestr:
3 godziny - analiza matematyczna,
3 godziny - geometria,

Klasa II :
w obu semestrach:
2 godziny - analiza matematyczna,
2 godziny - geometria,
2 godziny - rachunek prawdopodobieństwa,

Klasa III:
w obu semestrach:
3 godziny - analiza matematyczna,
3 godziny - geometria.

W rozdziale *Procedury osiągania celów* znajduje się znamienne sformułowanie: *Prawidłowe posługiwanie się pojęciami matematycznymi najlepiej kształcić poprzez rozwiązywanie odpowiednich zadań. Powinny to być zarówno zadania łatwe, typowe, jak i zadania o podwyższonym stopniu trudności, niestandardowe, a także zadania o poziomie trudności zadań rozwiązywanych na Olimpiadzie Matematycznej.*

Wreszcie najważniejsza część: materiał nauczania. Przytoczę go tu w całości, jako przykład modelowego kształcenia olimpijskiego.

ANALIZA MATEMATYCZNA

Klasa I

1. Elementy logiki.
2. Działania na zbiorach.
3. Zbiory liczbowe: liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych.
4. Zbiory ograniczone i nieograniczone. Kresy.
5. Zasada indukcji zupełnej (nierówności dla średnich: arytmetycznej, geometrycznej, harmonicznej).
6. Elementy kombinatoryki (permutacje, wariacje, kombinacje). Potęga o wykładniku całkowitym. Dwumian Newtona.
7. Elementy teorii liczb (rozkład na czynniki, cechy podzielności, kongruencje).
8. Pojęcie funkcji, wykres funkcji, działania na funkcjach (składanie funkcji, funkcja odwrotna), funkcje monotoniczne.
9. Funkcja liniowa i jej własności.
10. Układy dwóch równań z dwiema niewiadomymi i trzech równań z trzema niewiadomymi oraz wyznaczniki stopnia drugiego i trzeciego.
11. Funkcja kwadratowa. Postać kanoniczna trójmianu kwadratowego, suma i iloczyn pierwiastków.
12. Wielomiany jednej i dwu zmiennych. Rachunek algebraiczny. Dzielenie wielomianów. Rozkład wielomianu na czynniki. Twierdzenie Bzout. Pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych.
13. Funkcje wymierne. Homografie.
14. Potęga o wykładniku wymiernym.

Klasa II

1. Ciągi liczbowe.
2. Pojęcie granicy (skończonej i nieskończonej). Własności granicy.
3. Twierdzenia o zbieżności ciągów (twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym). Liczba e.
4. Szeregi liczbowe. Suma szeregu. Szereg geometryczny. Szereg harmoniczny. Kryteria zbieżności (kryterium porównawcze, Cauchy'ego, d'Alemberta). Rozwinięcia liczb rzeczywistych. Zbieżność bezwzględna i warunkowa.
5. Granica funkcji i ciągłość funkcji. Własności funkcji ciągłych na przedziałach domkniętych i ograniczonych (ciągłość jednostajna, osiąganie kresów, własność Darboux).
6. Funkcje elementarne: potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna.
7. Funkcje trygonometryczne, miara łukowa kąta, wzory redukcyjne. Tożsamości i równania trygonometryczne. Funkcje cyklometryczne.
8. Liczby zespolone (postać trygonometryczna, wzór de Moivre'a. Pierwiastki n tego stopnia z liczby zespolonej, zastosowania w geometrii i fizyce).

Klasa III

1. Pochodna funkcji. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej. Pochodna sumy, iloczynu ilorazu i złożenia funkcji odwrotnej. Pochodna funkcji odwrotnej. Pochodne funkcji elementarnych.
2. Różniczka i jej zastosowanie. Rachunek przybliżony.
3. Twierdzenie Fermata i jego zastosowanie do znajdowania ekstremów.
4. Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a.
5. Monotoniczność funkcji różniczkowych.
6. Reguła de l'Hospitala (w najprostszej wersji).
7. Funkcja wypukła (nierówność Jensena, wypukłość funkcji różniczkowych).
8. Pochodne wyższych rzędów. Interpretacja fizyczna drugiej pochodnej. Wzór Leibniza.
9. Ekstremum lokalne. Badania wykresów funkcji.
10. Interpolacja liniowa. Przybliżone rozwiązywanie równań.

GEOMETRIA

Klasa I

Pojęcia wstępne

1. Figura geometryczna jako podzbiór płaszczyzny.
2. Odległość dwóch punktów. Odległość punktu od figury. Odległość dwóch figur.
3. Okrąg i koło.
4. Podzbiory prostej: odcinki, półproste.
5. Rozcinanie płaszczyzny: półpłaszczyzna, kąt, kąt wypukły, kąt wklęsły, wielokąt.
6. Długość odcinka, rozwartość kąta.
7. Wzajemne położenie prostych i okręgów na płaszczyźnie.
8. Równoległość prostych. Postulat Euklidesa.
9. Podstawowe konstrukcje geometryczne.

Niektóre figury geometryczne i ich własności

1. Symetralna odcinka.
2. Dwusieczna kąta.

3. Punkty szczególne w trójkącie.
4. Czworokąty: klasyfikacja i podstawowe własności.
5. Najmocniejsze twierdzenie geometrii. Czworokąty opisane na okręgu.
6. Kąty w okręgu: kąt środkowy, kąt wpisany, kąt dopisany. Łuki Talesa.
7. Czworokąty wpisane w okrąg.
8. Wielokąt foremny.

Przekształcenia geometryczne płaszczyzny

1. Wektor, kąt skierowany. Działania na wektorach, działania na kątach.
2. Pojęcie przekształcenia geometrycznego, przykłady.
3. Izometrie płaszczyzny: symetria osiowa, przesunięcie równoległe, obrót, symetria środkowa, symetria z poślizgiem.
4. Figury przystające, cechy przystawania trójkątów.
5. Izometrie własne wielokąta. Oś symetrii figury. Środek symetrii figury.
6. Konstrukcje elementarne. Metoda miejsc geometrycznych i metoda przekształceń w rozwiązywaniu zadań konstrukcyjnych.

Stosunek odcinków

1. Postulat Archimedesa. Odcinki współmierne i niewspółmierne. Stosunek odcinków.
2. Rzutowanie równoległe płaszczyzny na prostą. Stosunek podziału wektora.
3. Twierdzenie Talesa.
4. Własności środkowych w trójkącie (środek ciężkości).

Podobieństwa płaszczyzny

1. Podobieństwa.
2. Jednokładności.
3. Dylatacje. Składanie dylatacji.
4. Figury podobne, cechy podobieństwa trójkątów.
5. Twierdzenie Pitagorasa.
6. Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie, twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego w trójkącie.

Klasa II

Figury podobne

1. Twierdzenia o potędze punktu względem okręgu. Twierdzenie Brianchona.
2. Twierdzenie Ptolemeusza.
3. Twierdzenie Menelaosa i twierdzenie Cevy.

Inwersje płaszczyzny

1. Inwersja względem okręgu.
2. Własności inwersji.

Związki miarowe

1. Związki miarowe w trójkącie prostokątnym.

2. Funkcje trygonometryczne. Własności funkcji trygonometrycznych. Równania trygonometryczne.
3. Twierdzenie kosinusów. Twierdzenie sinusów.
4. Pole figury płaskiej. Pola wielokątów. Wzór Herona.
5. Długość okręgu.

Przekształcanie afiniczne płaszczyzny

1. Powinowactwo osiowe.
2. Przekształcenia afiniczne płaszczyzny. Podstawowe niezmienniki.
3. Figury afinicznie równoważne.

Figury geometryczne w przestrzeni

1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni E_3.
2. Relacje równoległości w E_3. Rzutowanie równoległe (w szczególności prostokątne) przestrzeni na płaszczyznę.
3. Relacje prostopadłości w E_3. Twierdzenie o trzech prostopadłych.
4. Kąt prostej z płaszczyzną, kąt dwuścienny.

Klasa III

Wielościany

1. Sieć wielościenna.
2. Wielościan.
3. Ostrosłupy, graniastosłupy, antygraniastosłupy.
4. Przekroje wielościanów.
5. Wzór Eulera.
6. Wielościany foremne.
7. Wielościany Archimedesowe.

Przekształcenia przestrzeni E_3

1. Izometrie przestrzeni E_3. Symetria płaszczyznowa. Przesunięcie równoległe, obrót, odbicie z poślizgiem, odbicie obrotowe, ruch śrubowy.
2. Płaszczyzna, oś, środek symetrii figury.
3. Izometrie własne wybranych wielościanów.
4. Jednokładność w E_3. Podobieństwo w E_3.
5. Rzut stereograficzny.
6. Inwersja a rzut stereograficzny.

Elementy geometrii analitycznej

1. Współrzędne wektora.
2. Mnożenie skalarne wektorów.
3. Analityczna postać prostych i okręgów w C_2. Wektor normalny do prostej.
4. Krzywe stożkowe. Własności geometryczne stożkowych. Równania stożkowych.
5. Przestrzeń kartezjańska C_3. Analityczna postać prostych i płaszczyzn. Wektor normalny do płaszczyzny.
6. Mnożenie wektorialne wektorów.
7. Przykłady powierzchni drugiego stopnia.

Pola powierzchni i objętości

1. Miara przestrzenna figur.
2. Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanu, stożka, kuli.
3. Pole powierzchni wielościanu, stożka, kuli.
4. Pola przekrojów płaskich wybranych figur.
5. Zastosowanie trygonometrii, metody analitycznej i analizy matematycznej do obliczenia objętości i pól powierzchni.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Klasa II

Elementy statystyki opisowej

1. Metody prezentacji danych statystycznych.
2. Opracowywanie i prezentacja danych statystycznych.
3. Charakterystyki rozkładu cechy ilościowej: miary tendencji centralnej i miary rozproszenia.

Rachunek prawdopodobieństwa

1. Aksjomaty teorii prawdopodobieństwa, własności prawdopodobieństwa.
2. Prawdopodobieństwo geometryczne.
3. Przeliczalne przestrzenie probabilistyczne.
4. Model klasyczny.
5. Prawdopodobieństwo warunkowe. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Twierdzenie Bayesa. Budowa modelu za pomocą drzewa.
6. Niezależność zdarzeń. Niezależność doświadczeń. Schemat Bernoulliego.
7. Zmienne losowe określone na co najwyżej przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych. Rozkład zmiennej losowej, wartość oczekiwana, wariancja. Podstawowe rozkłady.
8. Wielowymiarowe zmienne losowe. Niezależność zmiennych losowych.
9. Twierdzenie o wartości oczekiwanej sumy zmiennych losowych. Twierdzenie o wartości oczekiwanej iloczynu i wariancji sumy niezależnych zmiennych losowych.
10. Nierówność Czebyszewa. Prawo wielkich liczb Czebyszewa.
11. Informacja o zmiennych losowych ciągłych i centralnym twierdzeniu granicznym.

W programie *Matematyka akademicka* zwracają uwagę przede wszystkim zagadnienia związane z metodyką rozwiązywania zadań olimpijskich, które nie występują w programach nauczania powszechnie dostępnych (w tym także w najbardziej rozbudowanym programie Henryka Pawłowskiego [99]).

Sukces uczniów XIV LO w Warszawie opiera się zatem na czterech filarach:

1. rekrutacja do *matexów* odbywa się na podstawie specjalnego (i znacznie trudniejszego od testów kompetencyjnych) egzaminu,
2. prowadzenie zajęć przez pracowników uniwersyteckich,
3. prowadzenie kółek i obozów naukowych przez absolwentów XIV LO,
4. realizacja nietypowego programu nauczania matematyki.

Na koniec warto wspomnieć o pierwszej uniwersyteckiej klasie matematycznej i wielkim nauczycielu akademickim, profesorze Leonie Jeśmanowiczu (fragment wspomnień pochodzi z artykułu [17]):

Od samego początku swojej działalności z młodzieżą popularyzował ideę olimpiad matematycznych jako istotną metodę wyszukiwania talentów matematycznych. W drugiej połowie lat sześćdziesiątych, w czasie pobytu w Moskwie, prof. Jeśmanowicz uczestniczył w zajęciach prowadzonych przez A. N. Kołmogorowa i innych wybitnych matematyków z Uniwersytetu Łomonosowa. Odbywały się one w szkole, w której zebrano młodzież o wybitnych uzdolnieniach matematycznych. W ZSRR utworzono kilka takich szkół w ośrodkach uniwersyteckich, m.in. w ówczesnym Leningradzie, Nowosybirsku i Kijowie. Po powrocie do Polski, będąc pod głębokim wrażeniem tego, co zobaczył w moskiewskich klasach matematycznych, Profesor zorganizował pierwszą uniwersytecką klasę matematyczną w Polsce. Rozpoczęła ona pracę w 1967 roku w IV Liceum Ogólnokształcącym w Toruniu. Początkowo zajęcia prowadzone były przez prof. Dubikajtisa i prof. Jeśmanowicza. Z biegiem czasu do grona nauczających dołączyli młodsi pracownicy nauki.
Do niemal historycznych należy zaliczyć niedzielne zajęcia międzyszkolnych kół matematycznych prowadzonych od 1956 roku na UMK przez prof. Jeśmanowicza. Z biegiem czasu do tej pracy udaje się Profesorowi nakłonić grono młodszych pracowników naukowych Instytutu Matematyki, nauczycieli z Torunia i jego okolic. Ta dobra tradycja przetrwała w ośrodku toruńskim po dzień dzisiejszy, chociaż zajęcia odbywają się w dni powszednie. Profesor Jeśmanowicz stworzył styl, można rzec toruńską szkołę pracy z młodzieżą uzdolnioną. Szkoła ta kontynuuje dzieło zapoczątkowane przez swojego wielkiego twórcę. Zaowocowała ona licznymi laureatami olimpiad krajowych i medalistami (również złotymi) olimpiad międzynarodowych.

5.6 Literatura

Poniżej krótko przedstawiam wybór literatury w języku polskim, jaką posługują się olimpijczycy w trakcie przygotowań do startu w OM.

Najważniejszym źródłem informacji są wydawane po każdej edycji Sprawozdania Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej. Oprócz zadań (i ich rozwiązań) z Olimpiady Matematycznej pojawiają się także zadania z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej oraz zawodów matematycznych, w których bierze udział reprezentacja Polski.

Czasopismo *Delta* ma doniosłe znaczenie nie tylko dla propagowania i popularyzowania matematyki, ale także dla Olimpiady Matematycznej. Oprócz comiesięcznego konkursu zadaniowego w Klubie 44 pojawiają się artykuły,w których prezentowane są metody rozwiązywania zadań olimpijskich. W latach 1994-97 w sposób regularny pojawiał się *Kącik olimpijski* z omówieniami podstawowych technik charakterystycznych dla zadań OM. W całej historii *Delty* można spotkać artykuły omawiające ważne dla umiejętności uczniów zagadnienia matematyczne.

Jak ważne znaczenie dla OM ma *Delta* może świadczyć zbieżność między pojawieniem się pewnych metod w pracach uczniów 57 i 58 OM oraz publikacją artykułów w *Delcie*:

1. w artykule [81] z 2002 roku Hojoo Lee przedstawił twierdzenia Shura i Muirheada wraz z dowodami oraz przykłady zastosowań w zadaniach olimpijskich (MOM,olimpiady zagraniczne),

2. w artykule [127] z 2005 roku Lech Stawikowski opisuje w jaki sposób można wykorzystać funkcje supermodularne do dowodzenia nierówności występujących w zadaniach

olimpijskich,

3. w artykule [68] z 2005 roku Lev Kourliandtchik przedstawił metodę dowodzenia nierówności opartą na własności sumy pochodnych cząstkowych.

Poniżej przedstawiam spis pozycji książkowych w języku polskim, z których najczęściej korzystają uczestnicy OM:

Stefan Straszewicz *Zadania z olimpiad matematycznych. Tom 1, 2, 3, 4*
Jerzy Browkin *Zadania z olimpiad matematycznych. Tom 5, 6*
Maciej Bryński *Zadania z olimpiad matematycznych. Tom 7*
Marcin Kuczma *Zadania z olimpiad matematycznych. Tom 8*
Jerzy Browkin, Jan Rempała, Stefan Straszewicz *25 lat Olimpiady Matematycznej*
H.S. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*
Henryk Pawłowski, *Zadania z matematyki dla olimpijczyków*
Henryk Pawłowski, *Kółko matematyczne dla olimpijczyków*
Henryk Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Teoria liczb, algebra i elementy analizy matematycznej*
Henryk Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Trygonometria i geometria*
Henryk Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Planimetria i stereometria*
Marcin Pitera, *Kolorowe kwadraty*
Martin Aigner, Gunter M. Ziegler *Dowody z księgi*
Juliusz Lech Królikowski *Zarys teorii grafów*
Ira Koźniewska *Równania rekurencyjne*
Dragoslaw S. Mitrinović *Elementarne nierówności*
Zbigniew Palka, Andrzej Ruciński *Wykłady z kombinatoryki*
Victor Bryant *Aspekty kombinatoryki*
Wacław Marzantowicz, Piotr Zarzycki *Elementy teorii liczb*
Lev Kourliandtchik, *Powrót do krainy nierówności*
Lev Kourliandtchik, *Wędrówki po krainie nierówności*
Lev Kourliandtchik, *Słynne nierówności*
Lev Kourliandtchik, *Impresje matematyczne*
Lev Kourliandtchik, *Etiudy matematyczne*
Lev Kourliandtchik, *Najkrótsze sieci*
Lev Kourliandtchik, *Impresje liczbowe*
Lev Kourliandtchik, *Kącik olimpijski. Geometria*
Lev Kourliandtchik, *Kącik olimpijski. Algebra*
Lev Kourliandtchik, *Kącik olimpijski. Nierówności*
Lev Kourliandtchik, *Kącik olimpijski. Sałatka matematyczna*
Lev Kourliandtchik, *Złote rybki w oceanie matematyki*
Lev Kourliandtchik, *Matematyka elementarna w zadaniach cz. 1,2*
Daniar Musztari *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*
Lech Dubikajtis *Zajęcia fakultatywne. Wiadomości z geometrii rzutowej* Józef Kalinowski *Zbiór zadań z czeskich i słowackich Olimpiad Matematycznych 1951-2001*
Robin Wilson *Wprowadzenie do teorii grafów*
S.I. Zetel, *Geometria trójkąta*
J. Zydler, *Geometria*
Kenneth Ross, Charles Wright *Matematyka dyskretna*
Ronald Graham, Donald Knuth, Oren Patashnik *Matematyka konkretna*

Biblioteczka Delty

Andrzej Mąkowski, Tadeusz Iwaniec *Zasada szufladkowa Dirichleta. Geometria okręgów i sfer*

Biblioteczka matematyczna

Marian Łuczyński, Zdzisław Opial *O konstrukcjach trójkątów*
Wacław Sierpiński *250 zadań z elementarnej teorii liczb*
Wacław Sierpiński *Wstęp do teorii liczb*
Edward Piegat *Wektory i geometria*
Jerzy Bednarczuk *Urok przekształceń afinicznych*
Marcin Kuczma *O szeregach liczbowych*

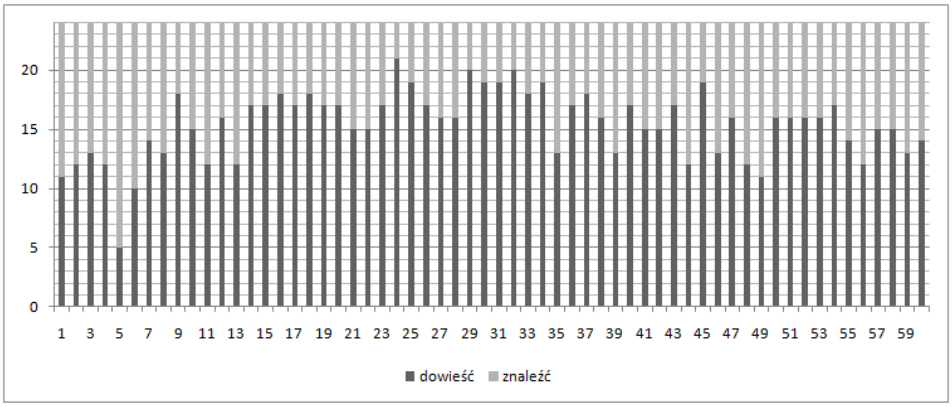
Olimpijczycy korzystają także z obszernej literatury obcojęzycznej. Bogata elektroniczna biblioteka książek w języku rosyjskim (z której często korzysta autor rozprawy) znajduje się na stronie www.math.ru.

5.7 Sformułowania zadań

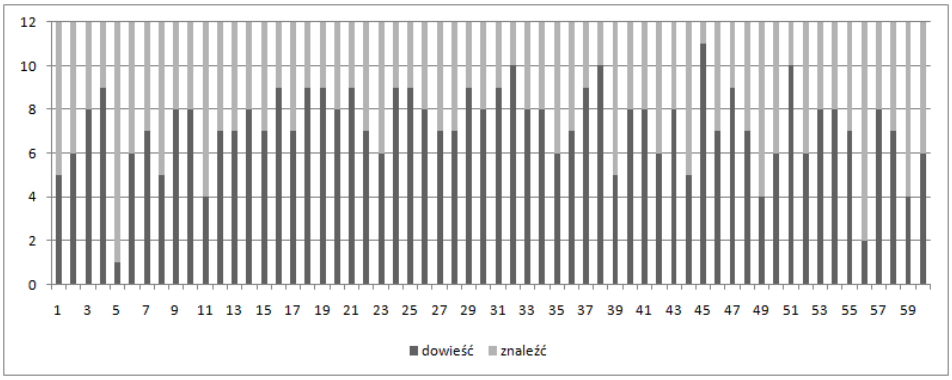
George Polya ([105]) dzieli zadania na dwa typy:

1. zadania typu *znaleźć*,
2. zadania typu *udowodnić*.

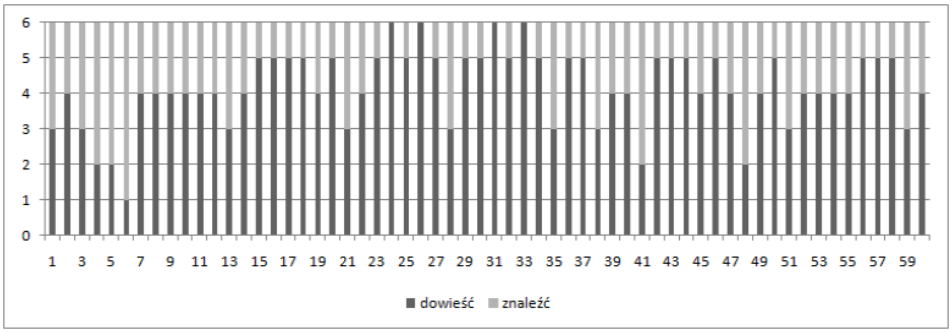
Celem zadań typu *znaleźć* jest znalezienie pewnego obiektu, niewiadomej zadania. Zaś celem zadania typu *udowodnić* jest wykazać w sposób niezawodny, że pewne twierdzenie jest prawdziwe.
W Olimpiadzie Matematycznej w ciągu 60 lat istnienia zadania typu *udowodnić* stanowiły 64% wszystkich zadań, a zadania typu *znaleźć* - 36% (takie same proporcje były zachowane w olimpiadach 50-60). W pierwszych latach istnienia OM istniała równowaga między liczbą zadań obu typów. Od 14 do 34 OM zadania typu *udowodnić* stanowiły 74% wszystkich zadań (wykres 48). W poszczególnych etapach tendencje opisane powyżej były bardzo podobne (wykresy: 49, 50, 51).



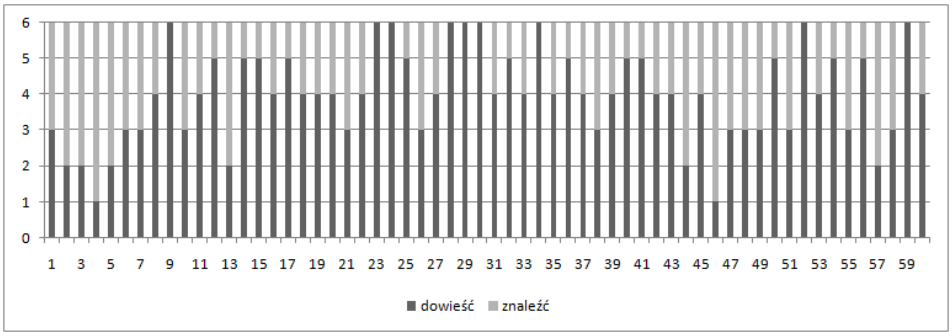
Rysunek 48: **Typy zadań Olimpiady Matematycznej.**



Rysunek 49: **Typy zadań I etapów Olimpiady Matematycznej.**



Rysunek 50: **Typy zadań II etapów Olimpiady Matematycznej.**



Rysunek 51: **Typy zadań III etapów Olimpiady Matematycznej.**

Przyjrzę się także, jakie były polecenia w zadaniach (tabela 119). Spośród wszystkich sformułowań 90% stanowiły sformułowania: dowieść, udowodnić, wyznaczyć, wykazać, znaleźć, obliczyć, rozwiązać, rozstrzygnąć.

Polecenie	Liczba zadań
dowieść	507
udowodnić	320
wyznaczyć	132
wykazać	96
znaleźć	94
obliczyć	80
rozwiązać	94
rozstrzygnąć	40
jak?	36
skonstruuj	22
ile?	17
zbudować	10
czy	10
zbadać	7
wyrazić	6
rozłożyć	5
który?	2
utworzyć	1
narysować	1
utworzyć	1
wybrać	1

Tabela 119: **Sformułowania zadań Olimpiady Matematycznej**

5.8 Galeria cytatu

Postanowiłem przedstawić charakterystyczne komentarze, które pisali uczniowie w swoich pracach. Najczęściej są to krótkie opisy emocji, jakie były udziałem zawodników w czasie rozwiązywania zadań. Zapisy niejednokrotnie mają charakter autoironicznej samooceny. Wobec braku realnych pomysłów na rozwiązanie zadania, uczniowie żartują. Nie można na podstawie tych stwierdzenia wyrokować o stanie wiedzy uczniów, lecz o ich poczuciu humoru.

ŁÓ32 (zadanie 2.2.57): *Przykro mi, ale na razie nie jestem w stanie rozwiązać tego zadania. Życzę miłego sprawdzania.*

WA59 (zadanie 2.2.57): *Ech, chyba za cienki jestem:P*

LU30 (zadanie 5.2.57): *Dziękuję za cierpliwość i wyrozumiałość członków komisji, którzy poprawiali moje nieudane próby rozwiązania zadań olimpijskich.*

WR53 (zadanie 5.2.57): *Proszę tego nie czytać! Przykro mi stwierdzić, ale to rozwiązanie to czyste 0.*

WA87 (zadanie 3.3.57): *Dowód przeprowadzony metodami doświadczalnymi (z dokładnością 0,5 mm:)) zamieszczam w brudnopisie.*

KR54 (zadanie 5.2.58): *Przez każde cztery punkty na płaszczyźnie przechodzi okrąg, jeśli tylko do narysowania tego okręgu użyjemy odpowiednio grubego ołówka (dowód empiryczny).*

KA34 (zadanie 5.3.57):*Litwo ojczyzno moja ty jesteś jak zdrowie ile cie trzeba cenić ten tylko sie dowie kto cię stracił...*
Pdobnie czuję się oddając pustą pracę w mojej ostaniej szansie na otrzymanie punktów z geometrii w Olimpiadzie Matematycznej
Pozdrawiam
P.S. nie napisałem dłuższego fragmentu bo się za bardzo śmiałem i przeszkadzałem innym.

6 Synteza badań

W rozdziale tym przedstawiam najpierw, w sposób maksymalnie zwięzły, zbiorcze wyniki analizy obfitego materiału, jaki był do dyspozycji. Sądzę, że wyniki dają wiele do myślenia i że można z nich wyciągnąć więcej wniosków (choć mniej uzasadnionych) niż te, które są opisane niżej. Materiał rozdziału 6 może być zatem materiałem źródłowym do następnych badań.

6.1 Zadania na dowodzenie nierówności

Przede wszystkim w zadaniach tych potrzebna jest swego rodzaju *wyobraźnia algebraiczna*, porównywalna, choć nieco inna, do *wyobraźni geometrycznej*. Można ją określić jako wyczucie, jakie oszacowanie może doprowadzić do udowodnienia nierówności, a jakie jest *toporne* i *grube*. *Wyobraźnia algebraiczna* to także wyczucie, że niekiedy w przeprowadzanych rachunkach *musi* być błąd, że *coś jest za dobrze*. Z taką wyobraźnią łączy się nawyk sprawdzania obliczeń, ale nie w sensie kontrolowania krok po kroku wszystkich wykonywanych czynności, ale zastanowienia się, czy nie widać jakichś jawnych sprzeczności i niedorzeczności.
Nie brak zdań, że najważniejsza w nauczaniu matematyki jest geometria i że właśnie na zadaniach geometrycznych najlepiej poznaje się talent przyszłego matematyka. Ale zadania na dowodzenie nierówności są równie dobrym poletkiem doświadczalnym. W Olimpiadzie Matematycznej są z reguły dostępne dla większości uczniów (w tym sensie, że temat zadania jest zrozumiały, a w kursie matematyki szkolnej metodologia rozwiązywania nierówności jest obecna) - i dostarczają wobec tego niezwykle obfitego materiału do refleksji nad całością nauczania matematyki - w każdym razie nauczania na poziomie wyższym niż przeciętny.
Rozwiązanie nierówności jest zwykle o wiele trudniejsze niż równania, a samych twierdzeń, gdzie mówiłoby się o nierównościach, nie ma w szkole dużo (nierówność trójkąta, nierówność między średnimi). Wreszcie, zadań na dowodzenie nie ma w szkole wiele, a zatem *dowodzenie nierówności* jest samo w sobie czymś, co w świadomości ucznia wykracza poza materiał szkolny.

Zadanie 3.2.57

W rozwiązaniu zadania 3.2.57 uczniowie mogli stosować dwa podejścia: traktować lewą stronę nierówności jako jedno wyrażenie i próbować je szacować lub każdy składnik lewej strony nierówności:

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geqslant 1 \tag{37}$$

szacować za pomocą wyrażenia uzależnionego tylko od dwóch zmiennych. Zdecydowanie prostsza była strategia druga, która jest także jedną z podstawowych strategii rozwiązywania tego typu nierówności. Do tego szacowania zawodnicy (128 uczniów) wykorzystywali lemat

Lemat 8. *Dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność:*

$$\frac{x^4+y^4}{xy(x^3+y^3)}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Często uczniowie nie traktowali lematu jako odrębnego elementu rozwiązania, ale *de facto* pojawiał się w ich rozwiązaniach. Charakterystyczne jest to, że mimo możliwości wykazania tego lematu poprzez zapis prostego wielomianu dwóch zmiennych w postaci iloczynowej, uczniowie wykorzystywali twierdzenie Cauchy'ego, metodę ciągów jednomonotonicznych, twierdzenie Muirheada, nierówność między średnimi potęgowymi, nierówność Czebyszewa.

Tylko jeden zawodnik - WA79, który był uczniem drugiej klasy Gimnazjum nr 16 w Warszawie, podał uogólnienie lematu, a następnie wykazał go indukcyjnie, czyli wykorzystał strategię: czasami łatwiej udowodnić zadanie ogólniejsze. W tym zadaniu jednakże taka strategia nie ułatwiała rozwiązania.
Uczniowie próbowali także stosować strategię: sprowadź do zastosowania dobrze znanego twierdzenia. Stąd liczne były próby stosowania nierówności Cauchy'ego, twierdzenia Muirheada, nierówności Jensena, metody ciągów jednomonotonicznych.
Aż 43 uczniów podejmowało próby zastosowania nierówności Cauchy'ego, ale tylko sześciu z nich rozwiązało poprawnie zadanie. Oznacza to, że dla większości stosujących nierówność Cauchy'ego była ona jednym z nielicznych, ale dobrze poznanych *wytrychów* do dowodzenia nierówności. Można postawić hipotezę, że uczniowie ci nie mieli wystarczających umiejętności do stosowania tego, wydawało by się, oczywistego narzędzia. Zwłaszcza, że zastosowanie nierówności Cauchy'ego w tym zadaniu nie było typowe i automatyczne.
52 uczniów w dowodzie nierówności powoływało się na twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych i aż czterdziestu zrobiło to poprawnie, z czego 39 wykorzystało to twierdzenie do dowodu nierówności $a^4 + b^4 \geq a^3b + b^3a$, co trzeba uznać za zastosowanie zbyt mocnego narzędzia do prostej i typowej nierówności. Zaznaczyć trzeba, że pozostali uczniowie na siłę próbowali zastosować tę metodę do szacowania całej lewej strony nierówności, ale tylko jednemu się to udało.
27 uczniów stosowało nierówność Muirheada i tylko pięciu nie ukończyło dowodu. Spośród stosujących tę nierówność dwunastu dostało się do finału. Wśród 27 uczniów z okręgu krakowskiego, którzy rozwiązali poprawnie omawiane zadanie, aż siedmiu (ponad 25%) wykorzystało tę nierówność. Wszyscy ci zawodnicy byli uczniami V LO w Krakowie. Można przypuszczać, że wiedzę o nierówności Muirheada uzyskali albo na zajęciach prowadzonych w szkole albo ze wspólnego źródła w literaturze. Zauważyć można także, że wielu z nich uważało wykorzystywane twierdzenie za tak klasyczne, że nie czuło potrzeby przedstawiania jego założeń i tezy oraz wyjaśniania pojęć i terminów z nim związanych.
Po zawodach 57 OM można uznać, że nierówność Muirheada weszła już do kanonu *klasycznego wykształcenia olimpijczyka*.
Pięć osób próbowało stosować nierówność Jensena, ale tylko jedna wiedziała jak to zrobić poprawnie. Pozostali bez sprawdzenia podawali, że pewna funkcja jest wypukła i na tej podstawie stosowali nierówność.
Warto zwrócić uwagę na to, że laureaci i wyróżnieni na 57 OM rozwiązywali zadanie 3.2.57 przede wszystkim z wykorzystaniem lematu 2 (21 uczniów, w tym tylko pięciu stosowało metodę ciągów jednomonotonicznych) oraz twierdzenia Muirheada (6 uczniów).
Motyw podstawienia, jaki pojawił się w rozwiązaniu firmowym, trudno uznać za strategię. Jest to raczej pewna procedura, która daje nowe spojrzenie na zadanie, a czasami zadanie upraszcza. Podstawienie, zarówno w omawianym zadaniu, jak i ogólnie, ma na celu uproszczenie zapisu lub doprowadzenie nierówności do postaci bardziej przyjaznej lub mającej związek ze znanymi nierównościami. W przypadku zadania 3.2.57 podstawienie jednak nie pomagało w sposób istotny w jego rozwiązaniu.
Dwunastu uczniów: KA65, KA75, KR11, KR22, LU55, TO44, WA60, WA91, WA63, WA101, WR55, WR56 przedstawiło rozwiązanie bardzo zbliżone do zaproponowanego przez organizatorów.
Siedmiu uczniów: LU16, TO13, TO36, WA01 (bez efektów pozytywnych) oraz PO30, WA701, WR80 (z pozytywnymi skutkami) stosowało podstawienie, chociaż wybrali inny sposób dowodzenia nierówności.
W rozwiązaniach zadania 3.2.57 blefowało prawie 7% zawodników; najwięcej blefów wystąpiło w okręgu gdańskim (14%) i toruńskim (12,5%). Chłopcy blefowali wyraźnie częściej (ponad 7%) niż dziewczęta (ponad 1%). Uczniowie klas pierwszych blefowali częściej (ponad 10%) niż uczniowie pozostałych klas (ponad 6%). Szczególnie dużo błędów świadomych popełnili

uczniowie III LO w Gdyni (prawie 16%) oraz IV LO w Toruniu (ponad 25%).
W rozwiązaniach zadania 3.2.57 błędy w wyniku walki o wynik popełniło prawie 6% zawodników; najwięcej wystąpiło w okręgu poznańskim (12%) i łódzkim (13%). Szczególnie dużo błędów w wyniku walki o wynik popełnili uczniowie III LO w Gdyni (ponad 10%), IV LO w Toruniu (ponad 12%) oraz XIII LO w Szczecinie (prawie 16%).
W rozwiązaniach zadania 3.2.57 błędy w wyniku powierzchownej wiedzy popełniło 5% zawodników; najwięcej wystąpiło w okręgu lubelskim (10%). Największy odsetek błędów powierzchownej wiedzy wystąpił u uczniów z III LO we Wrocławiu (ponad 13%).
W rozwiązaniach zadania 3.2.57 uczniowie próbowali stosować twierdzenie Cauchy'ego. Jednakże tylko 6 z 43 umiało to zrobić. Pozostali nie uzyskali dowodu nierówności. Tak duży procent (82%) błędnych zastosowań nierówności Cauchy'ego był związany z powierzchowną znajomością sposobów wykorzystania tej nierówności do dowodzenia innych nierówności. Zwłaszcza, że zastosowanie nierówności Cauchy'ego w omawianym zadaniu wymagało pewnego doświadczenia.

Zadanie 6.2.58

Siedemnastu uczniów rozwiązało zadanie w sposób podany przez organizatorów. Byli to uczniowie: KA92, KR12, KR02, KR22, KR03, KR23, KR84, LU61, PO30, PO50, SZ30, TO52, WA62, WA23, WA04, WA39, WA101. Zwraca uwagę fakt, że sześciu uczniów pochodziło z okręgu krakowskiego (w tym pięciu z V LO w Krakowie), a pięciu uczniów z okręgu warszawskiego (trzech z XIV LO w Warszawie i dwóch z liceów białostockich), dwóch uczniów z poznańskiego (jeden z Konina i jeden z Krotoszyna), w którym to okręgu uczniowie dotychczas wypadali bardzo słabo w olimpiadach matematycznych.
Zawodnik KR31, uczeń III klasy z V LO w Krakowie zaproponował nieco odmienny dowód: wykorzystał metodę zbliżeń do oszacowania sumy dwóch składników lewej strony nierówności.
Spośród omawianej osiemnastki tylko dwóch uczniów: KR02 (jedyny uczeń pierwszej klasy, który rozwiązał zadanie) i WA39 nie przeszło do finału. Jeden uczeń w finale otrzymał nagrodę I stopnia, jeden - nagrodę II stopnia, trzech - nagrodę III stopnia, a dwóch - wyróżnienie. Dwóch uczniów pojechało na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną (oznacza to, że czterech uczestników MOM nie rozwiązało zadania 6.2.58). W finale sześciu uczniów rozwiązało zadanie na dowodzenie nierówności 6.3.58 (KR23, LU61, SZ30, TO52, WA23, WA101), z tym, że LU61 rozwiązał w finale tylko to jedno zadanie. Wśród omawianej grupy była tylko jedna dziewczyna: SZ30.
82 zawodników korzystających z poprawnej strategii szacowania każdego składnika lewej strony wykorzystywało szacowania zbyt *grube*. Z kolei 44 zawodników przedstawiło błędne szacowania składników lewej strony nierówności. Taki rodzaj błędu powinien być łatwy do weryfikacji dla samego zawodnika olimpijskiego (choćby przez sprawdzenie na przykładzie).
Zdecydowanie najlepiej poradzili sobie uczniowie z okręgu krakowskiego: siedmiu uczniów z tego okręgu rozwiązało to zadanie (stanowią oni 11% wszystkich uczestników z okręgu krakowskiego i 41% wszystkich uczniów, którzy poprawnie rozwiązali zadanie).
Ponad 150 uczniów próbowało do rozwiązania zadania 6.2.58 zastosować twierdzenia o nierównościach (czyli zastosować strategię sprowadzenia zadania do *tricku* olimpijskiego): nierówność Cauchy'ego (79), nierówność między średnimi potęgowymi (23), nierówność Jensena (26), twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych (9), twierdzenie o funkcji supermodularnej (4) i szereg innych. Tylko jeden z nich potrafił zrobić dobry użytek z takiego twierdzenia (dokładniej - z nierówności Cauchy'ego).
Najwięcej błędów powierzchownej wiedzy popełnili uczniowie z okręgów: katowickiego (20%), szczecińskiego (14%), toruńskiego (14%) i wrocławskiego (13%). W okręgach szczecińskim (14%), toruńskim (10%) i warszawskim (11%) uczestnicy blefowali znacznie częściej niż w innych okręgach. W okręgu lubelskim charakterystyczne było duże nagromadzenie prac z błęd-

nymi strategiami (34%) i bardzo mała liczbach blefów (2%). Uczniowie z okręgu toruńskiego, znacznie częściej niż w innych okręgach, wybierali błędne strategie (46%). Pod względem liczby popełnionych błędów zdecydowanie prowadził okręg poznański (34%).
Można zauważyć, że największym problemem uczniów rozwiązujących omawiane zadanie było stosowanie błędnych strategii rozwiązania. Aż 45% uczniów nie miało żadnego pomysłu na rozwiązanie (a zatem oddało pustą kartkę lub wykonało działania, które nie zbliżały do rozwiązania). Ponad 13% uczniów nie miało strategii, która mogła doprowadzić do rozwiązania.
Dziewczęta częściej niż chłopcy nie miały strategii rozwiązania i wybierały błędne strategie oraz rzadziej niż chłopcy popełniały błędy świadome, błędy powierzchownej wiedzy. Chłopcy nieco lepiej poradzili sobie z tym zadaniem: 3,4% z nich miało poprawne rozwiązanie, podczas gdy dla dziewcząt wskaźnik ten wynosił tylko 1%.
Najwięcej uczniów, którzy rozwiązali zadanie pochodziło z klas III, ale w stosunku do liczby uczestników najlepiej poradzili sobie uczniowie klas I. Najmniej pustych prac oddali uczniowie gimnazjów, którzy jednakże popełnili bardzo dużo błędów, zwłaszcza powierzchownej wiedzy i w wyniku walki o wynik.
W wybranych szkołach omawiane zadanie rozwiązało: pięciu uczniów V LO w Krakowie, trzech uczniów XIV LO w Warszawie oraz jeden uczeń XIII LO w Szczecinie. Może to oznaczać, że uczniowie z V LO w Krakowie i XIV LO w Warszawie zostali poddani treningowi, w czasie którego omawiane były nierówności podobne do tej z zadania 6.3.58.
Najwięcej pustych prac oddali uczniowie z III LO w Gdyni (68%), XIII LO w Szczecinie (58%) oraz XIV LO w Warszawie (56%), natomiast najmniej - uczniowie III LO w Wrocławiu (36%) oraz XIV LO w Wrocławiu (35%) Jednocześnie uczniowie z III LO w Wrocławiu znacznie częściej nie mieli strategii rozwiązania zadania (50%).
Błędy powierzchownej wiedzy wyraźnie częściej niż wśród wszystkich uczestników II etapu 58 OM występowały u uczniów z III LO w Wrocławiu (14%). Podobnie sytuacja miała się z błędami wynikającymi ze zmęczenia intelektualnego (7%) oraz błędami świadomymi (14%).
Błędy świadome były także szczególnie widoczne w pracach uczniów z XIV LO w Warszawie (14%). Uczniowie z IV LO w Toruniu nie popełnili żadnych błędów: wynikających ze zmęczenia intelektualnego, walki o wynik oraz świadomych. Jednocześnie 13% z nich popełniło błąd powierzchownej wiedzy i proponowało błędną strategię. Błędna strategia była charakterystyczna dla uczniów z III LO w Gdyni (29%), XIV LO w Wrocławiu (31%) i XIV LO w Warszawie (30%).

Zadanie 6.3.58

Spośród 123 uczniów, którzy uczestniczyli w finale 58 OM, tylko 34 rozwiązało zadanie 6, z czego trzydziestu zaprezentowało rozwiązanie identyczne z zaproponowanym przez organizatorów. A więc podane rozwiązanie z wykorzystaniem zasady indukcji matematycznej narzuca się w sposób naturalny, tym bardziej, że jeszcze sześciu innych uczniów próbowało przeprowadzić dowód indukcyjny, choć zabrakło pomysłów na jego realizację.
Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności zaproponowało czterech uczniów.
Oba sposoby rozwiązania można uznać za typowe dla tej klasy nierówności.
Na szczególną uwagę zasługują uczniowie z okręgu lubelskiego. Omawiane zadanie poprawnie rozwiązało aż 4 uczestników z tego okręgu. Okazuje się także, że każdy z nich był uczniem innej szkoły: I LO w Przemyślu, II LO w Przemyślu, I LO w Krośnie, I LO w Jarosławiu.
Szkoły, z których co najmniej dwóch uczniów rozwiązało omawiane zadanie to:
XIV LO w Warszawie (6), VI LO w Bydgoszczy (3), VIII LO w Katowicach (3), V LO w Krakowie (3), II LO w Krakowie (2), XIII LO w Szczecinie (2).
Spośród 88 uczniów, którzy otrzymali 0 punktów, w pracach 69 nie było żadnych prób rozwiązania. Z dostępnych brudnopisów wynika, że zawodnicy, którzy nie znaleźli poprawnego rozwiązania, nie przedstawiali rozwiązań błędnych czy też nieistotnych prób rozwiązań.

Aż 75 uczniów nie miało żadnej strategii rozwiązania, 12 zawodników w trakcie rozwiązania przyjęło błędną strategię, a tylko dwóch uczniów blefowało. Pozostałe typy błędów występują pojedynczo. Można więc podsumować to następująco: grupa uczestnicząca w finale była dobrze wyselekcjonowana pod względem merytorycznym. Byli to uczniowie, którzy niezwykle krytycznie podchodzili do swoich pomysłów i jeżeli nie mieli rozwiązania zadania lub posiadali rozwiązanie z lukami i błędami, to nie przedstawiali swojej pracy do oceny.

6.2 Zadania z geometrii płaskiej

Zadanie 2.2.57

Spośród 560 uczestników II etapu 57 Olimpiady Matematycznej 24 uczniów przedstawiło rozwiązania zadania 2.2.57, które zostały ocenione na 5 lub 6 punktów, a zatem tylko 4,3% uczniów rozwiązało zadanie. Spośród nich tylko jeden zawodnik nie dostał się do finału OM. Oto lista uczniów, którzy rozwiązali zadanie: GD90, KA23, KA33, KA62, KA65, KR04, KR36, KR70, KR73, KR75, SZ20, TO72, WA90, WA11, WA61, WA22, WA23, WA63, WA76, WA67, WA68, WA171, WA102, WR33. Zwraca uwagę fakt, że dwudziestu uczniów pochodziło z trzech okręgów: czterech zawodników z katowickiego, pięciu z krakowskiego i jedenastu z warszawskiego. Spośród 24 zawodników aż 14 uczęszczało do dwóch szkół: dziesięciu uczniów do XIV LO w Warszawie, czterech do V LO w Krakowie.

O tym, że zadanie 2.2.57 wybrało uczniów najlepszych, świadczy też to, że wśród wśród 21 uczniów, którzy otrzymali 6 punktów, 15 rozwiązało też zadanie pierwsze, 17 - zadanie trzecie, 18 - zadanie czwarte, 14 - zadanie piąte i 4 - zadanie szóste.
Twierdzenie o odcinkach stycznych bywa nazywane przez uczniów Najmocniejszym Twierdzeniem Geometrii. W zadaniu 2 z II etapu 57 OM należało skorzystać z tego twierdzenia. 90 uczniów powołało się na to twierdzenie, w tym 66 uczniów, którym nie udało się rozwiązać zadania. Ponieważ 230 uczniów przedstawiło jakiekolwiek zapisy w swoich czystopisach oznacza to, że 140 spośród nich nie dostrzegło możliwości zastosowania tego twierdzenia.
Twierdzenie o dwusiecznej wykorzystało w swoich rozwiązaniach sześciu uczniów, z czego dwóch z powodzeniem. Twierdzenie Ptolemeusza było wykorzystywane w 10 pracach, przy czym w czterech spowodowało, że uczniowie otrzymali poprawne rozwiązanie. Twierdzenie o potędze punktu względem okręgu wykorzystywało trzech uczniów, ale tylko jeden z nich rozwiązał zadanie poprawnie. Z własności obrazu okręgu w inwersji próbowało skorzystać czterech uczniów. Wszystkie próby były nieudane.
Strategia *odgadnij i sprawdź* była stosowana przez dziesięciu zawodników. Uczniowie wskazywali punkt, który powinien być środkiem okręgu spełniającego tezę zadania, a następnie wykazywali, że istotnie tak jest. Pozostali uczniowie (14) dowodzili, że pewne punkty są współokręgowe, ale nie wskazywali środka okręgu. 12 osób podjęło próbę rozwiązania zadania metodą analityczną, ale tylko jedna osoba zaprezentowała poprawne rozwiązanie. Dwie osoby (obie z V LO w Krakowie) próbowały bezskutecznie korzystać z liczb zespolonych.
W zadaniu 2.2.57 sześciu uczniów przedstawiło błędne rozwiązania w których nie wykorzystali wszystkich założeń i twierdzili, że rozwiązali poprawnie zadanie.
Sporadycznie pojawiało się założenie tezy (3 osoby) - zawodnicy prowadzili tak długo dowód, że nie zauważali, że fakt, który był równoważny tezie nie został przez nich wykazany (a narzucało się intuicyjnie, że fakt taki powinien być prawdziwy).
Strategia rozważania przypadku szczególnego pojawiała się w rozwiązaniach zadań, ale miała znaczenie negatywne, to znaczy przypadek szczególny zastępował rozważania ogólne. W przypadku zadań z geometrii rozważania przypadku szczególnego wynikały najczęściej z rysunku sugerującego lub uwzględniającego szczególne uwarunkowania.
Najwięcej poprawnych rozwiązań pojawiło się w okręgach: warszawskim (11), krakowskim

(5), katowickim (4). Po jednym poprawnym rozwiązaniu zaproponowali uczniowie z okręgów: gdańskiego, szczecińskiego, toruńskiego i wrocławskiego. Żadnego poprawnego rozwiązania nie oddali uczniowie z okręgów: lubelskiego, łódzkiego, poznańskiego. Charakterystyczne jest także to, że w tych trzech okręgach żaden uczeń nie uzyskał wyższej oceny niż 2 punkty oraz żaden uczeń nie miał pomysłu na dobrą strategię.
W całej Polsce 59% uczniów oddało czyste prace. Najwięcej prac bez żadnych notatek oddali uczniowie z okręgu łódzkiego (71%), a najmniej uczniowie z okręgów lubelskiego (50%), krakowskiego (52%).
Błędy powierzchownej wiedzy częściej pojawiły się u uczniów z okręgów: toruńskiego (5%), szczecińskiego (4%), katowickiego (3%).
Błędy świadome, czyli blefy pojawiały się wyraźnie częściej w okręgu szczecińskim (13%), niż w pozostałych okręgach (5%).
Błędne strategie, które nie mogły przynieść sukcesu, wyraźnie częściej pojawiały się u uczniów z okręgów: szczecińskiego (20%), lubelskiego (17 %), toruńskiego (14%), wrocławskiego (14%). W okręgu warszawskim 10 uczniów wybrało błędne strategie, jednak ich liczba stanowi 8% liczby uczniów w tym okręgu i jest niższa niż średnia w Polsce (10%).
Dobre strategie, które nie przyniosły jednak sukcesu, pojawiły się u 5 uczniów z okręgu krakowskiego (metoda analityczna i zespolona).
Częściej blefowali uczniowie, którzy dostali się do finału i znacznie częściej mieli dobrą strategię, która jednak nie prowadziła ich do dobrego rozwiązania, niż pozostali uczniowie.
Stwierdzam, że 60% chłopców i 47% dziewcząt oddało puste prace. Prace puste i prace bez strategii stanowiły 75% prac dziewcząt i 82% prac chłopców.
Wyraźnie można dostrzec, że wszystkie kategorie błędów występowały w tym zadaniu częściej u dziewcząt niż u chłopców.
Wszyscy uczniowie gimnazjów otrzymali 0 punktów za to zadanie. 11 uczniów klas II (6%) i 12 uczniów klas III (4%) blefowało.
Odsetek pustych prac uczniów z wybranych szkół nie odbiega od procentu pustych prac uczniów z całej Polski. Jednakże uczniowie XIII LO w Szczecinie oddali tylko 36% pustych prac; stąd wynika najprawdopodobniej wyjątkowo duża liczba błędów powierzchownej wiedzy (11%), błędów wynikających z walki o wynik (5% - uczniowie z innych wybranych szkół nie popełniali tego typu błędów), błędów świadomych (16% - uczniowie z innych wybranych szkół nie popełniali tego typu błędów).
Najlepiej z zadaniem 2.2.57 poradzili sobie uczniowie XIV LO w Warszawie i V LO w Krakowie (20% prac ocenionych na więcej niż 0 punktów). Zawodnicy z wybranych szkół uzyskali dwukrotnie lepsze wyniki w trakcie rozwiązywania zadania niż uczniowie z całej Polski. Żaden uczeń z IV LO w Toruniu i XIV LO we Wrocławiu nie rozwiązał zadania.

Zadanie 5.2.57

Rozwiązania zadania 5.2.57 zaprezentowane przez uczniów można podzielić na trzy kategorie:

1. rozwiązania syntetyczne, czyli takie, w których uczniowie odwoływali się jedynie do własności przekształceń geometrycznych, wykorzystując porównywanie kątów i odcinków do określania przystawania i podobieństwa figur,

2. rozwiązania algebraiczne, w których rozwiązujący przypisywali odcinkom i kątom ich miary i za pomocą związków algebraicznych opisywali założenia, a dowody polegały na przekształceniach związków algebraicznych do postaci oczekiwanych w tezie,

3. rozwiązania z wykorzystaniem układu współrzędnych zarówno na płaszczyźnie rzeczywistej, jak i zespolonej.

Rozwiązania syntetyczne zadania 5.2.57 przedstawiło 19 uczniów (zostały zaprezentowane na siedem sposobów). Trzech spośród tych uczniów nie awansowało do finału: WA37 (rozwiązanie firmowe), WA80 (sposób 2) i WA10 (sposób 4).
Rozwiązania algebraiczne przedstawiło 28 uczniów. Spośród nich czterech nie dostało się do finału: WA77, SZ02, LU65 i TO36, a trzech zostało laureatami: WA72, GD90 i GD12.
Rozwiązanie zawodnika WA80 było zdecydowanie najładniejsze i najkrótsze spośród wszystkich rozwiązań zadania 5.2.57. Uczeń odwoływał się jedynie do własności symetrii osiowej i nie potrzebował rozważać przypadków, gdyż jego rozumowanie dotyczyło wszystkich możliwych położeń punktów P i Q.
Tylko dwaj uczniowie wśród tej dziewiętnastki zdobyli tytuł laureata 57 OM: KR04 (zajął pierwsze miejsce) i WA68 (zajął trzecie miejsce).
Siedem osób rozwiązywało zadanie z wykorzystaniem własności inwersji: pięciu z tych uczniów pochodziło z XIV LO w Warszawie, w tym czterech uczęszczało do klasy II. Można zatem wnioskować, że typ zadań rozwiązywanych z pomocą inwersji musiał być dokładnie omówiony na zajęciach szkolnych, w ramach kółka matematycznego lub warsztatów. Wszyscy uczniowie rozwiązujący zadanie metodą inwersji wykazali znajomość metody oraz jej niuansów.
Rozwiązanie analityczne przedstawił uczeń LU05. Rozwiązanie było żmudne, wymagało sporej dyscypliny, gdyż łatwo było o pomyłkę rachunkową. Mimo dosyć precyzyjnego prowadzenia rozwiązania, zawodnik nie ustrzegł się błędów: nie rozważył kilku szczególnych przypadków (dzielił przez wyrażenia, które miały miejsca zerowe). Uczeń nie dostał się do finału. Metodę analityczna próbowało stosować (bez pozytywnych skutków) jeszcze 23 uczniów. Osiemnastu spośród nich jedynie określiło współrzędne punktów z zadania; pozostali utknęli w rachunkach, mimo poprawnego planu rozwiązania.
Metodę liczb zespolonych próbowało stosować trzech uczniów.
Wśród 15 laureatów 57 OM, ośmiu nie rozwiązało zadania 5.2.57.

W rozwiązaniach zadania występowały pewne charakterystyczne zjawiska: 18 uczniów w swoich rozważaniach założyło bez uzasadnienia, że pewien fakt, równoważny tezie, był prawdziwy. 22 zawodników rozwiązało zadanie w szczególnym przypadku. Obydwa powyższe zjawiska wynikały z sugestywnych rysunków.
21 zawodników twierdziło, że błędnie wykazało tezę, chociaż w swoich dowodach nie wykorzystali wszystkich założeń. 7 uczniów nie rozważyło wszystkich przypadków.
Zadanie okazało się trudne: tylko 49 uczniów umiało je rozwiązać. Ośmiu uczniów, którzy rozwiązali poprawnie zadanie 5.2.57, nie weszło do finału.
Najwięcej poprawnych rozwiązań pojawiło się w okręgach: warszawskim (19), toruńskim (5), krakowskim (6). Najgorzej zaprezentowali się uczniowie z okręgu łódzkiego i poznańskiego (0 rozwiązań poprawnych) oraz wrocławskiego (1 rozwiązanie poprawne).
W całej Polsce 37% uczniów oddało czyste prace. Najwięcej prac bez żadnych notatek oddali uczniowie z okręgu łódzkiego (50%), a najmniej - z okręgów lubelskiego (30%) i krakowskiego (29%).
86% uczniów z okręgu krakowskiego i 84% uczniów z okręgu warszawskiego oddało prace ocenione na 0 punktów.
Błędy powierzchownej wiedzy częściej pojawiły się u uczniów z okręgu wrocławskiego (12%), a uczniowie z okręgów szczecińskiego i poznańskiego nie popełnili tego rodzaju błędów.
Błędy walki o wynik pojawiały się wyjątkowo często w okręgu poznańskim (30%) i łódzkim (24%).
Błędy świadome, czyli blefy pojawiały się wyraźnie częściej w okręgach łódzkim (15%), gdańskim (14%) i wrocławskim (14%).
Błędne strategie, które nie mogły przynieść sukcesu, wyraźnie częściej pojawiały się u uczniów z okręgów: łódzkiego (44%), poznańskiego (44%) i wrocławskiego (37%).
Dobre strategie, które nie przyniosły jednak sukcesu, pojawiły się u 4 uczniów z okręgu kra-

kowskiego i 4 uczniów z okręgu lubelskiego.
40% chłopców i 22% dziewcząt oddało puste prace. Prace puste i prace bez strategii stanowią 49% prac dziewcząt i 60% prac chłopców. Bardzo zbliżony był odsetek uczniów i uczennic, którzy otrzymali 0 punktów (około 90%).
Procent pustych prac uczniów z III LO w Gdyni (53%) i XIV LO w Wrocławiu (58%) był znacząco wyższy, niż w innych szkołach oraz w całej Polsce.
Charakterystyczne jest, że w obydwu badanych szkołach wrocławskich żaden uczeń nie rozwiązał tego zadania. Tymczasem 25% uczniów XIV LO w Warszawie rozwiązało poprawnie zadanie.
Uczniowie z wybranych szkół uzyskali nieco lepsze wyniki w trakcie rozwiązywania zadania niż uczniowie z całej Polski.
Wyraźnie więcej niż w pozostałych wybranych szkołach błędów powierzchownej wiedzy (18%) i błędów wynikających ze zmęczenia intelektualnego popełnili uczniowie III LO w Wrocławiu.
Wyraźnie więcej błędów walki o wynik popełnili uczniowie III LO w Gdyni (16%) i XIII LO w Szczecinie (21%).
Największa liczba blefów wystąpiła w pracach uczniów z V LO w Krakowie.

Zadanie 3.3.57

Zadanie 3.3.57 zostało rozwiązane przez 9 uczniów na trzy sposoby. Rozwiązanie firmowe przedstawił uczeń I klasy XIV LO w Warszawie. Siedmiu uczniów zaproponowanło bardzo ładne rozwiązania oparte na analizie szczególnego przypadku, który łatwo mógł być sprowadzony do przypadku ogólnego. Zwraca uwagę, że taką strategię zastosowali uczniowie z XIV LO w Warszawie (2), III LO w Gdyni (2), IV LO w Toruniu (1), XIII LO w Szczecinie (1), I LO w Zielonej Górze (1); tylko jeden uczeń pochodził spoza *stajni olimpijskich*. Zdobywca pierwszego miejsca przedstawił rozwiązanie odbiegające od pozostałych sposobów.
Wśród 125 prac uczniów, 84 prace nie zawierały żadnych zapisów.
Wśród 31 prac, które otrzymały ocenę 0 punktów i w których uczniowie przedstawili do oceny zapisy, często pojawiały się błędy powierzchownej wiedzy (6) i blefy (11).
Wśród 22 uczniów, którzy zadeklarowali, że rozwiązali zadanie, tylko 10 miało do tego podstawy.

Zadanie 5.2.58

Według kryteriów *olimpijskich* było to zadanie łatwe: 5 lub 6 punktów uzyskało 177 osób, 36 osób zdobyło 2 punkty. Rozwiązanie firmowe zadania oparte było zasadniczo na obserwacji własności siecznych okręgu. Strategię *odgadnij i sprawdź* próbowało stosować około 220 uczestników tzn. wykryli punkt, który jest środkiem poszukiwanego w zadaniu okręgu, z czego 143 zawodników potrafiło wykazać, że punkt ten istotnie jest środkiem okręgu.
Charakterystycznym błędem w rozwiązaniach tego zadania okazało się nieprawidłowe rozumienie i stosowanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o siecznych okręgu. Bez sprawdzenia położenia punktów $KLMN$, które spełniały warunek $KO \cdot LO = MO \cdot NO$, uczniowie wnioskowali, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu. Ten błąd pojawił się w 30 pracach; tylko dwóch uczniów, rozwiązujących w ten sposób, dostrzegło potrzebę analizy położenia punktów K, L, M, N.
182 uczniów oddało puste prace.
Dwóch uczniów w swoim rozumowaniu wykorzystało twierdzenie o prostych potęgowych trzech okręgów - w obydwu przypadkach rozwiązania były poprawne. Trzech uczniów próbowało korzystać z własności inwersji, ale ich rozwiązania nie wyszły poza etap przekształcenia konfiguracji punktów w inwersji względem okręgu.
Jeden uczeń próbował korzystał z twierdzenia Desarguesa i jeden z twierdzenia Newtona, ale

w obu przypadkach uczniowie nie znali poprawnych sformułowań tych twierdzeń. Czterech uczniów próbowało bezskutecznie rozwiązać zadanie metoda analityczną. Jeden uczeń zastosował metodę zespoloną i mimo dobrej znajomości tej metody utknął w rachunkach.
Najwięcej poprawnych rozwiązań pojawiło się w okręgach: warszawskim (55), krakowskim i katowickim (po 20). Najgorzej zaprezentowali się uczniowie z okręgu gdańskiego i poznańskiego (po 8), łódzkiego (9) oraz lubelskiego (10). Aż 46% uczniów z okręgu warszawskiego i 34% z okręgu poznańskiego rozwiązało poprawnie zadanie. Najgorzej pod tym względem wypadły okręgi lubelski (19%) i gdański (20%).
12% uczniów z okręgu szczecińskiego otrzymało 2 punkty - jest to dwukrotnie większy procent uczniów niż w całej Polsce.
W całej Polsce 32% uczniów oddało czyste prace. Najwięcej prac bez żadnych notatek oddali uczniowie z okręgu łódzkiego (50%), a najmniej uczniowie z okręgu poznańskiego (17%).
Błędy powierzchownej wiedzy najczęściej pojawiały się w pracach uczniów z okręgów: szczecińskiego (18%) i krakowskiego (12%), a najrzadziej u uczniów okręgów łódzkiego (3%) i warszawskiego (5%).
Błędy walki o wynik pojawiały się wyjątkowo często w okręgu poznańskim (13%).
Błędy świadome, czyli blefy pojawiały się wyraźnie częściej w okręgu lubelskim (11%), gdańskim (10%) i toruńskim (9%). Znikoma liczba blefów pojawiła się w pracach uczniów z okręgów: łódzkiego, poznańskiego, katowickiego i szczecińskiego.
Błędne strategie, które nie mogły przynieść sukcesu, wyraźnie częściej pojawiały się u uczniów z okręgów: gdańskiego (28%), poznańskiego (26%) i szczecińskiego (24%).
Tylko 7 uczniów, którzy nie rozwiązali zadania ani nie mieli dobrego pomysłu na rozwiązanie przeszło do finału.
78% uczniów, którzy nie weszli do finału, nie potrafiło rozwiązać zadania.
Błędy powierzchownej wiedzy wystąpiły w 14% prac uczniów, którzy weszli do finału, podczas, gdy w pracach pozostałych uczniów stanowiły 7%.
Prace puste i prace bez strategii stanowią 51% prac dziewcząt i 40% prac chłopców. Chłopcy znacznie lepiej radzili sobie z rozwiązywaniem zadania: prawie 37% z nich rozwiązało zadanie, podczas gdy w przypadku dziewcząt - tylko 17%.
Wyraźnie można dostrzec, że błędy powierzchownej wiedzy i walki o wynik znacznie częściej występują w pracach dziewcząt.
Zauważyć należy, że z zadaniem dobrze radzili sobie startujący w OM gimnazjaliści: na 9 uczniów poprawnie rozwiązało je aż czterech. Uczniowie liceów niezależnie od klasy, do której uczęszczali, uzyskali wynik: ok. 30% poprawnych rozwiązań.
Uczniowie gimnazjów raczej nie popełniali błędów: albo oddawali puste prace, albo mieli poprawne rozwiązanie; jeden gimnazjalista otrzymał 2 punkty.
Wśród uczniów wybranych do badań szkół najlepiej z zadaniem radzili sobie uczniowie XIV LO w Warszawie (39% prac ocenionych na 0 punktów, 53% prac ocenionych na 5 lub 6 punktów), najgorzej - uczniowie III LO we Wrocławiu: 73% prac ocenionych na 0 i 27% prac ocenionych na 5 lub 6 punktów.
Błędy powierzchownej wiedzy znacznie częściej niż w całej populacji występowały w pracach uczniów XIII LO w Szczecinie (30%) i XIV LO we Wrocławiu (18%). W pracach uczniów III LO we Wrocławiu takie błędy nie występowały, ale wynika to raczej z tego, że uczniowie tego liceum ogólnie mieli poważny problem z rozwiązywaniem tego zadania.
Blefy wyjątkowo często pojawiały się w pracach uczniów III LO w Gdyni i IV LO w Toruniu.

Zadanie 1.3.58

Spośród 123 uczniów biorących udział w III etapie 58 OM, zadanie 1.3.58 rozwiązało poprawnie 64 zawodników, a 9 uczniów przedstawiło dobry pomysł na rozwiązanie, ale z powodu braku rozważenia wszystkich przypadków bądź braku determinacji i konsekwencji, nie uzyskali

ani 5 ani 6 punktów.
34 zawodników oddało prace bez żadnych notatek. Wśród dwudziestu uczniów, którzy otrzymali 0 lub 2 punkty, jeden uczeń popełnił błąd powierzchownej wiedzy, trzech blefowało, a u sześciu widoczne były oznaki zmęczenia intelektualnego.
Spośród 73 uczniów, którzy twierdzili, że rozwiązali zadanie, tylko czterech myliło się w ocenie swojej pracy. Pozostali poprawnie rozwiązali zadanie lub mieli mocne podstawy sądzić, że je rozwiązali (chodzi tu przede wszystkim o uczniów, którzy nie rozważyli pewnych przypadków, które należało krótko skomentować lub przynajmniej dostrzec ich występowanie).

Charakterystyczne jest to, że wraz ze znikaniem konstrukcji z programów szkolnych zanika umiejętność i potrzeba wykonywania precyzyjnych rysunków u uczniów startujących w Olimpiadzie Matematycznej. Ma to odzwierciedlenie w niestarannych rysunkach i błędach, jakie pojawiają się w wielu pracach. Na podstawie źle przygotowanych rysunków uczniowie wyprowadzają wnioski, które są fałszywe. Na podstawie rysunku w jednej sytuacji (czasami sytuacji szczególnej, regularnej) dostrzegają fakty charakterystyczne tylko dla danej sytuacji i je uogólniają.
Można zauważyć, że zanikają umiejętności charakterystyczne dla rozwiązywania zadań konstrukcyjnych, a przede wszystkim analiza liczby rozwiązań i dowód poprawności konstrukcji.
George Polya w pracy *Jak to rozwiązać* ([105]) pisze:
Zaleta dokładnych rysunków polega na tym, że mogą one bardziej zaawansowanym nasunąć na myśl pewne twierdzenia geometryczne. Niedokładny rysunek może czasami zasugerować fałszywy wniosek.
Tę uwagę można zadedykować zawodnikom startującym w OM i powinna stanowić dla nich cenną wskazówkę, znacznie poprawiającą skuteczność w rozwiązywaniu zadań geometrycznych.

Problemy z zadaniami geometrycznymi nie są typowe tylko dla 57 i 58 OM. Na zakończeniu 30 OM profesor Aleksander Pełczyński mówił:
Z analizy rozwiązań wynika, że szczególnie w zawodach stopnia I i II najwięcej kłopotu sprawiały młodzieży (na ogół niezbyt trudne) zadania geometryczne.Wydaje się, że przyczyny tego faktu należy szukać w programie nauczania geometrii, który kładzie zbyt wielki nacisk na stronę aksjomatyczną geometrii, niezrozumiałą i niepotrzebną uczniowi na tym szczeblu nauczania, zaniedbując jednocześnie fakty rozwijające wyobraźnię geometryczną, kinematyczną i klasyczne rozumowania konstrukcyjne kształcące ucznia w trudnej sztuce logicznego myślenia. Problem jest poważny. Wydaje się, że programy geometrii winny ulec pewnej modyfikacji.
Trzeba jednak przyznać, że w zawodach stopnia III młodzież radziła sobie z zadaniami geometrycznymi nie najgorzej; ale pamiętać jednak należy, że udział w tych zawodach brała młodzież już wyselekcjonowana i najzdolniejsza.
Na normalnym poziomie wypadły zadania z algebry, teorii liczb i elementów analizy.

6.3 Zadania z geometrii przestrzennej

Zadanie 5.3.57

Spośród 125 uczestników finału aż 67 uczniów oddało puste kartki w rozwiązaniu tego zadania. Spośród 58 uczniów, którzy oddali rozwiązania, praktycznie wszyscy powoływali się na twierdzenie o odcinkach stycznych: 17 uczniów cytowało to twierdzenie, a 30 dowodziło jego prawdziwości. Uczniowie, którzy dowodzili tego twierdzenia nie odwoływali się do jego znajomości. Może to oznaczać, że twierdzenie o odcinkach stycznych do okręgu, znane każdemu olimpijczykowi, nie ma oczywistego dla uczniów uogólnienia dla sfery. Zaskakuje zatem brak przeniesienia wiedzy i intuicji płaskiej na przestrzenną. Wśród 17 uczniów, którzy powoływali

się na twierdzenie o odcinkach stycznych do sfery, 7 uczniów używało określeń: największe twierdzenie geometrii, najmocniejsze twierdzenie geometrii, zasadnicze twierdzenie geometrii. 53 uczniów przedstawiło do oceny niepoprawne rozwiązania, z czego aż 25 było przekonanych, że rozwiązało zadanie, co oznacza, że 47% dokonało błędnej oceny poprawności swojego rozwiązania. Jak na uczestników III etapu odsetek ten jest wyjątkowo duży. Błędami charakterystycznymi dla rozwiązań tego zadania były blefy (10) oraz błędy walki o wynik (13). Większość błędów wynikała z nieprawidłowego umiejscowienia punktów występujących w zadaniu względem płaszczyzn wyznaczonych przez punkty z treści zadania. Szereg błędów był także spowodowany wyciąganiem niepoprawnych wniosków z analogicznych sytuacji w geometrii płaskiej.

Zadanie 5.3.58

Spośród 123 uczestników finału 58 OM zadanie 5.3.58 rozwiązali czterej uczniowie. Wszyscy zaprezentowali pomysł rozwiązania identyczny ze sposobem przedstawionym przez organizatorów; różnice dotyczyły tylko szczegółów realizacji pomysłu rozwiązania. Wśród uczestników, którzy rozwiązali to zadanie jedyną dziewczyną była SZ40 (wśród siedmiu uczestniczek finału), natomiast chłopców było trzech.
Zwraca uwagę fakt, że dwóch uczniów II LO w Krakowie poprawnie rozwiązało zadanie.
Ponadto uczniowie: SZ40 i KR23 w finale 57 OM rozwiązali także zadanie 5.3.57. Uczeń KR51 był po raz pierwszy uczestnikiem finału na 58 OM, natomiast WA191 rok wcześniej nie rozwiązał zadania stereometrycznego.

W trakcie rozwiązywania zadań stereometrycznych uczniowie popełniali kardynalne błędy, które związane były z niedostateczną znajomością podstawowych pojęć i twierdzeń geometrii płaskiej. Pojawia się naturalne pytanie: czy rozwiązując zadania z geometrii płaskiej uczestnicy popełniliby błędy tego samego typu?

Uczniowie podawali fakty niezbędne do przeprowadzenia rozumowania, ale często pozostawiali je bez uzasadnienia. Ten sposób postępowania zdecydowanie częściej występował w trakcie rozwiązywania zadań geometrycznych, a zwłaszcza stereometrycznych niż w przypadku zadań na dowodzenie nierówności. Najczęściej uczniowie podawali takie fakty, które były równoważne tezie (zwykle były to wnioskowania oczywiste) w nadziei na uzyskanie przynajmniej częściowej oceny.

Uczniowie w rozwiązaniach próbowali uogólniać fakty i intuicje znane z planimetrii, bez sprawdzenia ich prawdziwości w przestrzeni. Zastanawiające było to, że uczniowie często nie próbowali weryfikować swoich pomysłów przez sprawdzenie dla charakterystycznych figur przestrzennych.
W trakcie rozwiązywania zadań z geometrii przestrzennej trudność sprawiało uczniom sporządzanie właściwego rysunku w perspektywie równoległej. Ten fakt implikował błędy w postrzeganiu zależności między elementami figury przestrzennej.

Zadania ze stereometrii były dla uczniów znacznie trudniejsze niż zadania z planimetrii, choć wymagały podobnego typu twierdzeń. Zadania 5.3.57 i 5.3.58 nie wymagały znajomości żadnych twierdzeń geometrii przestrzennej spoza programu szkolnego. Opierały się jedynie na rachunku na kątach, znajomości cech podobieństwa trójkątów, znajomości położenia środka sfery wpisanej i opisanej na czworościanie.
W analizowanych zadaniach pojawiały się proste rozwiązania, nie odwołujące się do potężnych narzędzi, wymagające tylko myślenia i bardzo kreatywnego stosowania poznanych narzędzi geometrycznych i algebraicznych. Charakterystyczne jest także to, w przypadku geometrii

przestrzennej dużo trudniej jest stosować metodę analityczną czy zespoloną.

Od 20 lat systematycznie zmniejsza się rolę stereometrii w programach szkolnych i podstawach programowych. Charakterystyczne jest położenie nacisku na obliczanie pól powierzchni i objętości brył, a prawie całkowity zanik analizy zależności między elementami brył, konfiguracji tychże elementów, przekrojów, brył wpisanych i opisanych. Nie bez wpływu na słabe wyniki w zadaniach z geometrii przestrzennej jest także ograniczone do minimum kształcenie intuicji przestrzennych.

Zjawiskiem silnie z tym skorelowanym, a wpływającym na słabe wyniki w zadaniach stereometrycznych jest brak literatury olimpijskiej w języku polskim z geometrii przestrzennej. Oznacza to, że brakuje materiału z dużą liczbą zadań i twierdzeń, zwłaszcza twierdzeń, które są *wytrychami* umożliwiającymi natychmiastowe rozwiązywanie konkretnych typów zadań.
Charakterystyczne jest także to, że wobec istnienia obszernej literatury na temat nierówności oraz sprzężonej z tym pewnej mody na zadania o nierównościach, zadania takie pojawiają się na olimpiadach często, są nadzwyczaj wyrafinowane i możliwe do rozwiązania przez specjalnie trenowanych uczniów. Stosunkowo proste zadania stereometryczne są rozwiązywane przez znikoma liczbę uczniów.

Uczniowie kalkulują, że nie warto zajmować się stereometrią, gdyż zadania z tego działu występują rzadko i to głównie na finale. Fakt ten potwierdzają statystyki występowania zadań z geometrii przestrzennej w poszczególnych etapach olimpiad. Na ten stan ma także zapewne wpływ decyzja, że na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej nie występują zadania z geometrii przestrzennej.

6.4 Strategie rozwiązywania zadań

Dominującą strategią, z jakiej korzystali uczniowie (niezależnie od działu, z jakiego było zadanie), była strategia sprowadzania rozwiązania zadania do zastosowania jednej metody *olimpijskiej* lub jednego twierdzenia *olimpijskiego*. Strategia ta nie jest tożsama z metodą heurystyczną *sprowadź zadanie do zadania pokrewnego*, o jakiej pisze Polya. Miał on na myśli poszukiwanie rozwiązań analogicznych, podobnych do rozwiązań znanych zadań. W przypadku wielu olimpijczyków należy raczej mówić o zastosowaniu narzędzia, które daje natychmiastowy wynik. Dominację takiego podejścia należy uznać za zjawisko negatywne.
W zadaniu 3.2.57 polegało to na zastosowaniu twierdzenia Muirheada, twierdzenia Cauchy'ego, nierówności Jensena, metody ciągów jednomonotonicznych. Zdecydowana większość zawodników, którzy starali się stosować podane twierdzenia nie osiągnęła sukcesu; wyjątek stanowili uczestnicy (było ich 70) wykorzystujący twierdzenie Muirheada lub analizę nierówności jednorodnej. Ponad 150 uczniów próbowało do rozwiązania zadania 6.2.58 zastosować: nierówność Cauchy'ego (79), nierówność między średnimi potęgowymi (23), nierówność Jensena (26), twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych (9), twierdzenie o funkcji supermodularnej (4) i szereg innych. Tylko jeden z nich potrafił zrobić dobry użytek z takiego twierdzenia (dokładniej - z nierówności Cauchy'ego).
W rozwiązaniach zadania 6.3.58 trzydziestu uczniów (spośród 123 uczestników finału) zastosowało zasadę indukcji matematycznej, przy czym trzeba uznać, że metoda ta była charakterystyczna dla tego typu nierówności.
W rozwiązaniach zadania 2.2.57 sporadycznie występowały próby sprowadzenia zadania do wykorzystania jednego twierdzenia, jednej metody. Twierdzenie o dwusiecznej wykorzystało w swoich rozwiązaniach sześciu uczniów, z czego dwóch z powodzeniem. Twierdzenie Ptolemeusza było wykorzystywane w 10 pracach, przy czym w czterech spowodowało, że uczniowie otrzymali poprawne rozwiązanie. Twierdzenie o potędze punktu względem okręgu wykorzystywało trzech uczniów, ale tylko jeden z nich rozwiązał zadanie poprawnie. Z własności obrazu

okręgu w inwersji próbowało skorzystać czterech uczniów. Wszystkie próby były nieudane.
W zadaniu 5.2.57 twierdzenie Ptolemeusza stosowało 14 uczniów, z czego 9 rozwiązało zadanie.
Twierdzenie o potędze punktu względem okręgu stosowało 12 uczniów, z czego 5 rozwiązało zadanie poprawnie.
Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie wykorzystywało 5 uczniów; tylko jeden z nich nie rozwiązał zadania.
Własności inwersji (obraz prostej i okręgu, konforemność) stosowało 10 uczniów, z czego poprawnie rozwiązało zadanie siedmiu uczniów.
W rozwiązaniach zadania 3.3.57 czterech uczniów próbowało (bezskutecznie) sprowadzić dowód do zastosowania twierdzenie Desarguesa (1) i Brianchona (3).
Strategia sprowadzania rozwiązania zadania do zastosowania jednego *tricku* wystąpiła także w zadaniu 5.2.58: zadanie sprowadzało się do stosowania twierdzenia o siecznych okręgu (175 uczniów tak postąpiło, przy czym 30 miało problem z interpretacją twierdzenia odwrotnego).

Strategia stosowania metody analitycznej i liczb zespolonych w zadaniach geometrycznych można uznać jako podstrategię strategii sprowadzania rozwiązania zadań do pewnego schematu. Jednakże skuteczność uczniów stosujących tę strategię jest bardzo mała. Zadania 2.2.57, 5.2.57, 3.3.57, 1.3.58 metodą analityczną rozwiązywało, odpowiednio, 13 uczniów (jeden uzyskał 6 punktów, jeden uzyskał 2 punkty, pozostali 0), 27 uczniów (tylko jeden zdobył 5 punktów, pozostali - 0), 2 uczniów (po 0 punktów) oraz 4 uczniów (wszyscy uzyskali po 0 punktów).
Zadania 2.2.57, 5.2.57, 3.3.57 za pomocą liczb zespolonych rozwiązywało, odpowiednio, 2 uczniów (zdobyli po 2 punkty), 3 uczniów (jeden zdobył 5 punktów, pozostali - 0), 2 uczniów (obaj 0 punktów). Zwracają uwagę uczniowie: KR32, który wszystkie zadania próbował rozwiązywać za pomocą liczb zespolonych (zdobył kolejno: 2, 2, 0 punktów) i został laureatem III stopnia 57 i 58 OM, KA50 i KA70, którzy zadania 2.2.57 i 5.2.57 rozwiązywali (bez sukcesów) metodą analityczną, KA26, który zadania 2.2.57 i 3.3.57 rozwiązywał metodą analityczną (za pierwsze z nich otrzymał 6 punktów, za drugie - 0).
Zadania 5.2.58 żaden uczeń nie rozwiązywał metodami analityczna i zespoloną (było to najłatwiejsze zadanie geometryczne 57 i 58 OM). Z kolei zadanie 1.3.58 było rozwiązywane przez 4 uczniów metodą analityczną (bezskutecznie) i nie było rozwiązań w liczbach zespolonych.

W poszczególnych zadaniach ujawniły się wykorzystywane przez uczniów strategie charakterystyczne dla konkretnych zadań. Były to:

1. Strategia dowodzenia nierówności poprzez szacowanie każdego z wyrażeń osobno. W zadaniach 3.2.57 i 6.2.58 taka strategia dawała najlepsze rezultaty, w których, odpowiednio, 133 (na 194 prace z poprawnymi rozwiązaniami) i 17 (na 18 prac z poprawnymi rozwiązaniami) uczniów zastosowało tę strategię.

2. Strategia dowodzenia twierdzenia ogólniejszego. Jedynie w zadaniu 3.2.57 jeden uczeń podał pewne uogólnienie lematu istotnego przy rozwiązywaniu zadania. Uogólnienie nie dawało jednak uproszczenia dowodu zadania.

3. Strategia dowodu przez sprzeczność. W rozwiązaniach zadania 6.3.58 zastosowało ją czterech uczniów.

4. Strategia *odgadnij i sprawdź*. Była ona stosowana przez dziesięciu uczniów w zadaniu 2.2.57. Zawodnicy wskazywali punkt, który powinien być środkiem okręgu spełniającego tezę zadania, a następnie wykazywali, że istotnie tak jest. Pozostali uczniowie (14) dowodzili, że pewne punkty sa współokręgowe, ale nie wskazywali środka okręgu. Taka

strategię stosowało w zadaniu 5.2.58 około 220 uczestników tzn. wykryło punkt, który jest środkiem poszukiwanego w zadaniu okręgu, z czego 143 zawodników potrafiło wykazać, że punkt ten istotnie jest środkiem okręgu.

5. Strategia rozważania przypadku szczególnego. Pojawiała się w rozwiązaniach zadań, ale często miała znaczenie negatywne, to znaczy przypadek szczególny zastępował rozważania ogólne. W przypadku zadań z geometrii rozważania przypadku szczególnego były spowodowane najczęściej wykonaniem rysunku sugerującego lub uwzględniającego szczególne uwarunkowania. W zadaniu 5.2.57 strategia przypadków szczególnych była (świadomie lub nieświadomie) stosowana przez 21 uczniów - we wszystkich przypadkach w sposób błędny.
   Strategia ta była podstawą rozwiązania zadania 3.3.57. Spośród 123 finalistów 57 OM tylko dziewięciu uczniów rozwiązało to zadanie, z czego siedmiu poprzez rozważenie przypadku szczególnego, który był łatwy do uogólnienia. Zwraca uwagę, że taką strategię zastosowali uczniowie z XIV LO w Warszawie (2), III LO w Gdyni (2), IV LO w Toruniu (1), XIII LO w Szczecinie (1), I LO w Zielonej Górze (1); tylko jeden uczeń pochodził spoza *stajni olimpijskich*.

6. Strategia regularnej drogi pojawia się w rozwiązaniach zadań, w których istnieje łatwe powiązanie założenia lub tezy z powszechnie (mam na myśli olimpijczyków) znanym twierdzeniem lub metodą. W przypadku zadania 5.2.58 miała miejsce właśnie taka sytuacja: zadanie kojarzyło się bezpośrednio z twierdzeniem o siecznych okręgu (charakterystyczne jest to, że 96 uczniów korzystało z tego twierdzenia i aż 77 dowodziło tego twierdzenia - najprawdopodobniej znali twierdzenie, ale nie byli pewni, czy mogą się na nie powołać). Strategię tę zastosowało 175 uczniów, z czego 30 niepoprawnie stosowało twierdzenie odwrotne do twierdzenia o siecznych.

6.5 Błędy w analizowanych zadaniach

Kategoria	3.2.57	6.2.58	2.2.57	5.2.57	5.2.58
Polska	6	3	1	12	6
okręg gdański	7	5	4	18	10
okręg katowicki	2	4	2	8	9
okręg krakowski	6	2	2	11	2
okręg lubelski	5	0	2	17	6
okręg łódzki	12	6	0	24	9
okręg poznański	13	9	0	30	13
okręg szczeciński	9	2	2	17	10
okręg toruński	6	0	3	9	9
okręg warszawski	3	1	0	5	0
okręg wrocławski	3	7	0	5	2
dziewczęta	7	2	3	19	10
chłopcy	5	3	1	11	5
gimnazjum	0	22	8	15	0
klasa I	4	1	0	12	4
klasa II	6	3	3	12	5
klasa III	6	3	0	10	7
a	0	0	0	5	0
b	11	7	0	16	7
c	13	0	0	6	0
d	5	2	0	3	2
e	16	4	5	21	8
f	4	6	0	8	0
g	2	0	0	4	0

Tabela 120: **Prac z błędami powstałymi w wyniku walki o wynik w zadaniach drugich etapów 57 i 58 OM (dane w procentach).**

Na podstawie tabeli 120 można wyciągnąć następujące wnioski dotyczące błędów walki o wynik:

1. w średnio 6 procentach prac uczestników drugiego etapu znajdowały się tego typu błędy,
2. w okręgach: gdańskim, poznańskim, szczecińskim uczniowie częściej, a w okręgu warszawskim rzadziej niż w pozostałych okręgach popełniali ten typ błędu,
3. dziewczęta częściej niż chłopcy popełnialy błędy walki o wynik,
4. gimnazjaliści częściej niż starsi uczestnicy popełniali takie błędy,
5. błędy walki o wynik były charakterystyczne dla uczniów XIII LO w Szczecinie i III LO w Gdyni,
6. uczniowie XIV LO w Warszawie i XIV LO w Wrocławiu rzadziej niż uczniowie z innych szkół popełniali ten typ błędu.

Z kolei na podstawie tabeli 121 można wyciągnąć następujące wnioski:

1. od 4 do 9 procent prac uczestników drugiego etapu zawiera blefy,
2. w okręgu toruńskim uczniowie blefowali częściej niż w pozostałych okręgach (dotyczy to czterech z pięciu analizowanych zadań),

3. w okręgu warszawskim uczniowie blefowali rzadziej niż w pozostałych okręgach (dotyczy to czterech z pięciu analizowanych zadań),

4. dziewczęta blefowały częściej niż chłopcy w zadaniach geometrycznych i rzadziej niż chłopcy w zadaniach na dowodzenie nierówności,

5. błędy związane z blefem nie zależą w istotny sposób od klasy, do której uczęszczają zawodnicy; jedynie gimnazjaliści w zadaniach na dowodzenie nierówności nie blefowali,

6. blefy były charakterystyczne w pewnych zadaniach dla uczniów *stajni olimpijskich* a zwłaszcza: III LO w Wrocławiu, III LO w Gdyni, IV LO w Toruniu.

kategoria	3.2.57	6.2.58	2.2.57	5.2.57	5.2.58
Polska	7	8	10	9	4
okręg gdański	14	5	4	14	10
okręg katowicki	7	6	3	11	1
okręg krakowski	5	6	3	14	3
okręg lubelski	7	2	7	2	11
okręg łódzki	6	6	3	15	3
okręg poznański	0	9	4	4	0
okręg szczeciński	4	14	13	4	0
okręg toruński	13	11	8	6	9
okręg warszawski	5	11	3	7	3
okręg wrocławski	7	5	3	14	3
dziewczęta	1	6	7	11	6
chłopcy	7	8	5	9	4
gimnazjum	0	0	8	8	0
klasa I	4	8	5	9	5
klasa II	6	9	6	10	4
klasa III	6	7	4	8	5
a	9	14	5	14	7
b	16	4	0	5	11
c	25	0	13	6	13
d	5	9	5	20	2
e	5	8	16	5	0
f	8	6	4	13	0
g	9	14	2	7	1

Tabela 121: **Prac z blefami w zadaniach drugich etapów 57 i 58 OM (dane w procentach).**

kategoria	3.2.57	6.2.58	2.2.57	5.2.57	5.2.58
Polska	5	11	2	6	9
okręg gdański	0	8	0	4	10
okręg katowicki	2	20	3	5	3
okręg krakowski	3	6	0	6	13
okręg lubelski	10	6	2	7	8
okręg łódzki	3	3	3	6	3
okręg poznański	0	4	0	0	13
okręg szczeciński	7	14	4	0	18
okręg toruński	6	14	5	5	11
okręg warszawski	6	9	1	7	5
okręg wrocławski	9	14	0	12	10
dziewczęta	6	7	6	4	11
chłopcy	5	11	1	6	9
gimnazjum	0	33	0	8	0
klasa I	5	10	4	7	6
klasa II	5	10	2	8	8
klasa III	6	10	1	4	10
a	14	14	0	18	0
b	0	4	0	5	11
c	0	13	0	6	6
d	5	4	0	5	12
e	5	12	11	0	31
f	4	6	0	8	19
g	9	9	0	7	4

Tabela 122: **Prac z błędami powierzchownej wiedzy w zadaniach drugich etapów 57 i 58 OM (dane w procentach).**

Na podstawie tabeli 122 można wyciągnąć następujące wnioski:

1. w pracach uczniów z okręgów: katowickiego, wrocławskiego, lubelskiego i szczecińskiego w wybranych zadaniach błędy powierzchownej wiedzy pojawiały się częściej niż w pozostałych okręgach,

2. błędy powierzchownej wiedzy były charakterystyczne dla uczniów XIII LO w Szczecinie i III LO w Wrocławiu.

Kategoria	6.3.57	3.3.57	1.3.58	5.3.57	5.3.58
powierzchowna wiedza	0,8	4,8	0,8	2,4	3,3
walka o wynik	0,8	1,6	1,6	10,4	4,1
blef	1,6	8,8	2,4	8	3,3

Tabela 123: **Prac z poszczególnymi typami błędów w rozwiązaniach zadań trzecich etapów 57 i 58 OM (dane w procentach).**

Poważnym problemem było popełnianie przez uczniów błędów świadomych, błędów powierzchownej wiedzy i błędów spowodowanych walką o wynik. Błędy te były charakterystyczne

przede wszystkim dla prac uczestników drugich etapów i wynikały z ambicji uczniów przedstawienia rozwiązań (mimo braku pomysłu na nie), które dadzą awans do finału. Zawody II stopnia dobrze selekcjonowały finalistów Olimpiady Matematycznej. Finaliści OM charakteryzowali się wysokim stopniem samooceny i umiejętnie wykrywali błędy i luki w swoich rozumowaniach. W pracach finalistów występowała mniejsza (w stosunku do prac z II etapu) liczba błędów powierzchownej wiedzy, blefów, błędów walki o wynik, a także świadomy dobór strategii i prezentacja prostych, pomysłowych rozwiązań, w których zawodnicy rzadko wykorzystywali *tricki* olimpijskie.

6.6 Propozycje zmian

Przystępując do pisania rozprawy główną myślą przyświecającą moim działaniom było pogłębienie wiedzy o pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie, która będzie przydatna dla nauczycieli przygotowujących uczniów do startu w OM oraz dla osób organizujących OM. Celem mojej rozprawy było nie tylko przedstawienie opisu statystycznego, merytorycznego i dydaktycznego Olimpiady Matematycznej, ale także zaproponowanie zmian w organizacji OM, dla których uzasadnieniem będą moje badania.
Mam także nadzieję, że moje działania doprowadzą do mentalnej zmiany u uczniów i nauczycieli. Poniżej przedstawiam pewne propozycje, które mogą spowodować zmianę nastawienia uczniów, nauczycieli i organizatorów OM.

Niech mottem będą słowa Stefana Straszewicza, przewodniczącego Komitetu Głównego 1. Olimpiady Matematycznej ([94]):

Zwykły tryb nauczania szkolnego nie sprzyja wykrywaniu talentów matematycznych wśród uczniów ani ich rozwijaniu. (...) Myślą przewodnią zawodów matematycznych jest zainteresowanie młodzieży tematami, które nie wykraczając w zasadzie poza zakres matematyki elementarnej przedstawiałyby dla uczniów małe zagadnienia, wymagające większej pomysłowości matematycznej bądź subtelniejszego rozumowania, bądź wreszcie głębszego wniknięcia w istotę rzeczy niż zwykłe zadania szkolne.

6.6.1 Alternatywna olimpiada

Na podstawie badań można pokusić się o próbę sformułowania propozycji zmian w Olimpiadzie Matematycznej, które spowodują, że uczniowie uzdolnieni, ale pozbawieni opieki merytorycznej typowej dla renomowanych szkół, mieliby szanse na skuteczne konkurowanie z uczniami tych szkół.
Już w 1975 roku Ireneusz Białecki ([14]) pisał:

Zadania olimpijskie obmyślane są tak, aby ich rozwiązanie wymagało dużej pomysłowości i oryginalności przy wiedzy stosunkowo niewiele wykraczającej poza program szkolny. Również przy przyznawaniu nagród faworyzuje się rozwiązania najprostsze, najbardziej pomysłowe. Mimo to trudno jednak całkowicie wyeliminować sytuacje, w których pomysłowość i oryginalność myślenia daje się zastąpić przez lepszą znajomość metod rozwiązywania zadań, a więc przez lepsze przygotowanie.

Pierwsza propozycja dotyczy nieco innego konstruowania zestawów zadań w kolejnych etapach. Inspiracją do takiej propozycji są przykłady zadań, jakie pojawiały się wśród zadań OM.

Na zawodach I stopnia 1. OM zadanie 12 miało następującą treść:

Wykreślić taki pięciokąt, żeby środkami jego boków były wierzchołki danego pięciokąta wypukłego. Poszukać uogólnień tego zadania.

W sprawozdaniu z 1. OM organizatorzy pokazali, o jakie uogólnienia im chodziło.

1. Na płaszczyźnie dane są punkty A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Znaleźć takie punkty B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, żeby punkt A_1 był środkiem odcinka B_1B_2, punkt A_2 - środkiem odcinka B_2B_3 itd., wreszcie punkt A_5 - środkiem odcinka B_5B_1.
2. W zadaniu poprzednim dopuszczamy, by punkty A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 się pokrywały.
3. Na płaszczyźnie dane są niekoniecznie różne punkty $A_1, A_2, \ldots A_{2n+1}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć takie punkty $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}$, żeby punkt A_i dla $n \in \{1, 2, \ldots, 2n$ był środkiem odcinka B_iB_{i+1}, a punkt A_{2n+1} - środkiem odcinka $B_{2n+1}B_1$.

Niewątpliwą zaletą sformułowania zadania *poszukać uogólnień tego zadania* jest zaproponowanie uczniom pracy bardziej twórczej niż tradycyjne rozwiązywanie zadań. Wadą pozostaje jednakże problem oceniania uogólnień wymyślonych przez uczniów, gdzie w grę może wchodzić subiektywne odczucie oceniającego (choć i tę trudność można zapewne przezwyciężyć).

Wydaje się jednak, że trochę lepszą propozycją zmiany jest pomysł przedstawiony poniżej, także oparty na zadaniach Olimpiady Matematycznej.
Propozycja polega na umieszczaniu w zestawach zadań II etapu zadań będących pewnymi wariacjami na temat zadań I etapu, nad którymi uczniowie mieli okazję popracować w domu.

Zadanie 12 z I etapu 29 OM miało treść następującą:

Wyznaczyć kres górny takich liczb $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, że każdy kąt ostry MON o mierze α i każdy trójkąt T na płaszczyźnie mają następującą własność: istnieje trójkąt ABC izometryczny z T taki, że bok AB jest równoległy do OM oraz proste prostopadłe do ON i przechodzące przez środki ciężkości trójkątów ABC oraz ABC' odpowiednio przecinają odcinek AB; C' jest obrazem symetrycznym wierzchołka C względem symetralnej boku AB.
Uwaga. Fizycznie zadanie oznacza: jaki ma być kąt nachylenia równi pochyłej, aby dla dowolnego trójkąta można było wybrać pewien bok tak, że trójkąt przyłożony tym bokiem do równi nie przewróci się?

Na II etapie 29 OM pojawiło się natomiast zadanie 5, które było naturalnym przedłużeniem problemu zawartego w zadaniu 12 z I etapu 29 OM.

Dowieść, że nie istnieje taka równia pochyła, że każdy czworościan dowolnie przyłożony pewną ścianą do równi nie przewróci się. Znaczy to, co następuje. Dana jest płaszczyzna π i prosta l nie prostopadła do niej. Dowieść, że istnieje taki czworościan T, że dla każdej jego ściany S istnieje w płaszczyźnie π trójkąt ABC przystający do S oraz istnieje taki punkt D, że czworościan $ABCD$ przystaje do T i prosta równoległa do l przechodząca przez środek ciężkości czworościanu $ABCD$ nie przecina trójkąta ABC.

Podobna sytuacja miała miejsce w trakcie 57 OM.
Oto zadanie 4 z I etapu 57 OM:

Uczestnicy zawodów matematycznych rozwiązywali sześć zadań, każde oceniane jedną z ocen 6, 5, 2, 0. Okazało się, że dla każdej pary uczestników A, B można wskazać takie dwa

zadania, że w każdym z nich A uzyskał inna ocenę niż B. Wyznaczyć największą liczbę uczestników, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Zadanie 6 z II etapu 57 OM było naturalną kontynuacją zadania 4 z I etapu 57 OM:

Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita n, przy czym $p \geq n \geq 3$. Zbiór A składa się z n-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, ..., p-1\}$ i ma następującą własność: dla dowolnych dwóch ciągów $(x_1, x_2, ..., x_n)$ oraz $(y_1, y_2, ..., y_n)$ ze zbioru A istnieją takie różne liczby k, l, m, że

$$x_k \neq y_k, x_l \neq y_l, x_m \neq y_m.$$

Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru A.

Obydwa przykłady charakteryzują się tym, że uczeń, który rozwiązał zadanie z I etapu, dobrze zrozumiał istotę swojego rozwiązania, zastanowił się nad uogólnieniami, wymyślił lub znalazł w literaturze techniki rozwiązywania podobnych zadań, zdecydowanie łatwiej poradzi sobie z zadaniem z II etapu, które jest przedłużeniem lub uogólnieniem zadania z etapu pierwszego. Zadania z etapu pierwszego będą wówczas pewnego rodzaju wskazówką, z jakimi zagadnieniami warto się zapoznać.

Podobną rolę (zbioru wskazówek, na co szczególnie warto zwrócić uwagę) odgrywają sprawozdania z olimpiad dostępne dla uczniów i nauczycieli w postaci broszur wydawanych przez Komitet Główny Olimpiady Matematycznej oraz plików pdf (od 46 do 60 OM) zamieszczanych na stronie Olimpiady Matematycznej: www.om.edu.pl. Jednakże zakres tematyczny zadań (a także duża liczba występujących w nich metod rozwiązywania) jest zbyt obszerny dla ucznia, który samodzielnie przygotowuje się do startu w olimpiadzie.

Krzysztof Ciesielski w artykule *Reminiscencje olimpijskie* ([25]) opisuje pewna historię z 27 OM:

Wybrałem się na tradycyjną "herbatkę olimpijską" po zakończeniu zawodów II stopnia. Jedno z zadań brzmiało:
Na płaszczyźnie umieszczono 6 punktów w ten sposób, że każde 3 spośród nich są wierzchołkami trójkąta o bokach różnej długości. Udowodnić, że najkrótszy bok pewnego z tych trójkątów jest zarazem najdłuższym bokiem innego z nich.
Gdy prezentowano rozwiązania, przedstawiciel Komitetu Głównego powiedział, że to zadanie zostało pomyślane jako pewnego rodzaju kontynuacja zadania sprzed 10 lat:
Na płaszczyźnie wybrano 6 punktów, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej i wykreślono wszystkie odcinki łączące parami te punkty. Niektóre z odcinków wykreślono kolorem czerwonym, a inne niebieskim. Dowieść, że któreś trzy z danych punktów są wierzchołkami trójkąta o bokach tego samego koloru.

Zaproponowany model tworzenia zadań na OM będzie zbliżał olimpiadę do Konkursu Prac Uczniowskich miesięcznika *Delta* ze wszystkimi tego pozytywnymi konsekwencjami: olimpiada da uczniom pewną namiastkę tego, czego doświadczają twórczy matematycy stawiający i rozwiązujący problemy.
Bardzo dobrym przykładem, jak wielki wpływ na uczniów może mieć ten model podejścia do matematyki, jest przykład mojego ucznia Marcina Pitery. Na Konkursie Prac Uczniowskich w 2004 roku za pracę *Niezmienniki w geometrii* zdobył I miejsce, a w 2005 za pracę *Niezmienniki na szachownicy* - miejsce III. Inspiracją do powstania obu prac były zadania z OM, które Marcin postanowił uogólnić. Zwraca uwagę także fakt, że dopiero w 2005 roku został finalistą OM.

Wykorzystując swoją wiedzę, zdobytą w czasie pisania obydwu prac, postanowił napisać książkę *Kolorowe kwadraty* ([102]), w której znajdują się znamienne słowa:

Chciałbym niezmiernie podziękować oraz wyrazić podziw dla ludzi, którzy tworzą Olimpiadę Matematyczną. Bezinteresowana pomoc młodym zdolnym ludziom w zdobywaniu wiedzy, praktycznie bez wynagrodzenia, jest czymś godnym pochwały.

W 2009 roku na Konkursie Prac Uczniowskich organizowanym przez Towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk w Krakowie mój uczeń, Michał Zając z Gimnazjum nr 2 z Brzeska, przedstawił pracę, w której uogólnił zadanie 4 z II etapu 59 OM. Oto treść tego zadania:

W każdym polu kwadratowej tablicy o rozmiarach $n \times n$ napisana jest liczba całkowita. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: Wybieramy dowolne pole tabeli i zmniejszamy wpisaną weń liczbę o liczbę pól sąsiednich (mających wspólny bok z wybranym polem), zaś każdą z liczb wpisanych w pola sąsiednie zwiększamy o 1. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy z dowolnej początkowej tabeli, w której suma wszystkich n^2 liczb jest równa zeru, można otrzymać tabelę składającą się z samych zer.

Rozwiązanie firmowe opierało się na obserwacji, że suma liczb na przekątnej jest zawsze stałej parzystości. Zatem umieszczenie 1 na jednym polu przekątnej, -1 na jednym polu, które nie należy do przekątnej i zer na pozostałych polach powoduje, że na przekątnej nigdy nie można uzyskać samych zer. Zatem nie istnieje liczba całkowita $n \geq 2$, dla której odpowiedź jest pozytywna.

Michał Zając przedstawił rozwiązanie problemu ogólniejszego: rozstrzygnął negatywnie taki sam problem dla tablicy prostokątnej o wymiarach $n \times m$, gdzie $m, n \geq 2$. W rozwiązaniu nie można było wykorzystać pomysłu z zadania 4.2.59, zatem Michał znalazł rozwiązanie oparte na wykorzystaniu przepływów w grafach (więcej na temat tego pomysłu można znaleźć w pracy [9]). Uogólnienie zadania z 59 OM wymusiło znalezienie nowej metody jego rozwiązania.

Reasumując: propozycja zmiany polega na tym, aby na drugim etapie pojawiały się zadania, które są uogólnieniami zadań z etapu pierwszego. Takie ukierunkowanie uczniów na poszukiwanie uogólnień może dać znacznie lepsze efekty niż w przypadku zadań na *Muirheada, na inwersję* itp.

6.6.2 Rozwiązania eleganckie

W artykule zamieszczonym w [94] Stefan Straszewicz pisał: *Na ocenie obok ilości zadań rozwiązanych może nieraz zaważyć również sposób rozwiązania.*
Może należałoby powrócić do tego założenia, które pojawiło się już w początkach istnienia olimpiady: nie tylko liczba rozwiązanych zadań czy suma punktów decyduje o przejściu do dalszych etapów OM.

Moje badania pokazały, że rozwiązania eleganckie i pomysłowe były charakterystyczne dla dwóch typów zawodników uczestniczących w Olimpiadzie Matematycznej: zajmujących najwyższe lokaty oraz takich, którzy nie awansowali do finału.
W przypadku zawodników najlepszych elegancja i pomysłowość rozwiązań wynikała z rozległej wiedzy oraz umiejętności głębokiego wejrzenia w własności obiektów występujących w zadaniu.
W przypadku uczniów, którzy nie awansowali do finału raczej chodziło właśnie o luki w wiedzy

uzupełnione pomysłowością.
Dlatego uważam, że uczniów prezentujących takie pomysłowe rozwiązania powinno się dołączać do grona finalistów z wykorzystaniem tzw. *dzikiej karty*. Umożliwi to docenienie uczniów o niezbyt dużej wiedzy, ale z niewątpliwym talentem matematycznym.

Michał Szurek w książce [131] pisze:
Dochodzimy do istotnego aspektu twórczości matematycznej: matematyka jest sztuką. Ma swoje kanony estetyki i poczucie dobrego smaku. To stwierdzenie wychodzi naprzeciw propozycji doceniania ładnych rozumowań prezentowanych przez uczniów.

Krzysztof Ciesielski w artykule [26] opisał przykład ucznia, który nie awansował do finału; brakło mu jednego punktu, który stracił za usterkę w jednym z zadań. Było to zadanie z II etapu 47 OM:

W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Wykazać, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF i FAB, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A, przecinają się w jednym punkcie.

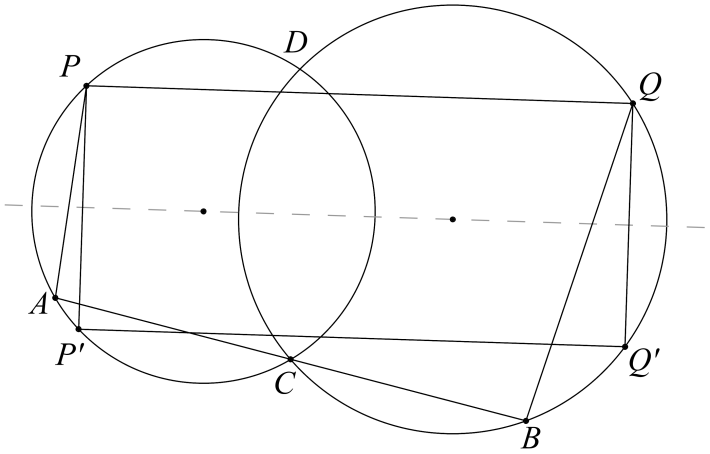
Zaproponowane przez większość uczestników rozwiązania opierały się na własnościach osi potęgowych trzech okręgów lub na twierdzeniu Carnota. Krzysztof Ciesielski pisał:

Natomiast inny sposób wręcz olśnił Komitet Okręgowy; nikt spośród nas nie spodziewał się, że można problem pokonać metodą tak ładną. Oto ona. Jeżeli $\measuredangle ABF + \measuredangle DBC > \measuredangle FBD$ (i analogicznie przy dwóch pozostałych kątach trójkąta BDF), wtedy rysunek czterech trójkątów jest ... siatką czworościanu o podstawie BDF. Szukany punkt przecięcia zaś to po prostu rzut wierzchołka. No dobrze, ale to przypadek łatwiejszy. Co zrobić, gdy $\measuredangle ABF + \measuredangle DBC < \measuredangle FBD$? Oznaczmy spodki badanych wysokości przez A^*, C^*, E^*. Na prostej AA^* obierzmy punkt A', a na prostej CC^* punkt C' tak, aby $A'B = BC'$ i $\measuredangle A, BF + \measuredangle DBC' > \measuredangle FBD$. Następnie weźmy punkty E' na prostej EE^* i A'' na prostej AA^* tak, aby $C'D = DE'$ i $E'F = FA''$. Jeżeli wykażemy, że $A' = A''$, to sześciokąt $A'BC'DE'F$ tworzy siatkę czworościanu i rzecz sprowadza się do pierwszego przypadku, bo badane proste się nie zmieniły... Ale wykazanie, że $A' = A''$ jest niezwykle łatwe.
Pomysł wyjścia w przestrzeń w zadaniu z geometrii płaszczyzny jest niestandardowy i bardzo oryginalny (odważny, jak powiedział jeden z najbardziej doświadczonych członków Komitetu Okręgowego). No i przyniósł przepiękny, krótki dowód.

Poniżej prezentuję przykłady takich bardzo pomysłowych rozwiązań, jakie pojawiły się w pracach uczestników 57 i 58 OM.
Wszystkie przykłady pochodzą od uczniów, którzy albo nie dostali się do finału, albo zostali laureatami.

Rozwiązanie zadania 5.2.57 zaproponowane przez ucznia WA80

Uczeń nie dostał się do finału.

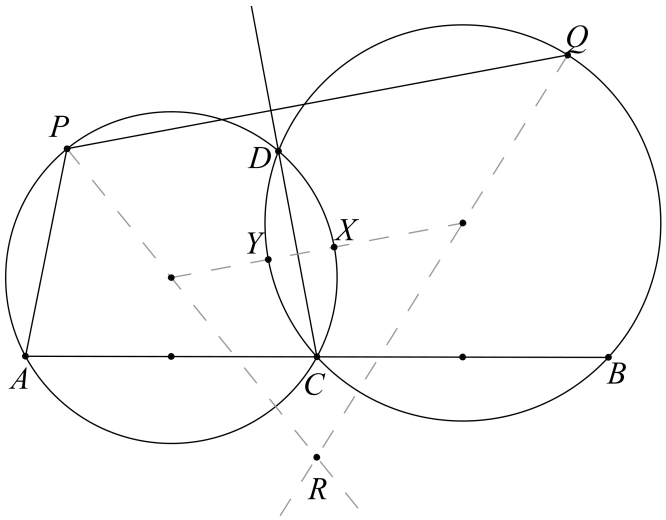


Niech O_1, O_2 będą odpowiednio środkami okręgów o_1, o_2. Poprowadźmy z punktów P oraz Q proste prostopadłe do prostej O_1O_2. Przetną one okręgi o_1 i o_2 kolejno w punktach P' oraz Q'. Zauważmy, że $\measuredangle PAC = \measuredangle PP'C$, bo leżą na tym samym łuku oraz $P'C = PD$, bo PP' jest prostopadła do O_1O_2 i zarazem równoległa do prostej CD. Skoro kąty PAC i $PP'C$ są równe oraz oba kąty zawierają ramię o tej samej długości (AP i $P'C$), to drugie ramię kąta musi być też tej samej długości. Zatem $PP' = AC$.
Analogicznie postępując z drugim okręgiem otrzymujemy kąt $CQ'Q$ wpisany w okrąg o_2 oraz $QQ' = AC = CB$.
Zatem czworokąt $PP'Q'Q$ jest prostokątem, którego boki PP' i QQ' są równoległe do prostej CD, a zatem odcinki PQ i $P'Q'$ są prostopadłe do prostej CD, co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania 5.2.57 zaproponowane przez ucznia KR04

Uczeń zajął 1 miejsce i zdobył złoty medal na MOM.

Oznaczenia: S_1, S_2 - środki okręgów o_1, o_2
H_1, H_2 - środki odcinków AC, BC
$X = o_2 \cap S_1S_2$, $Y = o_1 \cap S_1S_2$,
$R = PS_1 \cap QS_2$, $\measuredangle AS_1H_1 = \alpha = \measuredangle CS_1H_1$, $\measuredangle BS_2H_2 = \beta = \measuredangle CS_2H_2$, $R_1 = AS_1, R_2 = AS_2$.
P jest środkiem łuku APD, czyli $\measuredangle PS_1D = \frac{1}{2}\measuredangle AS_1D$



Y jest środkiem łuku CYD, czyli $\measuredangle YS_1D = \frac{1}{2}\measuredangle CS_1D$
Dodając stronami otrzymujemy: $\measuredangle PS_1Y = \frac{1}{2}\measuredangle AS_1C = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha$.
Analogicznie $\measuredangle QS_2X = 180^\circ - \beta$.
Wobec tego trójkąt RS_1S_2 *ma miary dwóch kątów wewnętrznych* α *i* β.
„Sklejając" trójkąty CH_1S_1 *i* CH_2S_2 *bokami* CH_1 *i* CH_2 *otrzymamy trójkąt o kątach* α *i* β, *a więc podobny do trójkąta* RS_1S_2.
Wobec tego:

$$\frac{PS_1}{QS_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{CS_1}{CS_2} = \frac{RS_1}{RS_2}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $PQ \parallel S_1S_2$. *Ale* CD *jest osią potęgową okręgów* o_1 *oraz* o_2, *a więc* $S_1S_2 \perp CD$, *z czego wynika teza.*

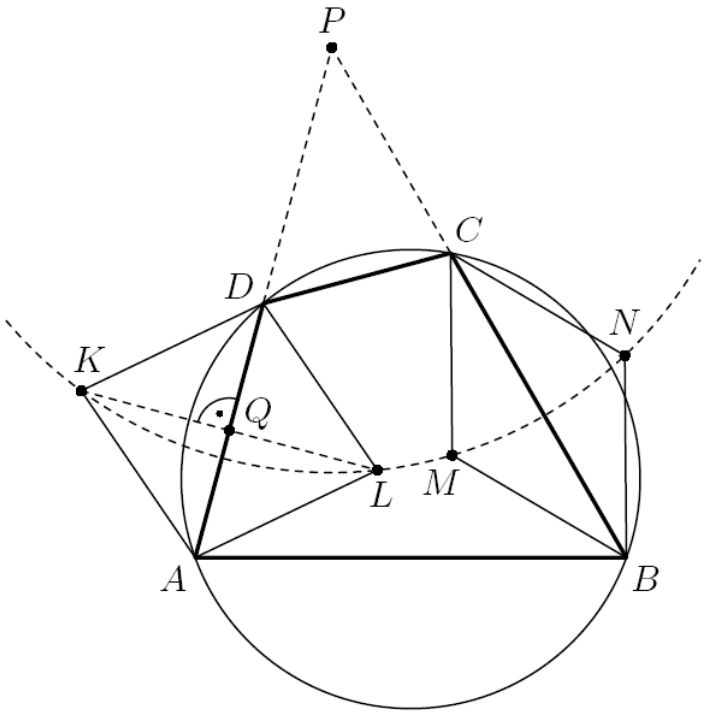
Treść zadania 5.2.58

Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBN$ są rombami o bokach długości a. Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie zadania 5.2.58 zaproponowane przez ucznia WA47

Uczeń nie awansował do finału.

Z własności rombu wiemy, że jego przekątne są prostopadłe oraz przecinają się w połowie długości.
Oznaczmy przez O_1 *okrąg opisany na czworokącie* $ABCD$. *Zauważmy, że prosta* AD *jest osią potęgową okręgów* O_1 *i* O_2 *(o środku w punkcie* K *i promieniu* a*). Ponadto ta prosta jest symetralną odcinka* KL. *Analogicznie prosta* BC *jest osią potęgową okręgów* O_1 *i* O_3 *(o środku w punkcie* M *i promieniu* a*). Zauważmy, że oś potęgowa okręgów* O_2 *i* O_3 *jest symetralną odcinka* KM. *Wynika to z faktu, że okręgi* O_2 *i* O_3 *mają równe promienie, a wtedy ich oś potęgowa to symetralna odcinka łączącego środki okręgów. Zatem symetralne odcinków* KL, KM *i* MN *przecinają się w jednym punkcie, gdyż osie potęgowe trzech okręgów przecinają się w jednym punkcie. Zatem na czworokącie* $KLMN$ *można opisać okrąg.*



Zaproponowane powyżej dwie propozycje zmian w sposobie układania zadań na OM należy traktować lokalnie i stosować z wyczuciem. Przede wszystkim mają na celu docenienie zawodników z dużym talentem, choć pozbawionych treningu olimpijskiego.

Obraz matematyki

Zofia Krygowska w pracy [72] pisze:

Uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań. Stosunek ucznia do matematyki i motywacje uczenia się tego przedmiotu w dużej mierze od tego zależą. Czym jest matematyka i czym może być ona dla niego, uczeń poznaje aktywnie właśnie rozwiązując odpowiednio dobrane matematyczne zadania. I bardzo łatwo jest go wprowadzić w błąd przez nieodpowiedni dobór tych zadań, zbyt trudnych lub zbyt łatwych, wymagających tylko stosowania schematów i algorytmów.

Z moich badań wynika, że wśród dużej części uczestników Olimpiady Matematycznej obraz matematyki jawi się jako zestaw zadań, do których trzeba dopasować odpowiednie algorytmy, twierdzenia, metody. Oczywiście pojawiają się zadania, które *nie idą* za pomocą typowych i mniej typowych metod, ale przeciętny olimpijczyk traktuje je jako *błąd w systemie*.
Wydaje się konieczne, aby pokazywać matematykę przez pryzmat twórczej pracy, jako żywą strukturę, która wyrasta z wiedzy, ale rozwija się poprzez tworzenie nowych problemów, podejmowanie prób ich rozwiązania, tworzenie nowych idei i metod.
Oczywiście, nie ma możliwości powrotu do sytuacji z początków OM, kiedy o sukcesie decydował przede wszystkim talent. Ambitni uczestnicy współczesnych edycji OM mają świadomość istnienia obszernej wiedzy *olimpijskiej*, którą trzeba posiąść, jeżeli pragnie się odnieść sukces. Od swojego powstania zmieniła się nie tylko Olimpiada Matematyczna, ale także Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Finał OM jest jednocześnie kwalifikacją do reprezentacji Polski na MOM. Współcześnie na MOM szanse na najwyższe miejsca mają przede wszystkim uczniowie poddani gruntownemu treningowi. Bardzo dobrze pokazuje to przykład zadania z

2007 roku z MOM. Oto jego treść:

Zadanie.
Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną. Przyjmijmy, że

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, ..., n\}, x + y + z > 0\}$$

jest zbiorem $(n+1)^3 - 1$ punktów w trójwymiarowej przestrzeni. Wyznacz najmniejszą możliwą liczbę płaszczyzn, których suma mnogościowa zawiera S, ale do której nie należy $(0, 0, 0)$.

Rozwiązanie

Weźmy k płaszczyzn:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$.....$$

$$a_kx + b_ky + c_kz = d_k.$$

gdzie $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$ dla $i \in \{1, ..., k\}$.
Określmy wielomian

$$P(x, y, z) = (x + y + z)\prod_{i=1}^{k}(a_ix + b_iy + c_iz - d_i).$$

Łatwo sprawdzić, że istnieją $t_1, t_2, t_3 \in \{0, 1, ..., n\}$, dla których $t_1 + t_2 + t_3 = k + 1$ i współczynnik przy $x^{t_1}y^{t_2}z^{t_3}$ jest różny od zera. Niech $S_1 = S_2 = S_3 = \{0, 1, ..., n\}$. Ponieważ $|S_1| > t_1$, $|S_2| > t_2$, $|S_3| > t_3$, więc na podstawie Combinatorial Nullstellensatz istnieje taki punkt $(a, b, c) \in \{0, 1, ..., n\}^3$, że $P(a, b, c) \neq 0$. Zatem otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $k \geq 3n$. Pozostaje podać przykład płaszczyzn spełniających warunek $k = 3n$.

□

Do rozwiązania zadania praktycznie niezbędna była metoda *Combinatorial Nullstellensatz*, którą opisał Noga Alon w pracy [3].

Twierdzenie 26. *Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem i $f \in \mathbb{F}[x_1, x_2, ..., x_n]$ będzie niezerowym wielomianem stopnia $\sum_{i=1}^{n} m_i$, w którym współczynnik przy $x_1^{m_1}...x_n^{m_n}$ jest różny od zera. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów $S_1, ..., S_n \subset \mathbb{F}$ takich, że $|S_i| > m_i$, gdzie $1 \leq i \leq n$, istnieją $c_i \in S_i$ takie, że $f(c_1, ..., c_n) \neq 0$.*

Zadanie rozwiązało tylko czterech zawodników: Konstantin Matwiejew z Rosji, Peter Scholze z Niemiec, Danylo Radczenko z Ukrainy i Pietro Verteci z Włoch. W zasadzie tylko znajomość tej techniki umożliwiała natychmiastowe rozwiązanie zadania. [7]

[7] Zadania z IMO nie tylko są inspirowane przez współczesne wyniki, ale także bywają inspiracją do badań naukowych np. [50].

W numerze 145 (1/1986) miesięcznika *Delta* pojawiła się krótka notka od redakcji:

W ubiegłorocznej (XXVI) Olimpiadzie Międzynarodowej miażdżący sukces odnieśli zespołowo Rumuni. Indywidualnie komplet punktów zdobył Rumun i Węgier. Dopiero po pewnym odstępie pozostałe zespoły (w tym na „nastym" miejscu Polacy).Taki układ sił nikogo jednak nie zdziwił. Raz, że od kilku lat układ sił jest podobny. Dwa, że wiadomo dlaczego.
W Rumunii i na Węgrzech reprezentację olimpijską trenuje się długo i intensywnie. Nasi zaś zawodnicy to właściwie kompletni amatorzy. Całe przygotowanie reprezentacji to kilkunastodniowe zgrupowanie.
Na czym polega jednak trening? Chyba nie tylko na rozwiązywaniu zadań? Oczywiście rozwiązuje się zadania. Głównym jednak tematem treningu jest wyposażenie zawodników w zestaw „wytrychów" - elementarnych (mniej lub bardziej - ale tzw. szkolnych) twierdzeń „załatwiających" wiele technicznych kłopotów przy rozwiązywaniu zadań. I oczywiście wyćwiczenie rozpoznawania sytuacji, w których ten czy inny „wytrych" daje się zastosować.

Obecnie pogląd ten nie stracił na aktualności. Oprócz specjalnych programów treningowych w wielu krajach opracowywane są pozycje dla uczestników IMO. Dla reprezentacji USA na IMO został przygotowany zestaw książek (np. [4], [5], [6], [7]), których jednym ze współautorów jest Titu Andreescu, a dla reprezentacji Niemiec książka *Problem-Solving Strategies* napisana przez Arthura Engela. Ta ostatnia pozycja była efektem przygotowań do 14-dniowego obozu treningowego dla uczestników IMO z Niemiec.
W Polsce od kilku lat raz w roku odbywa się kilkunastodniowy obóz w Zwardoniu, który pełni rolę obozu przygotowawczego dla uczniów startujących w międzynarodowych zawodach matematycznych (także IMO). Efektem tych obozów są prezentujące rozwiązywane problemy broszury, które nie zostały opublikowane w formie książkowej, ale są dostępne na stronie Olimpiady Matematycznej.

Wniosek końcowy musi być taki: zawodnicy na najwyższym poziomie muszą być poddani specjalnemu treningowi, o ile chcą uzyskiwać wyniki na światowym poziomie. I nieodparte wrażenie jest takie, że właśnie przez pryzmat tego specyficznego treningu, opartego często na osiągnięciach współczesnych matematyków, pokazujemy uczniom (a może powinniśmy pokazywać) obraz matematyki.

6.7 Rola wiodących szkół w Olimpiadzie Matematycznej

Olimpiada Matematyczna nie pełni już tylko roli narzędzia do znajdowania uczniów uzdolnionych matematycznie. Taką rolę spełnia jeszcze Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów, choć widoczny jest już wpływ gimnazjów, które stawiają sobie za cel przygotowywanie do startu w zawodach i olimpiadach matematycznych. Gimnazja te najczęściej powiązane są z liceami (czasami jest to współpraca niezależnych instytucji, a czasami gimnazjum i liceum tworzą zespół szkół), które dominują w OM np. Gimnazjum nr 16 w Szczecinie współpracujące z XIII LO, Gimnazjum nr 24 w Gdyni - z III LO, Gimnazjum nr 46 we Wrocławiu - z XIV LO, Gimnazjum nr 50 w Bydgoszczy - z VI LO, Gimnazjum ss Prezentek w Rzeszowie - z LO ss Prezentek, Gimnazjum Akademickie w Toruniu - z Liceum Akademickim, Gimnazjum nr 13 w Warszawie - z XIV LO, Gimnazjum 49 we Wrocławiu - z XIV LO. Trzeba zaznaczyć, że zjawisko to nie występuje jeszcze w takiej skali, jak w przypadku szkół średnich.

Zdolni uczniowie są wyłapywani przez najlepsze szkoły średnie i poddawani treningowi. Zaskakujący może być zasięg tego zjawiska. W zadaniach o nierównościach praktycznie nie ma mowy o sukcesie bez specjalistycznego treningu. W zadaniach geometrycznych prowadzą z olbrzymią przewagą uczniowie z XIV LO w Warszawie. Wystawia to jak najlepsze świadectwo

renomowanym szkołom, w szczególności XIV LO w Warszawie, ale z drugiej strony daje wyraźny sygnał, że wyżyny olimpijskie są tylko dla specjalnie przygotowanych członków stajni. W tym sensie OM nie pełni dawnej roli wyławiacza talentów. Obserwacja ta nie jest zaskakująca, ale w prezentowanej rozprawie pokazuję obraz liczbowy tego zjawiska i konstatuję, że jego skala jest znacznie większa, niż może się wydawać bez szczegółowej analizy.

W ostatnich latach ustaliła się lista szkół, z których uczniowie regularnie (i w znaczących ilościach) pojawiają się w finale OM oraz zajmują najwyższe lokaty i zdobywają medale na IMO.
Na czele tej listy jest oczywiście XIV LO w Warszawie. Nieco mniejsze sukcesy odnotowują uczniowie V LO w Krakowie. Jednak to te dwie szkoły są zdecydowanymi liderami OM.
W grupie szkół średnich można wymienić jeszcze: XIII LO w Szczecinie, XIV LO we Wrocławiu, III LO w Gdyni, IV LO w Toruniu oraz III LO we Wrocławiu. Dwie ostatnie szkoły zanotowały w tym roku porażkę: z żadnej z nich do finału nie dostał się żaden uczeń.
Z kolei od kilku lat systematycznie pojawia się także V LO w Bielsku-Białej.

Spróbuję krótko opisać warunki powstawania takich mocnych szkół *olimpijskich*. Da to jednocześnie wyobrażenie, dlaczego w silnych ośrodkach akademickich (np. Łódź, Poznań, Katowice) nie pojawiły się szkoły tego typu.

Warunki sprzyjające powstaniu *stajni olimpijskich*.

1. formalna lub nieformalna współpraca z pracownikami wyższych uczelni,
2. silne związki z jednym, wybranym gimnazjum (w niektórych sytuacjach jest to nawet jeden zespół szkół), w którym uczniowie poddawani są treningowi olimpijskiemu (często przez nauczycieli z tychże stajni),
3. obecność w szkole co najmniej jednego nauczyciela pasjonującego się pracą z uczniem zdolnym (bardzo często odejście z pracy takiego nauczyciela powoduje gwałtowny spadek liczby uczestników OM w szkole),
4. osobny sposób naboru do klas z poszerzonym programem nauczania matematyki,
5. program nauczania matematyki znacznie odbiegający od powszechnie obowiązujących programów,
6. indywidualne programy nauczania dla najwybitniejszych uczniów, organizacja warsztatów i obozów matematycznych (które często prowadzą dawni olimpijczycy, będący absolwentami tych szkół).

Na przykładzie prac uczniów XIV LO w Warszawie można dostrzec pozytywne efekty treningu: uczniowie sprawnie posługują się typowymi strategiami rozwiązywania zadań, umiejętnie korzystają ze strategii szczegółowych, charakterystycznych dla określonego typu zadań, wykazują się dobrą znajomością twierdzeń i metod. I wreszcie widoczna jest duża skuteczność w rozwiązywaniu zadań olimpijskich - znacznie większa niż w przypadku uczniów z innych szkół; dotyczy to zwłaszcza zadań z geometrii płaskiej.

Nie można wspomnieć o wadach kształcenia w klasach matematycznych renomowanych szkół. O jednej pisał Michał Krych ([71]): realizacja bardzo zaawansowanego programu nauczania matematyki może się udać tylko w małej i odpowiednio dobranej grupie uczniów. Zdarza się, że osoby, które trafiają do takiej klasy, nie wytrzymują tempa i wymagań.

Ponadto istnienie dominującej szkoły w danym województwie powoduje, że zdecydowana większość uczniów o aspiracjach olimpijskich trafia właśnie do niej. Uczniowie poddani specjalnemu treningowi olimpijskiemu mają większe szanse na awans do finału, niż inni uczniowie o podobnym (lub wyższym) poziomie uzdolnień, którzy jednak nie mieli specjalnej opieki merytorycznej.

Roli *stajni olimpijskich* nie można zatem oceniać jednoznacznie, ale moje badania pokazują, że przeważają pozytywne strony ich działalności.

W tym miejscu warto wskazać, jakie rozwiązania dotyczące kształcenia uczniów uzdolnionych matematycznie są stosowane w innych krajach.

W artykule [143] autorzy opisują chińską drogę pracy z utalentowaną młodzieżą (badania przeprowadzone na 35 olimpijczykach). Zwracają uwagę, że uczniowie uczęszczali do najlepszych szkół ze specjalnie selekcjonowanymi klasami. Kluczem do sukcesu okazały specjalne zespoły, które składały się z wybitnych nauczycieli matematyki oraz pracowników naukowych. Większość olimpijczyków wskazywała na to, że olimpiada pomogła im w odkryciu i docenieniu własnego talentu matematycznego.
W badaniach zwrócono uwagę na wiek, w którym został odkryty talent olimpijczyków: u 18% w wieku 0-6 lat, u 35% w wieku 7-11, a u 41% w wieku 12-15.

James Reed Campbell ([20], [21]) wskazuje na istotna rolę olimpiady w wyszukiwaniu talentów (76% badanych przez niego olimpijczyków twierdziło, że OM im pomogła w odkryciu talentu).
Zauważa, że dzieci utalentowane powinny być wyszukane jak najwcześniej. W USA 43% olimpijczyków uczęszczało w szkole podstawowej do specjalnych klas dla uzdolnionych, w gimnazjum - 56%, a w liceum - 57% (badanie przeprowadził na 133 uczniach).
Wielu olimpijczyków mówiło, że sami uczyli się z książek i wskazywali książki konkretnych autorów (Gardner, Davis).

Tomomi Hirano ([56]) podaje, że w Japonii długo nie istniało specjalne kształcenie utalentowanych uczniów. Wszyscy uczniowie mają edukację matematyczną na najwyższym poziomie, gdyż to wyrasta z ogólnej koncepcji jednakowej edukacji dla wszystkich. Japońska edukacja odchodzi jednak od powszechnej równości na rzecz obserwacji talentów pojedynczych uczniów.

Borys Kukushkin ([76]) pisze o specjalnym systemie edukacji dla utalentowanych w Rosji: specjalne badawcze grupy uczniów uzdolnionych matematycznie były organizowane przez wybitnych matematyków już w latach trzydziestych XX wieku (jako przykład podaje Schnirelmana i Kołmogorowa, którzy kierowali pracą dwóch takich grup). Szklarskij postanowił zmienić tryb pracy na formułę: wykład i ćwiczenia (czyli formuła kółka). Metoda Szklarskiego okazała doskonała, o czym świadczył sukces jego podopiecznych w 1938.
W Moskwie pod egidą uczelni wyższych funkcjonują dwie szkoły matematyczne, w których zajęcia prowadzą pracownicy wyższych uczelni. W szkołach tych uczy się ponad trzystu uczniów, a w każdym tygodniu mają po 10-12 godzin matematyki.

Czego uczono w takich szkołach? Władimir Arnold ([8]) pisał:

W latach sześćdziesiątych uczyłem w Moskwie młodzież szkolną teorii grup. Unikając całej tej aksjomatyzacji i trzymając się fizyki tak blisko, jak to tylko było możliwe, w ciągu pół roku doszedłem do twierdzenia Abela o nierozwiązywalności ogólnego równania piątego stopnia za pomocą pierwiastników (po drodze ucząc o liczbach zespolonych, powierzchniach Riemanna, grupach podstawowych i grupach monodromii funkcji algebraicznych).

6.8 Dane statystyczne dla zadań 57 i 58 OM

W tym podrozdziale znajdą się wnioski, jakie wyciągnąłem z danych statystycznych przedstawionych w rozdziale 6.

Współczynnik trudności

Zadanie 3.2.57 na dowodzenie nierówności okazało się najłatwiejsze z całego II etapu 57 OM - współczynnik trudności wyniósł 0,65, co oznacza, że nawet ono zostało rozwiązane zaledwie przez niecałe 35% uczniów (194 osoby). Z kolei wśród najtrudniejszych zadań tego etapu znalazły się obydwa zadania z geometrii płaskiej: 2.2.57 i 5.2.57 o współczynnikach trudności, odpowiednio, 0,96 i 0,91; rozwiązało je, odpowiednio, 24 i 49 uczniów.
Zadanie 6.2.58 na dowodzenie nierówności okazało się najtrudniejszym zadaniem II etapu 58 OM - współczynnik trudności wyniósł 0,97, co oznacza, że zostało rozwiązane przez 18 zawodników. Zadania z geometrii płaskiej 2.2.58 i 5.2.58 był zadaniami o średniej trudności - współczynniki trudności wyniosły, odpowiednio, 0,71 i 0,69. Najłatwiejszymi zadaniami tego etapu były zadania 1.2.58 i 4.2.58, które opierały się na typowych rozumowaniach. Ponadto były zadaniami pierwszymi każdego dnia, a wiadomo, że wielu olimpijczyków w pierwszej kolejności próbuje rozwiązywać właśnie takie zadania.

statystyka	zad. 1.2	zad. 2.2	zad. 3.2	zad. 4.2	zad. 5.2	zad. 6.2
57 OM	0,76	0,96	0,65	0,78	0,91	0,96
58 OM	0,42	0,71	0,83	0,43	0,69	0,97

Tabela 124: **Współczynnik trudności zadań drugich etapów 57 i 58 OM.**

Najtrudniejszymi zadaniami III etapu 57 OM okazały się zadania geometryczne: 3.3.57 z geometrii płaskiej i 5.3.57 z geometrii przestrzennej (współczynniki trudności wyniosły, odpowiednio, 0,92 i 0,96).
Najłatwiejsze było zadanie kombinatoryczne 4.3.57, opierające się na klasycznej metodzie niezmienników.
Zadanie 2.3.57 miało średni współczynnik trudności (0,78), ale charakterystyczna była duża liczba prac ocenionych na 2 punkty.

Zadania 1.3.58 (z geometrii płaskiej) i 2.3.58 (teorioliczbowe) okazały się najłatwiejsze w III etapie 58 OM; współczynniki trudności wyniosły, odpowiednio, 0,58 i 0,52. Zadanie z geometrii płaskiej opierało się na wykorzystaniu klasycznego twierdzenia o siecznych okręgu. Z kolei najtrudniejsze okazało się zadanie z geometrii przestrzennej 5.3.58, które rozwiązało czterech zawodników. Zadanie z nierównością (6.3.58) miało średni współczynnik trudności: 0,77.

statystyka	zad. 1.3	zad. 2.3	zad. 3.3	zad. 4.3	zad. 5.3	zad. 6.3
57 OM	0,67	0,78	0,93	0,48	0,96	0,75
58 OM	0,58	0,52	0,82	0,74	0,98	0,77

Tabela 125: **Współczynnik trudności zadań trzecich etapów 57 i 58 OM.**

Korelacje

Umiarkowana korelacja występuje między zadaniami geometrycznymi (2.2.57 i 5.2.57), zadaniami 1.2.57 i 4.2.57 (były to pierwsze zadania w kolejnych dniach) oraz zadaniami 3.2.57 i 4.2.57. W przypadku pozostałych zadań korelacja jest niska.

Trudno dopatrzeć się istotnej korelacji między wynikami zadań z II i III etapu 57 OM. Wynika to zapewne stąd, że rozwiązanie zadań określonego typu zależy od jednostkowego pomysłu. Widoczna jest tylko pewna korelacja między zadaniem 6.2.57 i zadaniami 2.3.57 oraz 4.3.57, która może wynikać z typu tych zadań: wszystkie lokują się na pograniczu rozważań kombinatorycznych i teorioliczbowych.

Korelacja umiarkowana występuje miedzy zadaniami 3.3.57 i 5.3.57 (jedno z zadań jest planimetryczne, a drugie stereometryczne). W przypadku pozostałych zadań III etapu 57 OM korelacja jest niska lub nie ma korelacji.

Ze względu na małą liczbę poprawnych rozwiązań zadania 6.2.58 współczynniki korelacji między jego wynikami a wynikami innych zadań II etapu są bardzo niskie.
Pewną, choć nieznaczną, korelację można było zaobserwować między zadaniami geometrycznymi 2.2.58 i 5.2.58 oraz zadaniami 1.2.58 i 4.2.58, co wynika zapewne z tego, że oba zadania były zadaniami pierwszymi w kolejnych dniach.

Między zadaniami II i III etapu 58 OM nie ma w zasadzie korelacji, poza nieznaczną korelacją między zadaniem kombinatorycznym 3.2.58 i zadaniem geometrycznym 1.3.58, choć zapewne wynika to z faktu, że były to najłatwiejsze zadania II i III etapu 58 OM.

Korelacja dla zadań finału 58 OM jest niska lub jej nie ma.
Pewną, choć nieznaczną korelację, można dostrzec między zadaniami niegeoemtrycznymi 2.3.58, 3.3.58 i 4.3.58.

Niskie korelacje między zadaniami tego samego etapu oraz tej samej olimpiady wynikają zapewne z dużej trudności zadań OM. Ponadto rozwiązanie zadania olimpijskiego zależne jest od jednostkowego pomysłu. Zatem przy jednym zadaniu taki pomysł może zawodnikowi przyjść do głowy, w innym - nie. W istocie każdy etap składa się z różnych konkurencji - w jednej można być lepszym, w innej gorszym.
Zatem obserwując wyniki zadań olimpijskich danego etapu, oczekiwać należy niskich korelacji lub ich braku.

Moc różnicująca

W klasycznym pomiarze dydaktycznym przyjmuje się, że zadanie dobrze różnicuje, gdy jego moc różnicująca jest nie mniejsza niż niż 0,6.

Zadanie 6.2.58 miało małą moc różnicującą, co wynikało z dużej jego trudności (0,96).
Zadania 2.2.57, 5.2.57 i 6.2.57 miały umiarkowaną moc różnicującą (te zadania także charakteryzowały się dużym współczynnikiem trudności - powyżej 0,9).
Pozostałe zadania II etapów dobrze różnicowały.

zadanie	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
57 OM	0,72	0,49	0,69	0,71	0,55	0,45
58 OM	0,67	0,60	0,60	0,64	0,64	0,32

Tabela 126: **Moc różnicująca zadań II etapu 57 i 58 OM.**

Zadania 5.3.57 i 5.3.58 z geometrii przestrzennej miały małą moc różnicującą, przy czym oba zadania były najtrudniejszymi zadaniami III etapów (współczynnik trudności odpowiednio 0,96 i 0,98). Wówczas różnicowanie nie dotyczy całej populacji, ale ma istotne znaczenie dla ustalenia kolejności na najwyższych miejscach w rankingu.
Zadania 1.3.57, 4.3.57 i 5.3.57 z III etapu 57 OM oraz 2.3.58 i 4.3.58 dobrze różnicowały.

zadanie	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
57 OM	0,66	0,54	0,41	0,64	0,31	0,62
58 OM	0,56	0,65	0,57	0,70	0,27	0,41

Tabela 127: **Moc różnicująca zadań III etapu 57 i 58 OM.**

Widoczny jest silny związek między trudnością i mocą różnicującą zadania: im wyższy współczynnik trudności tym mniejsza moc różnicująca. Zatem analiza samej mocy różnicującej nie wystarcza, co także zauważa B. Niemierko ([89]):

Tylko zadania trudne i bardzo trudne mogą dobrze różnicować uczniów. Zadania łatwe i bardzo łatwe mają niskie wskaźniki korelacyjne. Wskutek tej zależności musimy interpretować wartość wskaźników mocy różnicującej łącznie ze wskaźnikami trudności zadania.

Jednakże dla zadań Olimpiady Matematycznej za zadania bardzo łatwe i łatwe uczniowie uważają zadania o współczynniku trudności z przedziału $(0,4; 0,6)$ (podczas gdy w dydaktyce przyjmuje się, że ten współczynnik dla tego typu zadań należy do przedziału $(0; 0,3)$ [88]).
Natomiast zadania bardzo trudne na OM różnicują dobrze w tym sensie, że umożliwiają wyłonienie laureatów najwyższych miejsc, chociaż słabo różnicują cała populację.

Selektywność

96% finalistów 57 OM rozwiązało zadanie 2.2.57, 87% - zadanie 5.2.57, 82% - zadanie 6.2.57. W przypadku zadań 1.2.57 i 4.2.57 współczynnik ten osiąga wartość w okolicach 70%, natomiast dla zadania 3.2.57 jest zdecydowanie najniższy i wynosi 54%.
Zadania 1.2.57, 3.2.57 oraz 4.2.57 dobrze selekcjonowały, zadanie 5.2.57 - słabo, natomiast zadania 2.2.57 oraz 6.2.57 nie odgrywały większej roli (według [52]). Jednakże w przypadku tych zadań widoczny jest charakterystyczny fakt: w zdecydowanej większości zawodnicy, którzy rozwiązali zadanie, awansowali do finału.

89% finalistów 58 OM rozwiązało zadanie 6.2.58, 69% - zadanie 3.2.58. W przypadkach zadań 2.2.58 i 5.2.58 współczynnik ten osiągnął wartość ok. 56%, natomiast dla zadań 1.2.58 i 4.2.58 - ok. 35%.

Zadanie 2.2.58, 3.2.58 oraz 5.2.58 dobrze selekcjonowały do finału, a zadania 1.2.58 i 4.2.58 - nieco gorzej. Zadanie 6.2.58 przy selekcji nie odgrywało większej roli, gdyż było zadaniem bardzo trudnym.

Sposoby rozwiązywania zadań

Z mojej analizy wynika bardzo interesująca obserwacja, że zadania trudne (z wysokim współczynnikiem trudności) charakteryzują się dużym stosunkiem liczby sposobów rozwiązania do liczby poprawnych rozwiązań.
Stefan Straszewicz, przewodniczący Komitetu Głównego 1. Olimpiady Matematycznej przedstawił w [94] opis konstrukcji zestawów zadań na poszczególne etapy zawodów.

Osiągnięcie zamierzonych przez Olimpiadę celów zależy w znacznej mierze od właściwego doboru zadań tak ze względu na stopień ich trudności, jak na walory kształcące. (...) Bardzo pożądane są zadania, które można rozwiązać przy użyciu różnych metod, co daje pole inwencji uczniów.

Przyjrzyjmy się zatem, jak, w świetle tego argumentu, przedstawiają się analizowane zadania z 57 i 58 OM.

Zadanie	s	o	p	$\frac{s}{p}$	$\frac{o}{p}$	$\frac{x}{y}$	q	r
3.2.57	7	125	194	0,04	0,64	0,26	0,65	0,69
6.2.58	2	17	18	0,11	0,94	0,83	0,97	0,32
6.3.58	2	30	34	0,06	0,88	0,13	0,77	0,41
2.2.57	14	1	24	0,58	0,04	0,68	0,96	0,49
5.2.57	16	3	49	0,33	0,06	0,76	0,91	0,55
3.3.57	4	1	9	0,44	0,11	0,74	0,93	0,41
5.2.58	4	135	177	0,02	0,76	0,45	0,69	0,64
1.3.58	4	6	63	0,06	0,10	0,12	0,58	0,56
5.3.57	2	4	5	0,4	0,8	0,83	0,96	0,31
5.3.58	1	4	4	0,25	1	0,71	0,98	0,27

Tabela 128: **Porównanie trudności zadań i liczby sposobów rozwiązań oraz samooceny uczniów**

Opis oznaczeń użytych w tabeli 128

s - liczba sposobów rozwiązań,
o - liczba prac z firmowym rozwiązaniem,
p - liczba poprawnych rozwiązań,
x - liczba zawodników, którzy nie rozwiązali zadania, ale byli przekonani, że je rozwiązali,
y - liczba zawodników, którzy twierdzili, że rozwiązali zadanie,
q - współczynnik trudności,
r - moc różnicująca zadania.

Tabela 128 dostarcza danych do następujących wniosków:
1) im trudniejsze zadanie, tym większy stosunek liczby sposobów rozwiązań do liczby poprawnych rozwiązań,
2) liczba rozwiązań firmowych nie zależy bezpośrednio od trudności zadania, lecz od tego, czy rozwiązanie firmowe opierało się na strategii regularnej drogi,
3) obserwacja oczywista - im trudniejsze zadanie, tym gorsza samoocena uczniów.
W zadaniach z niskim współczynnikiem trudności liczba sposobów rozwiązań była mała, gdyż dało się w nich dostrzec prostą drogę wiodącą do celu. W zadaniach trudnych uczniowie nie widzieli jasno drogi rozwiązania i często błądzili po omacku.

6.9 Propozycja materiału dla nauczycieli

Dominującą strategią, z jakiej korzystali uczniowie (niezależnie od działu, z jakiego było zadanie), było sprowadzanie rozwiązania do zastosowania jednej metody *olmpijskiej* lub jednego twierdzenia *olimpijskiego*.
Potrzebna jest mentalna zmiana w podejściu zarówno nauczycieli, jak i uczniów: należy zmienić sposoby kształcenia uczniów utalentowanych matematycznie i biorących udział w Olimpiadzie Matematycznej.
Główny nacisk nie powinien być kładziony na uczenie stosowania typowych *wytrychów olimpijskich* (twierdzeń, metod), gdyż to prowadzi do prób sprowadzania rozwiązywania zadań do odtwórczego i automatycznego stosowania tychże metod i algorytmizacji procesu rozwiązywania zadań olimpijskich, ale skupić się na kształceniu umiejętności stosowania strategii ogólnych, a w dalszej kolejności strategii szczegółowych. Zwłaszcza, że rzecz nie jest w skuteczności stosowania przez uczniów takich *wytrychów*, ale w tym, że głównym celem OM jest wyławianie talentów i kształtowanie przyszłych matematyków. Niedostatki w kształceniu u uczniów twórczego podejścia do rozwiązywania zadań i problemów mogą mieć niepokojące konsekwencje.

W tej sytuacji autor pracy postanowił przedstawić propozycje scenariuszy zajęć, w których kluczowym jest kształcenie u uczniów umiejętności stosowania strategii ogólnych.

Bardzo często uczniowie wyrażają opinię, że do rozwiązywania zadań olimpijskich niezbędna jest znajomość wielu skomplikowanych metod, zaawansowanych teorii oraz „sprytnych" twierdzeń. Częściowo jest to prawdą, gdyż uczeń, który zna większą liczbę „tricków" olimpijskich ma większą szansę na rozwiązanie zadania. Jednakże czasami zbyt duża wiedza prowadzi na manowce: rozwiązanie zadania opiera się na typowej wiedzy szkolnej, a tymczasem uczeń szuka skomplikowanego rozwiązania.

Dobrym przykładem opisanego zjawiska są zadania olimpijskie, które można rozwiązać wykorzystując właściwie tylko wzory skróconego mnożenia.
Źródłem pomysłu był wynik analizy rozwiązań zadania 1.2.56.

	6 pkt.	5 pkt.	2 pkt.	0 pkt.	q
Polska	46	11	17	427	0,89
Uczniowie klasy I	12	1	1	35	0,73
Uczniowie klasy II	14	2	3	152	0,91
Uczniowie klasy III	20	7	13	225	0,90

Tabela 129: **Oceny uzyskane za rozwiązania zadania 1.2.56 z uwzględnieniem klasy, do której uczęszczał uczeń.**

W wyniku analizy ocen za rozwiązanie zadania 1.2.56, jakie uzyskali uczestnicy zawodów drugiego stopnia 56 Olimpiady Matematycznej, możliwe są następujące obserwacje:

1. Zadanie okazało jednym z najtrudniejszych zadań II etapu 56. OM. Współczynnik trudności wyniósł 0,89.

2. Uczniowie klas pierwszych zdecydowanie najlepiej radzili sobie z tym zadaniem. Współczynnik trudności dla uczniów klas pierwszych wyniósł 0,73, a dla uczniów klas drugich i trzecich, odpowiednio, 0,91 i 0,9.

3. Najlepiej poradzili sobie z zadaniem uczniowie województwa małopolskiego (współczynnik trudności: 0,8). Najsłabiej wypadło w województwach: łódzkim, świętokrzyskim,

warmińsko-mazurskim, w których żaden uczeń nie podał dobrego rozwiązania, ani nie miał pomysłu na rozwiązanie zadania.

4. Wśród 57 uczniów, którzy rozwiązali zadanie 1.2.56, 44 przeszło do zawodów stopnia trzeciego.

Na podstawie powyższych obserwacji można pokusić się o sformułowanie wniosków:

1. Zadanie 1.2.56 (jak i pozostałe zadania z II etapu 56 OM) okazało się najłatwiejsze dla uczniów klas pierwszych. Jakie są tego przyczyny? Dobry uczeń klasy drugiej lub trzeciej wysyłający rozwiązania z pierwszego etapu ma większe rozeznanie, gdzie poszukiwać rozwiązań określonego typu zadań i zna lepiej literaturę *olimpijską*. Uczniowie klas pierwszych na ogół w pierwszych dniach września nie posiadają takiej wiedzy, a także często nie wiedzą o istnieniu Olimpiady Matematycznej, co powoduje, że tylko nieliczni startują w olimpiadzie. Wśród pierwszoklasistów pokutuje opinia, że zawody OM są wyjątkowo trudne i raczej adresowane do uczniów starszych klas liceum. Uczeń pierwszej klasy, który zdecyduje się rozwiązywać zadania z etapu pierwszego i dostanie się do etapu drugiego musi się charakteryzować determinacją oraz wyjątkowymi umiejętnościami matematycznymi. Można zatem przyjąć, że pierwszoklasiści, którzy dostają się do etapu drugiego są lepsi od swoich starszych kolegów.

2. Treść zadania sugeruje, że chodzi o zadanie z teorii liczb. Uczniowie próbowali stosować za wszelką cenę znane sobie twierdzenia: Fermata, Eulera, Wilsona oraz metody znane np. z kółek czy książek olimpijskich (np. kongruencje). Jednakże żadnemu uczniowi nie udało się rozwiązać zadania w oparciu o tego typu techniki.

6.9.1 Stosowanie wzorów skróconego mnożenia w zadaniach olimpijskich

Scenariusz 1

Na początku przedstawimy wzory skróconego, które będziemy wykorzystywać do rozwiązywania zadań.

Niech n będzie liczbą naturalną.

$$a^{4n} + b^{4n} = (a^{2n} + \sqrt{2}a^n b^n + b^{2n})(a^{2n} - \sqrt{2}a^n b^n + b^{2n})$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}\right)$$

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą zachodzi wzór:

$$a^n + b^n = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k b^{n-k-1}\right)$$

1. **Zadanie 1 z I etapu 50. OM**

Dowieść, że wśród liczb postaci $50^n+(50n+1)^{50}$, gdzie n jest liczbą naturalną, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

Rozwiązanie

Niech $n = 5k$, gdzie k jest dodatnią liczba naturalną. Wówczas liczba

$$50^n + (50n + 1)^{50} = (50^k)^5 + ((50n + 1)^{10})^5$$

jest sumą piątych potęg liczb naturalnych dodatnich. Ponieważ

$$1 < 50^k + (50n + 1)^{10} < (50^k)^5 + ((50n + 1)^{10})^5$$

liczba $50^n + (50n + 1)^{50}$ nie jest pierwsza.

□

Komentarz.
Trudnością w tym zadaniu jest wybranie właściwego, nieskończonego podciągu liczb naturalnych. Gdy rozwiązujący dostrzeże możliwość korzystania ze wzoru skróconego mnożenia, podciąg liczb podzielnych przez 5 wyłania się w sposób oczywisty.
Na podstawie rozwiązania zadania 1.1.50 można zauważyć, że prawdziwe jest twierdzenie:
Wśród liczb postaci $a^n + b^{50}$, gdzie n, a, b są liczbami naturalnymi dodatnimi, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

2. **Zadanie 5 z II etapu 33. OM**

Niech q będzie liczbą parzystą dodatnią. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$q^{(q+1)^n} + 1$$

dzieli się przez $(q + 1)^{n+1}$, ale nie dzieli się przez $(q + 1)^{n+2}$.

Rozwiązanie

Dowód przeprowadzimy korzystając z zasady indukcji matematycznej.
Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 0$, gdyż
$(q + 1)^1|(q + 1)$ i $(q + 1)^2 \nmid (q + 1)$.
Chcemy pokazać, że dla każdej naturalnej liczby n zachodzi implikacja:
jeżeli

$$(q + 1)^{n+1}|(q^{(q+1)^n} + 1) \wedge (q + 1)^{n+2} \nmid (q^{(q+1)^n} + 1),$$

to

$$(q + 1)^{n+2}|(q^{(q+1)^{n+1}} + 1) \wedge (q + 1)^{n+3} \nmid (q^{(q+1)^{n+1}} + 1).$$

Dowód

Ponieważ $q+1$ jest nieparzystą liczbą naturalną, możemy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia:

$$q^{(q+1)^{n+1}}+1=q^{(q+1)^n(q+1)}+1=$$
$$(q^{(q+1)^n}+1)\left(q^{(q+1)^nq}-q^{(q+1)^n(q-1)}+...-q^{(q+1)^n}+1\right)=$$
$$(q^{(q+1)^n}+1)\left((q^{(q+1)^nq}-1)-(q^{(q+1)^n(q-1)}+1)+...-(q^{(q+1)^n}+1)+(q+1)\right)$$

Suma

$$(q^{(q+1)^nq}-1)-(q^{(q+1)^n(q-1)}+1)+...-(q^{(q+1)^n}+1)$$

jest różna od zera, a każdy składnik tej sumy (na podstawie założenia indukcyjnego) jest podzielny przez $(q+1)^{n+1}$. Zatem wyrażenie

$$(q^{(q+1)^nq}-1)-(q^{(q+1)^n(q-1)}+1)+...-(q^{(q+1)^n}+1)+(q+1)$$

jest podzielne przez $(q+1)$ i nie jest podzielne przez $(q+1)^2$. Z założenia indukcyjnego wynika także, że

$$(q+1)^{n+1}|(q^{(q+1)^n}+1)\wedge(q+1)^{n+2}\nmid(q^{(q+1)^n}+1).$$

Z powyższych dwóch faktów wynika prawdziwość tezy indukcyjnej.
Na podstawie zasady indukcji matematycznej udowodniliśmy tezę zadania.

□

3. **Zadanie z IV Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych**

Wykazać, że jeśli $a>3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, n liczbą naturalną, to liczba $a^{2^n}-1$ dzieli się przez co najmniej $n+1$ różnych liczb pierwszych.

Rozwiązanie

Zauważmy na początek, że

$$a^{2^n}-1=(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^{2^2}+1)...(a^{2^{n-1}}+1).$$

Ponieważ $a\equiv 1 \pmod 2$ oraz $a^2\equiv 1 \pmod 4$, liczby $\frac{a^2+1}{2}, \frac{a^{2^2}+1}{2}, ..., \frac{a^{2^{n-1}}+1}{2}$ są nieparzyste oraz liczby $\frac{a-1}{2}$ i $\frac{a+1}{2}$ są względnie pierwsze. Do dowodu tezy zadania wystarczy pokazać, że liczby $\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{a^2+1}{2}, \frac{a^{2^2}+1}{2}, ..., \frac{a^{2^{n-1}}+1}{2}$ są parami względnie pierwsze.
Przyjmijmy, że $k,l\in\mathbb{N}, k>l$. Zauważmy, że

$$a^{2^k}+1=(a^{2^k}-1)+2=((a^{2^l})^{2^{k-l}}-1)+2=$$
$$(a^{2^l}-1)(a^{2^l}+1)((a^{2^l})^2+1)...((a^{2^l})^{2^{k-l-1}}+1)+2$$

Zatem największym wspólnym dzielnikiem liczb $a^{2^k}+1$, $a^{2^l}+1$ jest 2, czyli liczby $\frac{a^{2^k}+1}{2}$, $\frac{a^{2^l}+1}{2}$ są względnie pierwsze.
Z równości

$$a^{2^k}+1=(a^{2^k}-1)+2=(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)...(a^{2^{k-1}}+1)+2$$

wynika, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej k największym wspólnym dzielnikiem liczb $a^{2^k}+1$, $a-1$ jest 2. Zatem liczby $\frac{a^{2^k}+1}{2}$, $\frac{a-1}{2}$ są względnie pierwsze

□

4. **Przydatne twierdzenie**

Jeżeli $P(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, to dla dowolnych, różnych liczb całkowitych a i b zachodzi warunek:

$$(a-b)|(P(a)-P(b))$$

.

Dowód
Niech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ są liczbami całkowitymi. Wówczas

$$P(a) - P(b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + ... + a_1(a^1 - b^1)$$

.
Ponieważ $(a-b)|(a^k - b^k)$, gdy $k \in \mathbb{N}_+$, więc $(a-b)|(P(a)-P(b))$.

□

5. **Zadanie 1 z II etapu 46. OM**

Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli liczba $P(5)$ dzieli się przez 2, liczba $P(2)$ dzieli się przez 5, to liczba $P(7)$ dzieli się przez 10.

Rozwiązanie

Z założenia liczba $P(5)$ dzieli się przez 2 oraz z faktu $(7-5)|(P(7)-P(5))$ otrzymujemy, że $P(7)$ dzieli się przez 2.
Z założenia liczba $P(2)$ dzieli się przez 5 oraz z faktu $(7-2)|(P(7)-P(2))$ otrzymujemy, że $P(7)$ dzieli się przez 5.
Wobec powyższych faktów otrzymujemy tezę.

□

6. **Zadanie 9 z I etapu 47. OM**

Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Wykazać, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

Rozwiązanie
Rozważany wielomian ma postać:
$P(x) = (x-1)(x-11)Q(x) + (990x - 889)$, gdzie $Q(x)$ jest pewnym wielomianem.
Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że x_0 jest pierwiastkiem całkowitym $P(x)$.
Wykorzystując *przydatne twierdzenie* zauważamy, że

$$(1-x_0)|(P(1)-P(x_0))$$

oraz

$$(11 - x_0)|(P(11) - P(x_0)).$$

Zatem $(1 - x_0)|P(1)$ oraz $(11 - x_0)|P(11)$.
Jednocześnie ze wzoru $P(x) = (x-1)(x-11)Q(x) + (990x - 889)$ otrzymujemy: $P(1) = 101$ oraz $P(11) = 10001$.
Liczba 101 jest liczbą pierwszą. Ponieważ $(1 - x_0)|101$, x_0 może być jedną z liczb: $-100, 0, 2, 102$. Wówczas $(11 - x_0)$ przyjmuje wartości: $-91, 9, 11, 111$. Jednakże żadna z tych liczb nie jest dzielnikiem liczby $10001 = 73 \cdot 137$.

□

7. **Zadanie (5, I etap, 52 OM)**

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ i dowolnej liczby pierwszej p liczba $n^{p^p} + p^p$ jest złożona.

Rozwiązanie

Jeżeli p jest liczbą nieparzystą, to

$$(n^{p^{p-1}})^p + p^p = (n^{p^{p-1}} + p)((n^{p^{p-1}})^{p-1} - (n^{p^{p-1}})^{p-2}p + ... - n^{p^{p-1}}p^{p-2} + p^{p-1})$$

Ponieważ $1 < n^{p^{p-1}} + p < n^{p^p} + p^p$, liczba $n^{p^p} + p^p$ jest złożona.
Jeżeli $p = 2$, to $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$. Ponieważ $n \geq 2$, oba czynniki są większe od 1. Zatem dla $n \geq 2$ liczba $n^4 + 4$ jest także złożona.

□

Uogólnienie
Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ i dowolnej liczby p, która nie jest potęgą dwójki, liczba $n^{p^p} + p^p$ jest złożona.

8. **Zadanie (12, I etap, 44 OM)**
Udowodnić, że wielomian $x^n + 4$ jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia niższego o współczynnikach całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą podzielną przez 4.

Rozwiązanie
Załóżmy, że wielomian $x^n + 4$ można zapisać w postaci:

$$x^n + 4 = F(x)G(x),$$

gdzie $F(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0$, $G(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$, gdzie $a_i \in \mathbb{Z}, i \in \{1, .., k\}$, $b_j \in \mathbb{Z}, j \in \{1, .., m\}$, $0 < k < n$, $0 < m < n$, $k + m = n$.
Wówczas współczynnik przy x^n wielomianu $F(x)G(x)$ jest równy $a_k b_m$, a wyraz wolny $a_0 b_0$. Wobec równości: $a_k b_m = 1$, otrzymujemy: $a_k = b_m = 1$ lub $a_k = b_m = -1$.
Przyjmijmy, że $a_i = 0$ dla $i > k$ oraz $b_j = 0$ dla $j > m$.
Niech α będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której a_α jest liczbą nieparzystą i niech

β będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której b_β jest liczbą nieparzystą. Ponieważ $a_k = b_m = \pm 1$, więc $\alpha \leq k$ i $\beta \leq m$. Współczynnik przy $x^{\alpha+\beta}$ w iloczynie $F(x)G(x)$ równa się

$$a_{\alpha+\beta}b_0 + a_{\alpha+\beta-1}b_1 + ... + a_\alpha b_\beta + ... + a_0 b_{\alpha+\beta}.$$

W powyższej sumie tylko składnik $a_\alpha b_\beta$ jest liczba nieparzystą. Zatem cała suma jest nieparzysta. Ale w wielomianie $x^n + 4 = F(x)G(x)$ tylko współczynnik przy x^n jest nieparzysty. Zatem $\alpha + \beta = n$, czyli muszą zachodzić równości: $\alpha = k$ oraz $\beta = m$. Wobec tego współczynniki $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$, $b_0, b_1, ..., b_{m-1}$ są liczbami parzystymi.Ponieważ $a_0 b_0 = 4$, zatem $a_0 = b_0 = -2$ lub $a_0 = b_0 = 2$.
Pokażemy, że $k = m$.
Przyjmijmy dla dowodu nie wprost, że $k < m$. Wówczas współczynnik przy x^k w wielomianie $x^n + 4$ jest równy:

$$a_k b_0 + a_{k-1}b_1 + ... + a_0 b_k.$$

Ponieważ $a_k = \pm 1$ i $b_0 = \pm 2$ oraz współczynniki $a_0, a_1, ..., a_{k-1}, b_0, b_1, ..., b_{m-1}$ są liczbami parzystymi, zatem współczynnik przy x^k nie jest podzielny przez 4. A to prowadzi do sprzeczności, ponieważ współczynnik przy x^k w wielomianie $x^n + 4$ jest równy 0.
Pokazaliśmy zatem, że $k = m$. Wynika stąd, że $n = k + m = 2k$, i w konsekwencji $F(x)G(x) = x^{2k} + 4 > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
Stąd zaś wynika, że żaden z wielomianów $F(x)$ i $G(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc musi być stopnia parzystego. A to oznacza, że k jest liczbą parzystą, czyli n jest liczba podzielną przez 4.
Jeżeli $n = 4l$, $l \in \mathbb{N}$, to żądany rozkład istnieje i ma postać:

$$x^n + 4 = (x^{2l} + 2x^l + 2)(x^{2l} + 2x^l + 2)$$

□

Scenariusz 2

Zadanie (1, II etap, 56 OM)

Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których $n^n + 1$ oraz $(2n)^{2n} + 1$ są liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie

Niech $x \geq 2$, $m \geq 1$ będą liczbami całkowitymi. Niech $m = ld$, gdzie l jest liczbą nieparzystą i d liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas

$$x^m + 1 = (x^d)^l + 1 = (x^d + 1) \cdot ((x^d)^{l-1} - (x^d)^{l-2} + ... - x^d + 1)$$

Z powyższego wzoru wynika, że liczba $x^d + 1$ jest dzielnikiem liczby $x^m + 1$. Dla $l > 1$ dzielnik ten jest większy od 1 i mniejszy od $x^m + 1$. Zatem liczba $x^m + 1$ jest złożona.

Liczba $n = 1$ spełnia warunki zadania: liczby $1^1 + 1 = 2$, $2^2 + 1 = 5$ są liczbami pierwszymi. Załóżmy więc w dalszej części rozumowania, że $n \geq 2$.

Jeżeli liczba $n^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n nie ma dzielników nieparzystych większych od 1. Stąd wynika, że $n = 2^k$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k. Wówczas $n^n + 1 = 2^{k \cdot 2^k} + 1$ oraz $(2n)^{2n} + 1 = 2^{(k+1) \cdot 2^{k+1}} + 1$.

Dla $k \geq 2$ co najmniej jedna z liczb $k \cdot 2^k$, $(k+1) \cdot 2^{k+1}$ ma dzielnik nieparzysty większy od 1, a więc co najmniej jedna z liczb $n^n + 1$, $(2n)^{2n} + 1$ jest złożona.

Sprawdźmy jeszcze, że $n = 2$ spełnia warunki zadania: $2^2 + 1 = 5$, $(2 \cdot 2)^{2 \cdot 2} + 1 = 257$ są liczbami pierwszymi.

□

Komentarz.
Zadanie 1.2.56 można uogólnić następująco:
Znajdź wszystkie liczby naturalne dodatnie n, k, które spełniają warunki: $n \cdot k$ nie jest parzystą potęgą liczby 2 oraz liczby $n^n + 1$ i $(kn)^{kn} + 1$ są liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie

Jeżeli $k = 1$, to $n > 1$ nie jest parzystą potęgą liczby 2. Zatem $n^n + 1$ jest liczbą złożoną.

Jeżeli $k = 2$, to tylko $n = 1$ spełnia warunki zadania (co wynika z rozwiązania zadania poprzedniego).

Jeżeli $k > 2$ i $n = 1$, to $1^1 + 1 = 2$ jest liczbą pierwszą oraz k nie jest parzystą potęgą liczby 2. Zatem liczba $k^k + 1$ jest liczbą złożoną.

Załóżmy, że $n > 1$ i $k > 2$. Gdy przynajmniej jedna z liczb n, k ma dzielnik nieparzysty większy od 1, to przynajmniej jedna z liczb $n^n + 1$ i $(kn)^{kn} + 1$ jest złożona.
Przyjmijmy zatem, że obie liczby n, k są potęgami liczby 2. Z warunków zadania wynika, że przynajmniej jedna z liczb n, k jest nieparzystą potęgą liczby 2. A to oznacza, że przynajmniej jedna z liczb $n^n + 1$ i $(kn)^{kn} + 1$ jest złożona.

□

Uwaga 1: Jeżeli dopuścimy w tym zadaniu rozważanie liczb naturalnych dodatnich n, k, które spełniają warunek: $n \cdot k$ jest parzystą potęgą liczby 2, to doprowadzi nas do problemu: dla jakich liczb $m \in \mathbb{N}$ liczba Fermata $2^{2^m} + 1$ jest liczbą pierwszą. Problem ten nie ma w tej chwili rozstrzygnięcia.

Uwaga 2: W 1958 roku Wacław Sierpiński w pracy [119] (s.211-212) udowodnił, że jeżeli liczba $n^n + 1$ jest pierwsza, to istnieje takie $m \geq 0$, że $n = 2^{2^m}$, a zatem jest liczbą Fermata. W tej chwili nie wiadomo, czy liczb pierwszych postaci $n^n + 1$ jest skończonie czy nieskończonie wiele.

Liczby Fermata

Jak wiadomo, jeżeli liczba $2^m + 1$ jest pierwsza, to m musi być postaci $m = 2^n$. Zatem musi być liczbą pierwszą Fermata $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Liczby Fermata $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ są liczbami pierwszymi. Euler wykazał, że F_5 nie jest liczbą pierwszą, gdyż $F_5 = 641 \cdot 6700417$. Fakt ten odkrył wykorzystując:

Twierdzenie
Każdy dzielnik liczby F_n (gdzie $n > 1$) musi mieć postać $k \cdot 2^{n+2} + 1$.

Dowód

Niech p będzie liczbą pierwszą, będącą dzielnikiem liczby Fermata F_n. Ponieważ $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$, zatem $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Zatem rząd liczby 2 modulo p jest równy 2^{n+1}. Z małego twierdzenia Fermata wynika więc, że liczba 2^{n+1} dzieli $p-1$; w szczególności 8 dzieli $p-1$. Symbol Legendre'a spełnia zależność $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\frac{2}{p}) \pmod{p}$. Ponieważ $(\frac{2}{p}) = 1$, gdy $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$, zatem $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Wobec tego 2^{n+1} dzieli $\frac{p-1}{2}$, czyli $p = k \cdot 2^{n+2} + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

□

W dowodzie twierdzenia wykorzystaliśmy

Kryterium Eulera

Jeżeli p jest nieparzystą liczbą pierwszą, to dla dowolnej liczby całkowitej a zachodzi $(\frac{a}{p}) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Dowód

Jeżeli $p|a$ to obie strony są równe zeru. Załóżmy zatem, że a nie jest podzielne przez p. Wówczas
$0 \equiv a^{p-1} - 1 \equiv \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \pmod{p}$
a zatem $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$.
Jeżeli $(\frac{a}{p}) = 1$, to istnieje takie b, że $b^2 \equiv a \pmod{p}$, a więc
$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \equiv (\frac{a}{p}) \pmod{p}$
co daje $(\frac{a}{p}) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.
Ponieważ kongruencja $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ może zachodzić jedynie dla $\frac{p-1}{2}$ reszt a modulo p, zatem zachodzi ona wtedy i tylko wtedy, gdy $(\frac{a}{p}) = 1$. Zatem dla pozostałych a zachodzi $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ co kończy dowód.

□

Ponieważ czynniki liczb Fermata mają postać $k \cdot 2^n + 1$, interesujące jest pytanie, które z tych liczb są pierwsze, a które złożone.
Na podstawie twierdzenia Dirichleta o liczbach pierwszych w ciągach arytmetycznych, dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich k, że liczba $k \cdot 2^n + 1$ jest pierwsza.

W 1982 na olimpiadzie matematycznej w USA pojawiło się następujące

Zadanie

Wykazać, że istnieje taka liczba naturalna k, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $k \cdot 2^n + 1$ jest liczbą złożoną.

Dowód:

Liczba Fermata $2^{2^5} + 1$ jest podzielna przez liczbę pierwszą 641 i nie jest podzielna przez 641^2. Ponieważ każde dwie liczby Fermata są względnie pierwsze, liczby: $f_0 = 2^{2^0} + 1$,

$f_1 = 2^{2^1} + 1$, $f_2 = 2^{2^2} + 1$, $f_3 = 2^{2^3} + 1$, $f_4 = 2^{2^4} + 1$, $f_5 = 641$, $f_6 = \frac{2^{2^5}+1}{641}$ są również względnie pierwsze. Na podstawie twierdzenia chińskiego o resztach istnieje taka liczba $k > max\{f_0, f_1, .., f_6\}$ spełniająca warunki:
$k \equiv 1 \pmod{f_i}$, gdy $i = 0, 1, .., 5$,
$k \equiv -1 \pmod{f_6}$.
Wykażemy, że każda liczba postaci $k \cdot 2^n + 1$ jest złożona.

Przypadek 1

Niech $n = 2^m q$, dla $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a liczba q jest nieparzysta.
Wówczas:
$k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^n + 1 \pmod{f_m}$
$2^n + 1 = 2^{2^m q} + 1 = (f_m - 1)^q + 1$
$(f_m - 1)^q + 1 \equiv (-1)^q + 1 \equiv 0 \pmod{f_m}$.

Przypadek 2

Niech $n = 2^5 q$, gdzie liczba q jest nieparzysta.
Wówczas:
$k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^n + 1 \pmod{f_5}$
$2^n + 1 = \left(2^{32}\right)^q + 1$
$\left(2^{32}\right)^q + 1 \equiv (-1)^q + 1 \equiv 0 \pmod{f_5}$.

Przypadek 3

Niech $n = 2^6 q$, gdzie liczba q jest liczbą naturalną.
$k \cdot 2^n + 1 \equiv -2^n + 1 \pmod{f_6}$
$2^n - 1 = \left(2^{64}\right)^q - 1$
$\left(2^{64}\right)^q - 1 \equiv (-1)^{2q} - 1 \equiv 0 \pmod{f_6}$.

Ponieważ każda liczba $k \cdot 2^n + 1 > k$ i jest podzielna przez jedną z liczb $f_0, f_1, .., f_6$, więc liczba $k \cdot 2^n + 1$ jest złożona dla każdej liczby naturalnej k.

□

W 1960 roku Wacław Sierpiński w pracy [120] (s.73-74) udowodnił następujące:

Twierdzenie

Istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych nieparzystych k, że liczba $k \cdot 2^n + 1$ jest złożona (dla każdej dodatniej liczby naturalnej n). Liczby k o podanej powyżej własności nazywamy *liczbami Sierpińskiego*.

Komentarz.
Proponujemy samodzielny dowód twierdzenia lub zerknięcie do pracy [58], w której oprócz dowodu twierdzenia można znaleźć jego uogólnienia.

7 Wnioski

Jak już zostało powiedziane, za zaletę pracy uważam drobiazgowy opis rozwiązań i zestawienie błędów popełnionych przez uczniów. To było podstawą dokonania szeregu analiz i wyciągnięcia wniosków.
Wiele wniosków o bardziej lokalnym charakterze zostało zamieszczonych w poszczególnych rozdziałach. Tu zbieram najbardziej ogólne.

1. Uczniowie startujący w Olimpiadzie Matematycznej wykazali się dobrą znajomością twierdzeń i metod, zarówno w przypadku zadań z geometrii, jak i zadań na dowodzenia nierówności.

2. Zawodnicy na ogół dobrze znają ogólne strategie heurystyczne, ale znacznie gorzej posługują się strategiami szczegółowymi. Dobrym przykładem tej tezy są zadania z nierównościami 3.2.57 i 6.2.58.

3. Dominującą strategią, z jakiej korzystali uczniowie (niezależnie od działu, z jakiego było zadanie), była strategia sprowadzania rozwiązania zadania do zastosowania jednej metody *olmpijskiej* lub jednego twierdzenia *olimpijskiego*. Strategia ta nie jest tożsama z metodą heurystyczną *sprowadź zadanie do zadania pokrewnego*, o jakiej pisze Polya. Polya miał na myśli poszukiwanie rozwiązań analogicznych, podobnych do rozwiązań znanych zadań. W przypadku olimpijczyków należy raczej mówić o zastosowaniu narzędzia, które daje natychmiastowy wynik, co należy uznać za zjawisko negatywne.
   W trakcie tworzenia zadań należy zatem zwracać uwagę, aby zadania nie dawały się rozwiązać poprzez zastosowanie jednego *tricku* olimpijskiego (w przypadku zadań geometrycznych chodzi przede wszystkim o wyeliminowanie zadań, które łatwo można rozwiązać poprzez zastosowanie metody analitycznej lub liczb zespolonych).
   Strategię stosowania metody analitycznej i liczb zespolonych w zadaniach geometrycznych można uznać za szczególny przypadek strategii sprowadzania rozwiązania zadania do pewnego schematu. Jednakże skuteczność uczniów stosujących tę strategię jest bardzo mała. Zadania 2.2.57, 5.2.57, 3.3.57 metodą analityczną próbowało rozwiązywać, odpowiednio, 13, 27, 2 uczniów (w sumie tylko dwóch rozwiązało zadania), a za pomocą liczb zespolonych, odpowiednio, 2, 3, 2 uczniów (tylko jeden miał zaliczone rozwiązanie). Zwracał uwagę uczeń V LO w Krakowie, który wszystkie zadania geometryczne 57 OM próbował rozwiązywać za pomocą liczb zespolonych (zdobył kolejno: 2, 2, 0 punktów; został laureatem III stopnia 57 OM i laureatem I stopnia 58 OM).
   Zadania 5.2.58 żaden uczeń nie rozwiązywał ani metodą analityczną ani zespoloną (było to najłatwiejsze zadanie geometryczne 57 i 58 OM), natomiast zadanie 1.3.57 czterech uczniów rozwiązywało (bez powodzenia) metodą analityczną.
   Ze względu na faktyczne wyeliminowanie możliwości stosowania metody analitycznej i liczb zespolonych, dobór zadań geometrycznych 57 i 58 OM należy uznać za bardzo dobry. Taką regułę doboru należy zachować także w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej.

4. W analizowanych pracach praktycznie nie występowała strategia dowodzenia twierdzenia ogólniejszego. Jedynie w zadaniu 3.2.57 jeden uczeń podał pewne uogólnienie lematu, istotnego przy rozwiązywaniu zadania. Uogólnienie nie dawało jednak uproszczenia dowodu zadania.
   Strategia *odgadnij i sprawdź* była stosowana (adekwatnie do sytuacji) w zadaniach 2.2.57 i 5.2.58. Zawodnicy wskazywali punkt, który powinien być środkiem okręgu spełniającego tezę zadania, a następnie wykazywali, że istotnie tak jest.

Strategia rozważania przypadku szczególnego pojawiała się w rozwiązaniach zadań, ale miała często znaczenie negatywne, to znaczy przypadek szczególny zastępował rozważania ogólne (kilku uczniów próbowało nawet dowodzić tak nierówności). W przypadku zadań z geometrii rozważania przypadku szczególnego wynikały najczęściej z rysunku sugerującego lub uwzględniającego szczególne uwarunkowania. Strategia rozważania przypadku szczególnego była podstawą dobrych rozwiązań zadania 3.3.57. Spośród 123 finalistów 57 OM tylko dziewięciu uczniów rozwiązało to zadanie, z czego siedmiu poprzez rozważenie przypadku szczególnego, który był łatwy do uogólnienia.
Strategia regularnej drogi pojawiała się w rozwiązaniach zadań, w których istniało łatwe powiązanie założenia lub tezy z powszechnie znanym (przez olimpijczyków) twierdzeniem lub metodą. W przypadku zadania 5.2.58 miała miejsce właśnie taka sytuacja: zadanie kojarzyło się bezpośrednio z twierdzeniem o siecznych okręgu (charakterystyczne jest to, że 96 uczniów korzystało z tego twierdzenia i aż 77 dowodziło tego twierdzenia - najprawdopodobniej znali twierdzenie, ale nie byli pewni, czy mogą się na nie powołać).

5. George Polya dzielił rozwiązywanie zadania na fazy: zrozumienie zadania, ułożenie planu, wykonanie planu, sprawdzenie. W przypadku bardzo wielu analizowanych prac wyraźnie widoczny jest brak świadomości, że sprawdzenie rozwiązania i refleksja nad nim jest niezbędnym elementem poprawnie przeprowadzonego procesu rozwiązania.

6. Potrzebna jest mentalna zmiana w podejściu zarówno nauczycieli, jak i uczniów: należy zmienić sposoby prowadzenia kształcenia uczniów utalentowanych matematycznie i biorących udział w Olimpiadzie Matematycznej.
Główny nacisk nie powinien być kładziony na uczenie stosowania typowych *wytrychów olimpijskich* (twierdzeń, metod), gdyż to prowadzi do prób sprowadzania rozwiązywania zadań do odtwórczego i automatycznego stosowania tychże metod oraz algorytmizacji procesu rozwiązywania zadań olimpijskich. Należy skupić się na kształceniu umiejętności stosowania strategii ogólnych, a w dalszej kolejności strategii szczegółowych. Zwłaszcza, że rzecz nie jest w skuteczności stosowania przez uczniów takich *wytrychów*, ale w tym, że głównym celem OM jest wyławianie talentów i kształtowanie przyszłych matematyków. Niedostatki w kształceniu u uczniów twórczego podejścia do rozwiązywania zadań i problemów mogą mieć niepokojące konsekwencje.

7. Obserwując historię OM można zauważyć, że zmniejsza się rola zadań geometrycznych, a zwłaszcza zadań stereometrycznych, w konstrukcji zestawów zadań na poszczególne etapy OM. Powiązane jest z tym, na zasadzie sprzężenia zwrotnego, także słabsze przygotowanie zawodników do rozwiązywania zadań geometrycznych. W analizowanych olimpiadach zadania tego typu były dla uczniów trudniejsze niż zadania na dowodzenie nierówności (mimo, że zadania na dowodzenie nierówności wymagały specyficznej, specjalistycznej wiedzy). Wyraźny jest związek posiadanej przez uczniów wiedzy z publikacjami *olimpijskimi* z zakresu geometrii i nierówności oraz ze zmianami treści matematycznych programów nauczania matematyki w gimnazjach i szkołach ponadgimnazjalnych. Najlepsze wyniki w zadaniach geometrycznych osiągają uczniowie XIV LO w Warszawie, co związane jest z nietypowym i rozbudowanym programem kształcenia geometrycznego.

8. Charakterystyczne jest, że wraz z usuwaniem konstrukcji z programów szkolnych zanika u uczniów startujących w Olimpiadzie Matematycznej umiejętność i potrzeba wykonywania precyzyjnych rysunków geometrycznych. Ma to odzwierciedlenie w niestarannych

rysunkach oraz błędach, jakie są konsekwencją tych rysunków. Na podstawie źle przygotowanych rysunków uczniowie wyprowadzają wnioski, które są fałszywe. Na podstawie rysunku dla jednej sytuacji (czasami sytuacji szczególnej, regularnej) dostrzegają fakty charakterystyczne tylko dla danej sytuacji i traktują je jak ogólne. Nie jest to zjawisko powszechne, ale wyraźnie dostrzegalne.
Można zauważyć, że zanikają także umiejętności powiązane z rozwiązywaniem zadań konstrukcyjnych, takie jak analiza liczby rozwiązań i dowód poprawności konstrukcji. Ma to odbicie w wielu pracach, w których zawodnicy nie rozważają wszystkich przypadków.

9. Zadania z geometrii przestrzennej stanowiły dla zawodników poważny problem. W zawodach finałowych 57 i 58 OM (w każdej edycji było jedno takie zadanie) tylko siedmiu uczniów rozwiązało zadania tego typu. Zwraca uwagę fakt, że byli to uczniowie tylko z czterech szkół: II LO w Krakowie, XIII LO w Szczecina, XIV LO w Warszawie, VI LO w Bydgoszczy.
   Zawodnicy mieli kłopot z postrzeganiem analogii między geometrią płaszczyzny i przestrzeni. Na zasadzie analogii z faktów prawdziwych w geometrii płaszczyzny błędnie wnioskowali, bez sprawdzenia, o istnieniu związków między obiektami w przestrzeni. Bywały także problemy odwrotne: dobrze znane fakty z geometrii płaskiej nie miały dla nich analogii w przestrzeni. Dobrym przykładem tego zjawiska był problem w zadaniu 5.3.57: twierdzenie o odcinkach stycznych do okręgu, bardzo dobrze znane i stosowane przez olimpijczyków w zadaniu z geometrii płaskiej, było słabo rozpoznawalne w przestrzeni.
   Zastanawiające, że uczniowie często nie próbowali weryfikować swoich pomysłów przez sprawdzenie własności charakterystycznych figur przestrzennych czy też poprzez podanie lub poszukanie konfiguracji nie pasującej do ich koncepcji.
   Wielką trudnością w rozwiązywaniu zadań stereometrycznych była umiejętność sporządzania właściwego rysunku - utrudnienia wynikały z braku możliwości zbudowania modelu przestrzennego, a jedynie wykonania rysunku w perspektywie równoległej. Ten fakt implikował brak możliwości dostrzegania zależności między elementami figury przestrzennej. Często powodował także dostrzeganie zależności, których nie było.

10. Widoczne w rozwiązaniach zadań jest zjawisko odtwarzania wiedzy z podręczników, które zawodnicy uznają za *standard olimpijski*. Charakterystyczne, że taki standard *obowiązuje* wśród uczniów w zakresie dowodzenia nierówności (przede wszystkim książki Lva Kourliandtchika) i brak jest takiego standardu w zakresie geometrii (głównie ze względu na brak pozycji, w których znajdowałby się przegląd technik olimpijskich z tego zakresu).
    Warto dodać, że literatura matematyczna była traktowana przez sporą część uczniów jako zbiory twierdzeń i metod, których automatyczne zastosowanie gwarantuje sukces w rozwiązywaniu zadań OM.

11. Poważnym problemem, większym niż wydaje się przy pobieżnej obserwacji, było popełnianie przez uczniów błędów świadomych, błędów powierzchownej wiedzy i błędów spowodowanych walką o wynik. Błędy te były charakterystyczne przede wszystkim dla prac uczestników drugich etapów i wynikały z ambicji uczniów przedstawienia rozwiązań (mimo braku pomysłu na nie), które dadzą awans do finału.

12. Uczniowie podawali fakty niezbędne do przeprowadzenia rozumowania, ale często pozostawiali je bez uzasadnienia. Ten sposób postępowania zdecydowanie częściej występował

w trakcie rozwiązywania zadań geometrycznych, a zwłaszcza stereometrycznych niż w przypadku zadań na dowodzenie nierówności. Najczęściej uczniowie podawali takie fakty, które był równoważne tezie (zwykle były to wnioskowania oczywiste).
Zdarzało się także, że uczniowie powoływali się na fakty, których brakowało do *domknięcia* dowodu. W takich sytuacjach brak było przesłanek do uzasadnienia faktu, ale uczniowie pisali z przekonaniem, że jest to oczywiste (*tak musi być*).

13. Zawody II stopnia dobrze selekcjonowały finalistów Olimpiady Matematycznej. Finaliści OM cechowali się wysokim stopniem samooceny oraz umiejętością wykrywania błędów i luk w swoich rozumowaniach. Prace finalistów charakteryzowały się mniejszą (w stosunku do prac z II etapu) liczbą błędów powierzchownej wiedzy, blefów, błędów walki o wynik, a także świadomym doborem strategii i prezentacją prostych, pomysłowych rozwiązań, w których zawodnicy rzadko wykorzystywali *tricki* olimpijskie.

14. Zwraca uwagę występujące, w małej skali, zjawisko rozumowań niesamodzielnych, co świadczy o tym, że OM nie dla wszystkich uczniów jest przygodą intelektualną, ale sposobem realizacji swoich ambicji. Aby wyeliminować ten problem, organizatorzy powinni zwrócić baczniejszą uwagę na przebieg zawodów II stopnia.

15. Moje badania potwierdziły stereotypowe sądy o umiejętnościach matematycznych dziewcząt: we wszystkich analizowanych zadaniach II etapów dziewczęta statystycznie gorzej radziły sobie z rozwiązywaniem tych zadań oraz częściej niż chłopcy były bezpodstawnie przekonane o poprawności swoich rozwiązań.
W przypadku etapu III, wobec małej liczby dziewcząt, nie można wyciągać wniosków ogólnych.

16. Zwiększa się rola szkół wiodących pod względem liczby uczestników II i III etapu OM. Od 40 lat istnieje wyraźna dominacja uczniów XIV LO w Warszawie wśród uczestników II i III etapu OM. Jednakże w obecnej chwili nie jest to przewaga tak miażdżąca, jak między 20 i 30 OM, gdy ponad 30% uczestników finału pochodziło z tej szkoły. Liczba szkół, które konkurują z XIV LO w Warszawie wynosi ok. 4-6. Obecnie do najmocniejszych z nich należy V LO w Krakowie.
Na przykładzie uczniów XIV LO z Warszawy, V LO w Krakowie oraz pozostałych uczniów widać istotną korelację między programami nauczania i sposobami ich realizacji, a wynikami w OM.
Roli *stajni olimpijskich* nie da się oceniać jednoznacznie negatywnie czy pozytywnie. Uczniowie tych szkół mieli znacznie lepszą wiedzę na temat rozwiązywania zadań olimpijskich niż ich rówieśnicy w innych szkołach; sprawnie stosowali schematy i metody charakterystyczne dla zadań olimpijskich. Fakt, że popełniali więcej błędów powierzchownej wiedzy i blefów wynikało z ich większej wiedzy i silniejszej motywacji związanej z sukcesem olimpijskim.
Negatywnym aspektem istnienia takich wiodących szkół było ograniczenie szans w OM uczniów z miejscowości, w których nie ma tego typu szkół. Z mojej analizy wynika, że uczniowie uzdolnieni matematycznie, ale pozbawieni szczególnej opieki olimpijskiej, mieli mniejsze szanse na awans do finału OM niż posiadający uczniowie taką opiekę.

17. Warunki sprzyjające powstaniu *stajni olimpijskich*:

    (a) formalna lub nieformalna współpraca z pracownikami wyższych uczelni,

(b) silne związki z jednym, wybranym gimnazjum (w niektórych sytuacjach jest to nawet jeden zespół szkół), w którym uczniowie poddawani są treningowi olimpijskiemu (często przez nauczycieli z tychże *stajni*),

(c) obecność w szkole co najmniej jednego nauczyciela pasjonującego się pracą z uczniem zdolnym (bardzo często odejście z pracy takiego nauczyciela powoduje gwałtowny spadek liczby uczestników OM w tej szkole),

(d) specjalny sposób naboru do klas z poszerzonym programem nauczania matematyki,

(e) program nauczania matematyki znacznie odbiegający od powszechnie obowiązujących programów,

(f) indywidualne programy nauczania dla najwybitniejszych uczniów, organizacja warsztatów i obozów matematycznych (które często prowadzą dawni olimpijczycy, będący absolwentami tych szkół).

18. Charakterystyczny jest brak silnych szkół olimpijskich w wielkich miastach i ośrodkach akademickich: Łodzi, Poznaniu, Gdańsku. Przyczyn należy szukać w braku spełnienia większości warunków z punktu poprzedniego.

19. Na przykładzie prac uczniów XIV LO w Warszawie można dostrzec pozytywne efekty treningu: uczniowie sprawnie posługiwali się typowymi strategiami rozwiązywania zadań, umiejętnie korzystali ze strategii szczegółowych, charakterystycznych dla określonego typu zadań, wykazywali się dobrą znajomością twierdzeń i metod. I wreszcie widoczna była duża skuteczność w rozwiązywaniu zadań olimpijskich - znacznie większa niż w przypadku uczniów z innych szkół; dotyczyło to zwłaszcza zadań z geometrii płaskiej.

20. Nie można nie wspomnieć o wadach kształcenia w klasach matematycznych renomowanych szkół. Realizacja bardzo zaawansowanego programu nauczania matematyki może się udać tylko w małej i odpowiednio dobranej grupie uczniów. Zdarza się, że osoby, które trafiają do takiej klasy, nie wytrzymują tempa i poziomu wymagań.
Ponadto istnienie dominującej szkoły w danym województwie powoduje, że zdecydowana większość uczniów o aspiracjach olimpijskich trafia właśnie do niej.

21. Wskazane jest podjęcie działań systemowych polegających na stworzeniu w większych miastach zespołów nauczycieli i pracowników naukowych zajmujących się kształceniem uczniów uzdolnionych matematycznie. Podniesie to poziom kształcenia matematycznego tych uczniów i jednocześnie zwiększy szanse na sukces olimpijski uczniów z miejscowości, w których obecnie nie ma takiej działalności.
W historii OM występuje wiele szkół, w których co jakiś czas pojawiają się finaliści OM. Dosyć częstym zjawiskiem jest pojawianie się w tych szkołach jednocześnie dwóch finalistów. Wzmacnia to tezę, że spotkanie w jednej szkole kilku uczniów zainteresowanych OM powoduje wzajemne inspirowanie i naukę, co przekłada się na sukces olimpijski.

22. Moje badania pokazały, że rozwiązania eleganckie i pomysłowe były charakterystyczne dla dwóch typów zawodników uczestniczących w Olimpiadzie Matematycznej: zajmujących najwyższe lokaty oraz takich, którzy nie awansowali do finału.
W przypadku zawodników najlepszych elegancja i pomysłowość rozwiązań wynikała z rozległej wiedzy oraz umiejętności głębokiego wejrzenia we własności obiektów występujących w zadaniu.

W przypadku uczniów, którzy nie awansowali do finału, raczej chodziło o luki w wiedzy uzupełnione pomysłowością i intuicją.
Dlatego uważam, że uczniów prezentujących takie pomysłowe rozwiązania powinno się dołączać do grona finalistów z wykorzystaniem tzw. *dzikiej karty*. Umożliwi to docenienie uczniów o niezbyt dużej wiedzy, ale kreatywnych i obdarzonych niewątpliwym talentem matematycznym.

23. Kolejna propozycja dotyczy umieszczania w zestawach zadań II etapu zadań będących pewnymi wariacjami na temat zadań I etapu, nad którymi uczniowie mieli okazję popracować w domu.
Uczeń, który rozwiązał zadanie z I etapu, dobrze zrozumiał istotę swojego rozwiązania, zastanowił się nad uogólnieniami, wymyślił lub znalazł w literaturze techniki rozwiązywania podobnych zadań, zdecydowanie łatwiej poradzi sobie z zadaniem z II etapu, które jest przedłużeniem lub uogólnieniem zadania z etapu pierwszego. Zadania z etapu pierwszego będą wówczas pewnego rodzaju wskazówką, z jakimi zagadnieniami warto się zapoznać. Dzięki takiemu ukierunkowaniu nastąpi wyrównanie szans uczniów o podobnych uzdolnieniach.

24. Wnioski do dalszych badań: w swojej pracy analizowałem zadania 57 i 58 Olimpiady Matematycznej na dowodzenie nierówności, zadania z geometrii płaskiej i przestrzennej. Bardzo interesujące byłoby przeanalizowanie pozostałych zadań z tych olimpiad, zwłaszcza, że wśród nich występują zadania o różnorodnej tematyce, z wielu dziedzin matematycznych. Ponadto warto prowadzić badania nad rozwiązaniami zadań z bieżących OM. Badania takie mogą pokazać bardziej wyraziście tendencje i korelacje, jakie opisałem w mojej rozprawie.
Wobec wyników mojej pracy, wskazujących na istotny wpływ nauczyciela na ucznia w procesie kształcenia olimpijskiego, należy podjąć temat przygotowania studentów pragnących podjąć pracę w szkole (oraz nauczycieli) do pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie.

Literatura

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Dowody z księgi*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2002.

[2] Daniel Alibert, Michael Thomas: *Research on Mathematical Proof*. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2002.

[3] Noga Alon: *Combinatorial Nullstellensatz*. Combinatorics Probability and Computing 8, str. 7-29, 1999.

[4] Titu Andreescu, Dorin Andrica: *Complex Numbers from A to ... Z*. Birkhäuser, Boston, 2006.

[5] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng: *104 Number Theory Problems From the Training of the USA IMO Team*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2007.

[6] Titu Andreescu, Zuming Feng: *103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team*. Birkhäuser, Boston, 2005.

[7] Titu Andreescu, Svetoslav Savchev: *Mathematical Miniatures*. The Mathematical Association of America, 2003.

[8] Władimir I. Arnold: *O nauczaniu matematyki*. Wiadomości Matematyczne 37, 2001.

[9] Matthew Baker, Serguei Norine: *Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph*. Advances in Mathematics 215, str. 766-788, 2007.

[10] Stefan Banach: *Algebra dla IV klasy gimnazjum*. Książnica Atlas, Wrocław-Warszawa, 1946.

[11] E.J. Barbeau: *Polynomials*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[12] Wiktor Bartol, Witold Sadowski (redaktorzy): *O twierdzeniach i hipotezach. Matematyka według Delty*. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego,Warszawa, 2005.

[13] A.W. Bell: *A Study of Pupil's Proof-explanations in Mathematical Situations*. Educational Studies in Mathematics, Volume 7, Numbers 1, 1976.

[14] Ireneusz Białecki: *Funkcjonowanie olimpiad matematycznych*. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1975.

[15] Andrzej Białynicki-Birula: *Bourbaki a sprawa polska*. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria 2: Wiadomości Matematyczne; rok 2004, zeszyt 40, s. 169-174.

[16] Raymond Bjuland: *Student Teachers' Reflections on Their Learning Process Through Collaborative Solving in Geometry*. Educational Studies in Mathematics, Volume 55, Numbers 1-3, 2004.

[17] Zbigniew Bobiński, Brunon Kamiński: *Życie i działalność Leona Jeśmanowicza*. Wiadomości Matematyczne 35, 1999.

[18] Monique Boekaerts, Gerard Seegerds, Harriet Vermeer: *Solving Math Problems: Where and Why does The solution Process Go Asray?*. Educational Studies in Mathematics, Volume 28, Numbers 3.

[19] George Booker, *Rola błędów w konstrukcji matematycznej wiedzy.* Dydaktyka Matematyki nr 11(89), s. 99-108.

[20] James Reed Campbell, Wu-Tien Wu: *Development of Exceptional Academic Talent: International Research Studies.* International Journal of Educational Research Volume 25, Issue 6, 1996.

[21] James Reed Campbell: *Early Identification of Mathematics Talent Has Long-Term Positive Consequens for Career Contributions.* International Journal of Educational Research Volume 25, Issue 6, 1996.

[22] Maria Luz Callejo: *Les Représentations graphiques dans la résolution de problémes: Une expérience d'entrainement d'étudiants dans un club mathématique.* Educational Studies in Mathematics, Volume 27, Number 1.

[23] Marylin P. Carlson, Irene Bloom: *The Cyclic Nature of Problem Solving: an Emergent Multidimensional Problem-Solving Framework.* Educational Studies in Mathematics, Volume 58, Number 1, 2005.

[24] Mohan Chinnappan: *Schemas and Mental Models in Geometry Problem Solving.* Educational Studies in Mathematics, Volume 36, Issue 3, 1998.

[25] Krzysztof Ciesielski: *Reminiscencje olimpijskie.* Delta, nr 308 (1/2000), Warszawa 2000.

[26] Krzysztof Ciesielski: *Wyjście z cienia.* Delta, nr 275 (4/1997), Warszawa 1997.

[27] Victor V. Cifarelli, Jinfa Cai: *The evolution of mathematical explorations in open-ended problem-solving situations.* Journal of Mathematical Behavior Volume 24, Issue 3-4, 2005.

[28] Marianna Ciosek: *Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny.* Dydaktyka Matematyki nr 13(92), s. 65-161.

[29] Marianna Ciosek: *Dydaktyczne problemy związane ze strategiami stosowanymi w rozwiązywaniu zadań matematycznych.* Prace z Dydaktyki Matematyki, Kraków, 1978.

[30] Marianna Ciosek: *Dziewięć rozwiązań zadania geometrycznego - studium heurezy.* Dydaktyka Matematyki 21, Kraków, 1999.

[31] Marianna Ciosek: *O roli przykładów w badaniu matematycznym.* Dydaktyka Matematyki 21, Kraków, 1995.

[32] Marianna Ciosek: *Proces rozwiązywania zadania na różnych poziomach wiedzy i doświadczenia matematycznego.* Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków, 2005.

[33] Marianna Ciosek, Zofia Krygowska, Stefan Turnau: *Strategie rozwiązywania zadań matematycznych jako problem dydaktyki matematyki.* Prace z dydaktyki matematyki zeszyt 54, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków, 1974.

[34] M. A. (Ken) Clements: *Terence Tao.* Educational Studies in Mathematics, Volume 15, Number 3, 1984.

[35] Pedro Cobo, Josep M. Fortuny: *Social Interactions and Cognitive Effects in Context of Area-Comparison Problem Solving.* Educational Studies in Mathematics, Volume 42, Number 2, 2000.

[36] Richard Courant, Herbert Robbins: *Co to jest matematyka?* Prószyński i S-ka Warszawa 1998.

[37] H.S. Coxeter: *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*. PWN, Warszawa 1967.

[38] H. Croft, K. Falconer, R. Guy: *Unsolved Problems in Geometry*. Springer Verlag, New York, 1991.

[39] Philip J. Davis, Reuben Hersh: *Świat matematyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994.

[40] Mirosław Dąbrowski: *O akceptowalności dowodów przez uczniów na przykładzie dowodów istnienia liczb niewymiernych*. Dydaktyka Matematyki, 15, Kraków 1993.

[41] Dušan Djukić, Vladimir Janković, Ivan Matić, Nikola Petrović: *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 19592004*. Springer, 2006.

[42] Roman Duda: *Lwowska szkoła matematyczna*. Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 2007

[43] S. Dvorjaninov, E. Jasinovyj: *Kak polučajetsya simmetričeskije neravenstva*. Kwant, nr 7, strony: 33-36, 1985.

[44] Zdzisława Dybiec: *Błędy w procesie uczenia matematyki*. Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1996.

[45] Jacek Dymel, Renata Olma: *O kolorowaniu płaszczyzny*. Delta, nr 325 (6/2001), Warszawa, 2001.

[46] Jacek Dymel, Michał Niedźwiedź: *Polish Mathematical Olympiad for Teenagers*. Mathematics Competition, vol.20 number 1, Canberra 2007.

[47] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*. Springer Verlag, New York, 1998.

[48] Gontran Ervynck: *Mathematical Creativity*. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2002.

[49] Piotr Francuz, Robert Mackiewicz: *Liczby nie wiedzą, skąd pochodzą. Przewodnik po metodologii i statystyce*. Wydawnictwo KUL, Lublin 2007.

[50] Mohammad Ghebleh, Luis A. Goddyn, Ebadollah S. Mahmoodian, Maryam Verdian-Rizi: *Silver Cubes*. Graphs and Combinatorics, Volume 24, Number 5, 2008.

[51] Andrzej Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań*. PWN, Warszawa 1989.

[52] J. P. Guilford: *Podstawowe metody statystyczne w psychologii i pedagogice*. PWN, Warszawa 1960.

[53] Gila Hanna: *Mathematical Proof*. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2002.

[54] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya: *Inequalities*. Cambridge, 1952.

[55] Jacques Hadamard: *Psychologia odkryć matematycznych*. PWN, Warszawa 1964.

[56] Tomomi Hirano: *Achieving Mathematical Excellence in Japan: Results and Implications*. International Journal of Educational Research Volume 25, Issue 6, 1996.

[57] Ross Honsberger: *In Polya's Footsteps. Miscellaneous Problems and Essays*. The Mathematical Assocation of America, 1997.

[58] Lenny Jones: *Variations on a Theme of Sierpiński*. Journal of Integer Sequences, Vol. 10, 2007.

[59] Kartezjusz: *Prawidła kierowania umysłem*. PIW, Warszawa, 1958.

[60] Maciej Klakla: *Dostrzeganie problemów a uzdolnienia matematyczne uczniów*. Prace z Dydaktyki Matematyki, Kraków, 1978.

[61] Maciej Klakla: *Z badań nad rozpoznawaniem uzdolnień matematycznych*. Dydaktyka Matematyki, numer 2, Warszawa, 1982.

[62] Marek Kordos: *Wykłady z historii matematyki*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994.

[63] Jan Konior: *Poszukiwanie dowodu a jego redagowanie w nauczaniu matematyki*. Dydaktyka matematyki, Kraków, 1983.

[64] Tadeusz Kotarbiński: *Sprawność i błąd*. PZWS, Warszawa, 1970.

[65] Lev Kourliandtchik: *Powrót do krainy nierówności*. Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2001.

[66] Lev Kourliandtchik: *Wędrówki po krainie nierówności*. Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2000.

[67] Lev Kourliandtchik: *Słynne nierówności*. Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2002.

[68] Lev Kourliandtchik: *Suma pochodnych*. Delta, nr 365 (10/2004), Warszawa, 2005.

[69] Józef Kozielecki: *Strategia psychologiczna. Psychologiczna strategia rozwiązywania problemów*. Nasza Księgarnia, Warszawa, 1963.

[70] Józef Kozielecki: *Zagadnienia psychologii myślenia*. PWN, Warszawa, 1966.

[71] Michał Krych: *Klasy Matematyczne*. Matematyka Społeczeństwo Nauczanie, nr 14 (1/1995), Siedlce 1995.

[72] Zofia Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki*. WSiP, Warszawa, 1977.

[73] Zofia Krygowska: *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki*. Dydaktyka Matematyki, nr 1, 1982

[74] Zofia Krygowska: *Zrozumieć błąd w matematyce*. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Ser. 5: Dydaktyka Matematyki, nr 10, 1989.

[75] W. Krysicki i.in.: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach cz. 2*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

[76] Borys Kukushkin: *The Olympiad Movement in Russia*. International Journal of Educational Research Volume 25, Issue 6, 1996.

[77] Imre Lakatos: *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*. Tikkun, Warszawa 2005.

[78] Lau Chi Hin: *Muirhead's Inequality*. Mathematical Excalibur (`www.math.ust.hk/mathematical_excalibur`), vol. 13, nr 1, 2006.

[79] *ICMI Report on Mathematical Contests in Secondary Education (Olympiad)*. Educational Studies in Mathematics, Volume 2, 1969.

[80] Loren C. Larson: *Problem-Solving Through Problems*. Springer Verlag, New York, 1983.

[81] Hojoo Lee: *Dowodzenie nierówności*. Delta, nr 337 (6/2002), Warszawa 2002.

[82] J. Linhart: *Proces i struktura uczenia się ludzi*. PWN, Warszawa, 1972.

[83] J. Mason, L. Burton, K. Stacey: *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley,London, 1982.

[84] J. Mason, M. Spence: *Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to-act in the moment*, Educational Studies in Mathematics, Volume 38, 1999.

[85] Zbigniew Michalewicz, David B. Fogel: *How to Solve It: Modern Heuristic*. Springer, 1999.

[86] Dragoslav S. Mitrinović: *Elementarne nierówności*. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1972.

[87] Dragoslav S. Mitrinović: *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[88] Bolesław Niemierko: *Pomiar wyników kształcenia*. WSiP, Warszawa, 1975.

[89] Bolesław Niemierko: *ABC testów osiągnięć szkolnych*. WSiP, Warszawa, 1999.

[90] Bogdan Jan Nowecki: *Badania nad efektywnością kształtowania pojęć twierdzenia i dedukcji u uczniów klas licealnych w zmodernizowanym nauczaniu matematyki*. Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1978.

[91] Kazuhiko Nunokawa: *Applying Lakatos' Theory to the Theory of Mathematical Problem Solving*. Educational Studies in Mathematics, Volume 31, Number 3, 1996.

[92] Kazuhiko Nunokawa: *Giving New Senses to the Existing Elements: A Characteristic of the Solution Accompanied by Global Restructuring*. The Journal of Mathematical Behavior, Volume 16, Issue 4, 1997.

[93] Kazuhiko Nunokawa: *Interactions Between Subgoals and Understanding of Problem Situations in Mathematical Problem Solving*. Mathematical Behavior, Volume 20, 2001, str. 187-205.

[94] *Olimpiada Matematyczna*, Warszawa, 1950.

[95] Michael Otte: *Mathematical Knowledge and the Problem of Proof*. Educational Sudies in Mathematics 26.4.

[96] Adam Osękowski: *O pewnej metodzie rozwiązywania nierówności*. Materiały z konferencji *Konkursy matematyczne w Polsce*, Sulejów, 2008.

[97] Bernard Parzysz: *„Widzieć" i „Wiedzieć"*. Dydaktyka Matematyki, 11, Warszawa, 1989.

[98] Henryk Pawłowski: *Kółko matematyczne dla olimpijczyków*. Turpress, Toruń, 1994.

[99] Henryk Pawłowski: *Matematyka 1, zakres rozszerzony; podręcznik dla liceum ogólnokształcącego*. Operon, Gdynia 2003; *Matematyka 2, zakres rozszerzony; podręcznik dla liceum ogólnokształcącego*. Operon, Gdynia 2004; *Matematyka 3, zakres rozszerzony; podręcznik dla liceum ogólnokształcącego*. Operon, Gdynia 2004.

[100] Henryk Pawłowski: *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Teoria liczb, algebra i elementy analizy matematycznej*. Tutor, Toruń, 2005.

[101] Józef Pieter: *Psychologia uczenia się*. PZWS, Warszawa 1961.

[102] Marcin Pitera: *Kolorowe kwadraty*. Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2008.

[103] Marcin Pitera: *Niezmienniki w geometrii*. Delta, nr 370 (3/2005), Warszawa 2005.

[104] George Polya: *Odkrycie matematyczne*. WNT, Warszawa, 1975.

[105] George Polya: *Jak to rozwiązać*. PWN, Warszawa, 1993.

[106] J.P. Ponarin: *Algebra kompleksnich čisel w geometričeskich zadačach*. Moskwa, 2004.

[107] W.W.Prasołow: *Zadači po planimetrii*. Glawnaya Riedakcya Fizyko-Matematičeskoj Literatury, Moskwa, 1991.

[108] *Program szkoły podstawowej, matematyka; klasy IV - VIII*. MEN, Warszawa 1990.

[109] *Matematyka: program liceum ogólnokształcącego oraz liceum zawodowego i technikum*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1990.

[110] Łukasz Pruski: *O metodzie nauczania rozwiązywania zadań matematycznych*. Zadanie, metoda, rozwiązanie. Tom 5, WNT, Warszawa, 1984.

[111] Hendrik Radatz: *Errors in Mathematical Education*. Journal for Research in Mathematics Education nr 10, s.163-172.

[112] Paulo Ribenboim: *Mała księga wielkich liczb pierwszych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1997.

[113] Andrzej Schinzel: *Pięćdziesiąt lat Olimpiady Matematycznej*. Wiadomości Matematyczne, 36, 2000.

[114] A.H. Schoenfeld: *Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance*. Journal for Research in Mathematics Education, 10.3, 1979.

[115] A.H. Schoenfeld: *Jak nauczać twórczego rozwiązywania zadań*. Zadanie, metoda, rozwiązanie. Zbiór 3, WNT, Warszawa, 1980.

[116] A.H. Schoenfeld: *Strategie rozwiązywania zadań w uniwersyteckim nauczaniu matematyki*. Zadanie, metoda, rozwiązanie. Zbiór 4, WNT, Warszawa, 1982.

[117] A.H. Schoenfeld: *Measure of problem-solving performance and problem-solving instruction*. Journal for Research in Mathematics Education, 13, 1982.

[118] A.H. Schoenfeld: *Mathematical problem solving*. Akademic Press, 1985.

[119] Wacław Sierpiński: *Sur les nombres premiers de la forme* $n^n + 1$. L'Enseignement Math., 4, 1958.

[120] Wacław Sierpiński: *Sur un problème les nombres* $k \cdot 2^n + 1$. Elem. d. Math. 15, 1960.

[121] Anna Sierpińska: *Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki*. Dydaktyka Matematyki, 8, Warszawa, 1988.

[122] Martin A. Simon: *Beyond Inductive and Deductive Reasoning: the Search for a Sense of Knowing*. Educational Studies in Mathematics, Volume 30, Number 2, 1994.

[123] Alan R. Shono: *A Cross-Cultural Analisis of Similarties and Diferences Among Math Olympiads in China, Taiwan and The United States*. International Journal of Educational Research Volume 25, Issue 6, 1996.

[124] Kazimierz Skurzyński: *Niektóre metody rozwijania matematycznej aktywności uczniów*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin, 1997.

[125] *Sprawozdania Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej*. numery:1-57, Warszawa 1951-2008.

[126] Edward Stachowski: *Matematyka akademicka. Program nauczania matematyki. IV etap edukacyjny*. Warszawa, 2006.

[127] Lech Stawikowski: *Ciągi jednomonotoniczne, funkcje supermodularne, i nierówności*. Delta, nr 377 (10/2005), Warszawa, 2005.

[128] Rena F. Subotnik, Anthony D. Miserandino, Paula Olszewski-Kubilius: *Implications of the Olympiad Studies for the Development of Mathematical Talent in School*. International Journal of Educational Research Volume 25, Issue 6, 1996.

[129] Piotr Syryczynski: *XXV Olimpiada Matematyczna, czyli Turniej Mózgów widziany oczyma uczestnika*. Delta nr 3, Warszawa, 1975.

[130] Jan Feliks Szurek: *Przyczyny niepowodzeń uczniów klas jedenastych w rozwiązywaniu zadań matematycznych*. Praca doktorska napisana pod kierunkiem prof. dr. Wincentego Okonia w Katedrze Pedagogiki UW, Warszawa 1960.

[131] Michał Szurek: *Opowieści matematyczne*. WSiP, Warszawa 1987.

[132] Michał Szurek: *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów; tomy 1 - 8*. Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2006.

[133] Michał Szurek: *Matematyka przy kominku*. BTC, Legionowo, 2008.

[134] Michał Szurek: *Czy Wielkie Twierdzenie Fermata jest ważnym zagadnieniem mateamtycznym? Rozmowa z prof. dr. Andrzejem Schinzlem*. Delta 117 (9/1983), Warszawa, 1983.

[135] Zbigniew Szurig: *Konstrukcje testów i sprawdzianów z matematyki*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1978.

[136] David Tall: *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2002.

[137] Terence Tao: *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective*. University of California, Los Angeles, 2005.

[138] Stefan Turnau: *Wybrane zagadnienia metodyki matematyki*. PZWS, Warszawa, 1971, Elementy logiki w nauczaniu matematyki.

[139] Anna Widur: *Kompetencje matematyczne uczniów kończących gimnazjum*. Praca doktorska, UP, 2009.

[140] R.S. Woodworth, H. Schlosberg: *Experimental psychology*. London, 1955. Wydanie polskie: *Psychologia eksperymentalna*. PWN, Warszawa 1963.

[141] Wojciech Wójcik: *Braids, Floer Homology and Forcing in Two and Three Dimensional Dynamics*. Amsterdam 2007.

[142] S.I. Zetel: *Geometria trójkąta*. PZWS, Warszawa 1964.

[143] Zha Zixiu, Liu Pengzhi, Tao Xiaoyong: *Nurturing Factors That Promote Mathematics Achievement in Mainland China*. International Journal of Educational Research Volume 25, Issue 6, 1996.

[144] J. Zydler: *Geometria*. Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.

Spis tabel

1 **Skala ocen stosowana w zawodach Olimpiady Matematycznej** 25
2 Współczynnik korelacji i rodzaj korelacji. 28
3 **Oznaczenia we wzorach przy obliczaniu selektywności** 29
4 **Przykład zadania, które źle selekcjonuje.** 31
5 **Przykład zadania, które dobrze selekcjonuje.** 31
6 **Liczba analizowanych zadań o nierównościach.** 35
7 **Liczba analizowanych zadań z geometrii płaskiej.** 35
8 **Liczba analizowanych zadań z geometrii przestrzennej.** 35
9 **Sposoby rozwiązywania zadania 3.2.57 w poszczególnych okręgach.** u - liczba uczestników. 52
10 **Sposoby rozwiązywania zadania 3.2.57 w wybranych szkołach. Pierwsza liczba oznacza liczbę poprawnych rozwiązań daną metodą; liczba druga oznacza liczbę wszystkich rozwiązań daną metodą.** 53
11 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - wielkości w liczbach bezwzględnych.** 64
12 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - wielkość wyrażona w procentach w stosunku do liczby wszystkich prac.** 64
13 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57- wielkość wyrażona w procentach w stosunku do liczby wszystkich niepustych prac.** . . . 65
14 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - zależność od tego, czy przeszli do III etapu.** 66
15 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu - wielkość wyrażona w procentach.** . . 66
16 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - zależność od płci.** 66
17 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - zależność od płci - wielkość wyrażona w procentach.** 67
18 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - zależność od klasy, do jakiej uczęszczał uczestnik.** 67
19 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 - zależność od klasy, do której uczęszczał zawodnik - wielkość wyrażona w procentach.** 67
20 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 w wybranych szkołach.** 68
21 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 3.2.57 w wybranych szkołach - wielkość wyrażona w procentach.** 68
22 **Jak wielu uczniów jest przekonanych, że zrobiło zadanie 3.2.57.** . . . 69
23 **Wykorzystanie nierówności Cauchy'ego w "za grubych" szacowaniach w zadaniu 6.2.58** 75
24 **Błędne szacowania w zadaniu 6.2.58** 75
25 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - wielkości w liczbach bezwzględnych.** 76
26 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich prac.** 77
27 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - zależność od tego, czy przeszli do III etapu.** 78
28 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu - wielkość wyrażona w procentach.** . . 78
29 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - zależność od płci.** 78
30 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - zależność od płci - wielkość wyrażona w procentach.** 78

31 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - zależność od klasy, do jakiej uczęszczał uczestnik.** 79
32 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 - zależność od klasy, do której uczęszczał zawodnik - wielkość wyrażona w procentach.** 79
33 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 w wybranych szkołach.** 79
34 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 6.2.58 w wybranych szkołach- wielkość wyrażona w procentach.** 80
35 **Jak wielu uczniów jest przekonanych, że zrobiło zadanie 6.2.58.** . . . 81
36 **Liczba rozwiązań zadania 6.3.58** 84
37 **Wykorzystanie twierdzeń w rozwiązaniach zadania 3.2.57 przez uczniów w poszczególnych okręgach i wybranych szkołach. Pierwsza liczba opisuje liczbę prac, w których uczniowie poprawnie zastosowali dane twierdzenie; druga liczba opisuje liczbę wszystkich prac, w których uczniowie próbowali zastosować dane twierdzenie.** 95
38 **Wykorzystanie metod dowodzenia w zadaniu 6.2.58.** 99
39 **Wykorzystanie metod dowodzenia w zadaniu 6.3.58.** 100
40 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 - wielkości w liczbach bezwzględnych.** 133
41 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich prac.** 134
42 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 - wielkości wyrażona w procentach w stosunku do liczby wszystkich niepustych prac.** 134
43 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu.** 134
44 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu - wielkości wyrażone w procentach.** . 135
45 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w zależności od płci.** 135
46 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w zależności od płci - wielkości wyrażone w procentach.** 135
47 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 - zależność od klasy, do jakiej uczęszczał uczestnik.** 135
48 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w zależności od klasy, do której uczęszczał zawodnik - wielkości wyrażone w procentach.** 136
49 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w wybranych szkołach.** 136
50 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 2.2.57 w wybranych szkołach - wielkości wyrażone w procentach.** 136
51 **Jak wielu uczniów jest przekonanych, że zrobiło zadanie 2.2.57.** . . . 137
52 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 - wielkości w liczbach bezwzględnych.** 176
53 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich prac.** 176
54 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich niepustych prac.** 177
55 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 - zależność od tego, czy przeszli do III etapu.** 177
56 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu - wielkości wyrażone w procentach.** . 177

57 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 w zależności od płci.** . . . 177
58 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 w zależności od płci - wielkości wyrażone w procentach.** . . . 178
59 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 w zależności od klasy, do jakiej uczęszczał uczestnik.** . . . 178
60 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.57 w zależności od klasy, do której uczęszczał zawodnik - wielkości wyrażone w procentach.** . . . 178
61 **Błędy popełniane przez uczniów z wybranych szkół w zadaniu 5.2.57.** 179
62 **Błędy popełniane przez uczniów z wybranych szkół w zadaniu 5.2.57 - wielkości wyrażone w procentach.** . . . 179
63 **Jak wielu uczniów jest przekonanych, że zrobiło zadanie 5.2.57.** . . . 180
64 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 - wielkości w liczbach bezwzględnych.** . . . 205
65 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich prac.** . . . 205
66 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu - wielkości wyrażone w procentach w stosunku do liczby wszystkich niepustych prac.** . . . 206
67 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu.** . . . 206
68 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 w zależności od tego, czy przeszli do III etapu - wielkości wyrażone w procentach.** . . . 207
69 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 w zależności od płci.** . . . 207
70 **Błędy popełniane w zadaniu 5.2.58 w zależności od płci - wielkości wyrażone w procentach.** . . . 207
71 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 w zależności od klasy, do jakiej uczęszczał uczestnik.** . . . 207
72 **Błędy popełniane przez uczniów w zadaniu 5.2.58 w zależność od klasy, do której uczęszczał zawodnik - wielkości wyrażone w procentach.** 208
73 **Błędy popełniane przez uczniów z wybranych szkół w zadaniu 5.2.58.** 208
74 **Błędy popełniane przez uczniów z wybranych szkół w zadaniu 5.2.58 - wielkości wyrażone w procentach.** . . . 208
75 **Jak wielu uczniów jest przekonanych, że zrobiło zadanie 5.2.58.** . . . 209
76 **Związek między wynikiem zadania 1.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału** . . . 235
77 **Związek między wynikiem zadania 2.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału** . . . 235
78 **Związek między wynikiem zadania 3.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału** . . . 235
79 **Związek między wynikiem zadania 4.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału** . . . 235
80 **Związek między wynikiem zadania 5.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału** . . . 235
81 **Związek między wynikiem zadania 6.2.57 a tym, czy uczeń awansował do finału** . . . 236
82 **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu II 57 OM obliczone dla 560 prac uczestników. Górna wartość obliczona jest przy skali oceniania 0-1, a dolna dla skali 0-2-5-6.** Wszystkie współczynniki są istotne z $p < 0,05$. . . . 238

83 **Moc różnicująca zadań II etapu 57 Olimpiady Matematycznej.** 238
84 **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 57 OM. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej kategorii.** 239
85 **Moc różnicująca zadań 3 etapu 57 Olimpiady Matematycznej.** 242
86 **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu III 57 OM obliczone dla 125 prac uczestników przy skali oceniania 0-1.** Wszystkie współczynniki, które nie są zaznaczone *kursywą* są istotne z $p < 0,05$. 242
87 **Uczestnicy III etapu 57 OM.** 243
88 **Poprawne rozwiązania zadań III etapu 57 OM. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej kategorii (wybrane szkoły, z których pochodziło co najmniej pięciu finalistów).** 244
89 **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu III obliczone dla 125 prac uczestników. Górna wartość obliczona jest przy skali oceniania 0-1, a dolna dla skali 0-2-5-6.** Wszystkie współczynniki, które nie są zaznaczone *kursywą* są istotne z $p < 0,05$. 244
90 **Dane statystyczne o zadaniach II etapu 57 OM.** 245
91 **Dane statystyczne o pracach tych uczestników II etapu, którzy awansowali do finału 57 OM.** 246
92 **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 57 OM wg miejscowości z co najmniej 5 uczestnikami. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej miejscowości.** 247
93 **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 57 OM wg szkół z co najmniej 5 uczestnikami. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej szkoły.** 248
94 **Dane statystyczne o pracach finalistów 57 OM.** 249
95 **Związek między wynikiem zadania 1.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału** 251
96 **Związek między wynikiem zadania 2.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału** 252
97 **Związek między wynikiem zadania 3.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału** 252
98 **Związek między wynikiem zadania 4.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału** 252
99 **Związek między wynikiem zadania 5.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału** 252
100 **Związek między wynikiem zadania 6.2.58 a tym, czy uczeń awansował do finału** 253
101 **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu II 58 OM obliczone dla 562 prac uczestników. Górna wartość obliczona jest przy skali oceniania 0-1, a dolna dla skali 0-2-5-6.** Wszystkie współczynniki są istotne z $p < 0,05$. 255
102 **Moc różnicująca zadań II etapu 58 Olimpiady Matematycznej.** 255
103 **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 58 OM. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej kategorii.** 256
104 **Poprawne rozwiązania zadań III etapu 58 OM. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej kategorii (wybrane szkoły, z których pochodziło co najmniej pięciu finalistów).** 259
105 **Moc różnicująca zadań III etapu 58 Olimpiady Matematycznej.** . . . 259
106 **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu III 58 OM obliczone dla 123 prac uczestników przy skali oceniania 0-1.** Wszystkie współczynniki, które nie są zaznaczone *kursywą* są istotne z $p < 0,05$. 260

107 **Współczynniki korelacji dla rozwiązań zadań etapu III 58 OM obliczone dla 123 prac uczestników.** Wszystkie współczynniki, które nie są zaznaczone *kursywą* są istotne z $p < 0,05$. 260
108 **Uczestnicy III etapu 58 OM.** 261
109 **Dane statystyczne o zadaniach II etapu 58 OM.** 262
110 **Dane statystyczne o pracach tych uczestników II etapu, którzy awansowali do finału 58 OM.** 263
111 **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 58 OM wg miejscowości z co najmniej 5 uczestnikami. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej miejscowości.** 264
112 **Poprawne rozwiązania zadań II etapu 58 OM wg szkół z co najmniej 5 uczestnikami. Pod numerami zadań procent poprawnych rozwiązań uczniów z danej szkoły.** 265
113 **Dane statystyczne o pracach finalistów 58 OM.** 266
114 **Dane statystyczne o trudności zadań drugich etapów 54 - 58 OM.** . . 267
115 **Dane statystyczne o trudności zadań trzecich etapów 52 - 58 OM.** . 267
116 **Uczestnicy 2 etapu od 54 do 60 OM.** 275
117 **Liczba uczestników finałów ze szkół, które od 6 OM do 60 OM miały co najmniej 25 finalistów.** 278
118 **Liczba uczestników finałów ze szkół, które od 50 OM do 60 OM miały co najmniej 10 finalistów.** 279
119 **Sformułowania zadań Olimpiady Matematycznej** 299
120 **Prac z błędami powstałymi w wyniku walki o wynik w zadaniach drugich etapów 57 i 58 OM (dane w procentach).** 315
121 **Prac z blefami w zadaniach drugich etapów 57 i 58 OM (dane w procentach).** 316
122 **Prac z błędami powierzchownej wiedzy w zadaniach drugich etapów 57 i 58 OM (dane w procentach).** 317
123 **Prac z poszczególnymi typami błędów w rozwiązaniach zadań trzecich etapów 57 i 58 OM (dane w procentach).** 317
124 **Współczynnik trudności zadań drugich etapów 57 i 58 OM.** 330
125 **Współczynnik trudności zadań trzecich etapów 57 i 58 OM.** 330
126 **Moc różnicująca zadań II etapu 57 i 58 OM.** 331
127 **Moc różnicująca zadań III etapu 57 i 58 OM.** 332
128 **Porównanie trudności zadań i liczby sposobów rozwiązań oraz samooceny uczniów** 333
129 **Oceny uzyskane za rozwiązania zadania 1.2.56 z uwzględnieniem klasy, do której uczęszczał uczeń.** 334

Spis rysunków

1 **Diagramy do danych z tabel 4 (z lewej) i 5 (z prawej).** 31
2 **Medal 50-lecia Olimpiady Matematycznej.** 32
3 Rozwiązanie zadania 3.3.57 zaproponowane przez ucznia KR04. 186
4 **Punktacja rozwiązań zadań z II etapu 57 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów.** 234
5 **Diagramy do danych z tabel 76 (z lewej) i 77 (z prawej).** 236
6 **Diagramy do danych z tabel 78 (z lewej) i 79 (z prawej).** 236
7 **Diagramy do danych z tabel 80 (z lewej) i 81 (z prawej).** 237

8 **Punktacja rozwiązań finalistów w 2 etapie 57 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów** 237
9 **Punktacja rozwiązań w 3 etapie 57 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów** 242
10 **Punktacja rozwiązań w II etapie 58 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów.** 251
11 **Diagramy selektywności zadań 1.2.58 (z lewej) i 2.2.58 (z prawej).** . 253
12 **Diagramy selektywności zadań 3.2.58 (z lewej) i 4.3.58 (z prawej).** . 253
13 **Diagramy selektywności zadań 5.2.58 (z lewej) i 6.2.58 (z prawej).** . 254
14 **Punktacja rozwiązań finalistów w II etapie 58 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów** 254
15 **Punktacja rozwiązań finalistów w III etapie 58 Olimpiady Matematycznej. Na osi pionowej oznaczono liczbę uczniów, zaś kolejne słupki oznaczają oceny 0, 2, 5 i 6 punktów** 258
16 **Trudność zadań II etapu olimpiad od 52 OM do 58 OM** 268
17 **Porównanie średniej trudności zadań geometrycznych ze średnią trudnością zadań II etapu olimpiad od 52 OM do 58 OM**. Zadania geometryczne - słupki po prawej. 268
18 **Trudność zadań III etapu olimpiad od 52 OM do 58 OM** 269
19 **Porównanie średniej trudności zadań geometrycznych ze średnią trudnością zadań III etapu olimpiad od 52 OM do 58 OM**. Zadania geometryczne - słupki po prawej. 269
20 **Porównanie średniej trudności zadań stereometrycznych ze średnią trudnością zadań III etapu olimpiad od 52 OM do 58 OM**. Zadania stereometryczne - słupki po prawej. 270
21 **Liczba zadań na dowodzenie nierówności w poszczególnych Olimpiadach** 271
22 **Liczba zadań na dowodzenie nierówności algebraicznych i geometrycznych w poszczególnych Olimpiadach** 272
23 **Zadania na dowodzenie poszczególnych typów nierówności w Olimpiadach od 1 do 58** 272
24 **Liczba zadań z geometrii płaskiej w poszczególnych Olimpiadach.** . . 273
25 **Liczba zadań stereometrycznych w poszczególnych Olimpiadach** . . . 273
26 **Liczba zadań stereometrycznych w I etapach wszystkich olimpiad matematycznych** 274
27 **Liczba zadań stereometrycznych w II etapach (z lewej) i III etapów (z prawej) wszystkich olimpiad matematycznych.** 274
28 **Porównanie liczby szkół i uczestników II etapów od 54 OM do 60 OM.** 276
29 **Porównanie liczby szkół i uczestników finałów od 6 OM do 60 OM.** . 276
30 **Stosunek liczby uczestników finałów OM do liczby szkół, z których pochodzili. Na osi odciętych numer OM. Na osi rzędnych iloraz liczby uczestników i liczby szkół.** 277
31 **Procent uczniów w poszczególnych finałach OM pochodzących z jednej, dwóch, trzech, czterech najlepszych szkół.** 277
32 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i V LO w Krakowie.** 280

33 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i XIV LO we Wrocławiu.** . . . 281
34 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i IV LO w Toruniu.** . . . 281
35 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i III LO w Wrocławiu.** . . . 282
36 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i I LO w Gdańsku.** . . . 282
37 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i III LO w Gdyni.** . . . 283
38 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i II LO w Lublinie.** . . . 283
39 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i IX LO w Warszawie.** . . . 284
40 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i XIII LO w Szczecinie.** . . . 284
41 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i VI LO w Warszawie.** . . . 285
42 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i I LO w Lublinie.** . . . 285
43 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i I LO w Krakowie.** . . . 286
44 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i XII LO w Łodzi.** . . . 286
45 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i II LO w Krakowie.** . . . 287
46 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i I LO w Chorzowie.** . . . 287
47 **Porównanie liczby finalistów z XIV LO w Warszawie i V LO w Bielsku-Białej.** . . . 288
48 **Typy zadań Olimpiady Matematycznej.** . . . 297
49 **Typy zadań I etapów Olimpiady Matematycznej.** . . . 298
50 **Typy zadań II etapów Olimpiady Matematycznej.** . . . 298
51 **Typy zadań III etapów Olimpiady Matematycznej.** . . . 298