Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Jakub Zygadło

Lokalnie skończone endomorfizmy wielomianowe

Rozprawa doktorska

Promotor
prof. dr hab. Ludwik M. Drużkowski

Kraków 2009

Składam serdeczne podziękowania
Panu Profesorowi dr hab. Ludwikowi M. Drużkowskiemu
za pomoc okazaną w trakcie pisania tej pracy.

Spis treści

Wstęp

W niniejszej pracy badana jest klasa lokalnie skończonych endomorfizmów wielomianowych, wprowadzona przez J.-P. Furtera i S. Maubacha w [FM]. W najprostszym rozważanym przypadku - odwzorowania wielomianowego $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ - mówimy, że F jest lokalnie skończone, jeśli istnieje niezerowy wielomian jednej zmiennej $p(T) = \sum_{i=0}^{d} p_i T^i \in \mathbb{C}[T]$, dla którego odwzorowanie

$$p(F) = \sum_{i=0}^{d} p_i F^{\circ i}, \text{ gdzie } F^{\circ i} := \underbrace{F \circ \ldots \circ F}_{i \text{ razy}}$$

jest identycznościowo równe zeru. Natychmiastowym przykładem są tu odwzorowania liniowe - w tym wypadku jako wielomian p wystarczy wziąć wielomian charakterystyczny (tw. Cayley'a-Hamiltona). Przez analogię, wielomian p występujący w powyższej definicji nosi nazwę wielomianu charakterystycznego odzworowania F - jego wyznaczenie jest jednym z podstawowych celów pracy. Istnienie takiego wielomianu nakłada znaczne ograniczenia na odwzorowanie F - ma ono wiele własności charakterystycznych dla odwzorowań liniowych; w szczególności: surjektywność, bijektywność oraz nieznikanie jakobianu F są warunkami równoważnymi, ponadto stowarzyszony endomorfizm F^* pierścienia wielomianów ma rozkład Jordana. Jednocześnie istnieją wysoce nietrywialne przykłady odwzorowań lokalnie skończonych, np. automorfizm Nagaty ([Na], [SU1]) - ich prezentacja jest jednym z celów pracy. Kolejnym jest przedstawienie związków endomorfizmów lokalnie skończonych z automorfizmami wielomianowymi oraz różniczkowaniami algebr afinicznych, jak również rozszerzenie definicji endomorfizmu lokalnie skończonego na przypadek ciała $\mathbf{k}$ charakterystyki zero (niekoniecznie algebraicznie domkniętego).

Rozdział 1 zawiera spis najczęściej używanych oznaczeń oraz elementarne fakty wykorzystywane w dalszej części pracy. Dla wygody czytelnika przypo-

minamy w nim informacje dotyczące ciągów spełniających rekurencję liniową (ang. *linear recurrent sequences*) oraz pokazujemy, że podstawowe własności endomorfizmów lokalnie skończonych, udowodnione w pracy [FM] sa prawdziwe dla dowolnego ciała charakterystyki 0.

W rozdziale 2 podajemy - poprawiając wcześniejsze wyniki w tym zakresie - formułę na wielomian charakterystyczny endomorfizmu F w zależności od jego części liniowej (tw. 2.3). Wyliczamy także *explicite* wielomian minimalny dla automorfizmu trójkątnego $\mathbf{k}^n$ (tw. 2.13), co w połączeniu z wynikami rozdziału 4 pozwala m. in. określić odpowiadające mu różniczkowanie pierścienia wielomianów. W dalszej części tego rozdziału zajmujemy się przypadkiem dwóch zmiennych: podajemy optymalne oszacowanie stopnia wielomianu minimalnego oraz przykłady sugerujące, że dla większej liczby zmiennych proste oszacowanie nie istnieje.

Rozdział 3 dotyczy podgrupy generowanej przez automorfizmy lokalnie skończone w grupie automorfizmów wielomianowych. Pokazujemy, że grupa ta jest normalna dla dowolnego n oraz dowodzimy kilku faktów o podgrupach normalnych. Warto zauważyć, że w przypadku odwzorowań wielomianowych $\mathbf{k}^n$ rozważana podgrupa jest albo nietrywialnym przykładem podgrupy normalnej (takie przykłady w zasadzie nie są znane w literaturze) albo automorfizmy lokalnie skończone tworzą zbiór generatorów grupy $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$.

W rozdziale 4 analizujemy związki między automorfizmami lokalnie skończonymi a różniczkowaniami, w szczególności podajemy dokładny wzór na wielomian minimalny automorfizmu będącego eksponentem różniczkowania lokalnie nilpotentnego (tw. 4.5). Dalsza część rozdziału poświęcona jest wyznaczeniu różniczkowania lokalnie skończonego, od którego pochodzi zadany automorfizm trójkątny (tw. 4.10). Część wyników tego rozdziału została opublikowana w pracy [Z1].

Praca została częściowo sfinansowana z grantu promotorskiego MNiSW N N201 367036.

Rozdział 1

Preliminaria

1.1 Oznaczenia

Rozpoczynamy od ustalenia oznaczeń przyjętych w pracy. W przypadku pojęć niestandardowych lub definiowanych w tekście, obok krótkiego opisu podany jest numer strony, na której można znaleźć precyzyjną definicję.

$A \subset B$	- A jest podzbiorem zbioru B (niekoniecznie właściwym)
$\#S$	- liczba elementów zbioru S
id_S	- odwzorowanie identycznościowe na zbiorze S
$\mathbb{N}$	- zbiór liczb naturalnych $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{k}$	- ciało charakterystyki 0
$\mathbf{k}^*$	- grupa elementów odwracalnych ciała $\mathbf{k}$
$\bar{\mathbf{k}}$	- domknięcie algebraiczne ciała $\mathbf{k}$
$\underline{X}$	- zestaw zmiennych $X_1, \ldots, X_n$
$\mathbf{k}^{[n]} = \mathbf{k}[\underline{X}]$	- pierścień wielomianów n zmiennych o współczynnikach z ciała $\mathbf{k}$
$\deg_{X_i} f$	- stopień wielomianu f ze względu na zmienną X_i
$\deg f$	- całkowity stopień wielomianu f (tzw. total degree)
$\deg F$	- stopień odwzorowania F, równy $\max_{i=1\ldots n} \deg F_i$ jeśli $F = (F_1, \ldots, F_n)$
$F'(\underline{X})$	- różniczka odwzorowania F (identyfikowana z macierzą Jacobiego $(\frac{\partial F_i(\underline{X})}{\partial X_j})$)
$\mathrm{J}F(\underline{X})$	- jakobian odwzorowania F, równy $\det(\frac{\partial F_i(\underline{X})}{\partial X_j})$
$\mathrm{Lin}(F)$	- część liniowa odwzorowania F (str. 8)
$L.v$	- wartość odwzorowania liniowego L na wektorze v

$F^{\circ i}$ - i-krotne złożenie odwzorowania F

$\mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$ - zbiór wszystkich lokalnie skończonych endomorfizmów wielomianowych przestrzeni $\mathbf{k}^n$ (str. 11)

I_F - ideał wielomianów charakterystycznych odwzorowania F (takich, że $p(F) = 0$ - str. 11)

μ_F - wielomian minimalny odwzorowania F (str. 11)

$\langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ - ideał lub podgrupa generowane przez elementy $f_1, \ldots, f_r$

$\mathrm{span}(S)$ - podprzestrzeń wektorowa rozpięta na elementach zbioru S

Będziemy bardzo często posługiwać się jednomianami, ustalamy zatem terminologię.

Niech $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Przez jednomian n zmiennych rozumiemy wyrażenie postaci $\underline{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\alpha^n}$ (ze współczynnikiem równym 1, czyli tzw. jednomian unormowany). Przyjmujemy $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ oraz $r^\alpha := r_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot r_n^{\alpha_n}$ dla $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbf{k}^n$. Ponadto dla wielomianu $f \in \mathbf{k}^{[n]}$ wprowadzamy następujące oznaczenia:

$\mathrm{mon}\, f$ - zbiór jednomianów występujących (z niezerowymi współczynnikami) w wielomianie f

$\mathrm{coef}_{\underline{X}^\alpha} f$ - współczynnik przy jednomianie $\underline{X}^\alpha$ w wielomianie f

$\mathrm{Lm}\, f$ - jednomian wiodący (najwyższego stopnia) wielomianu f względem ustalonego porządku

$\mathrm{Lt}\, f$ - składnik wiodący wielomianu f, równy $\mathrm{coef}_{\mathrm{Lm}\, f} f \cdot \mathrm{Lm}\, f$

Dla zbioru wielomianów $S \subset \mathbf{k}^{[n]}$ będziemy pisać $\mathrm{mon}\, S := \{\mathrm{mon}\, f : f \in S\}$, podobnie dla odwzorowania wielomianowego $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k}^n$ przyjmujemy $\mathrm{mon}\, F := \mathrm{mon}\{F_1, \ldots, F_n\}$. Analogicznie określamy zbiory $\mathrm{Lm}\, S$, $\mathrm{Lt}\, S$, $\mathrm{Lm}\, F$ oraz $\mathrm{Lt}\, F$.

Przypomnimy teraz podstawowe wiadomości z geometrii algebraicznej afinicznej (zob. np. [Ha]).

Niech V będzie podzbiorem algebraicznym $\mathbf{k}^n$ (tj. zadanym przez zbiór zer rodziny wielomianów) oraz $F = (F_1, \ldots, F_n) : V \to V$ odwzorowaniem regularnym (wielomianowym). Zbiór wszystkich takich odwzorowań będziemy oznaczać przez $\mathcal{P}(V)$. W dalszej części pracy stosujemy oznaczenie F^* na $\mathbf{k}$-endomorfizm algebry $\mathbf{k}[V] = \mathbf{k}^{[n]}/I(V)$ dany wzorem

$$F^* : \mathbf{k}[V] \ni g \mapsto g(F_1, \ldots, F_n) \in \mathbf{k}[V]$$

Odwrotnie, dla $\mathbf{k}$-endomorfizmu Φ algebry $\mathbf{k}^{[n]}$ możemy zdefiniować odwzorowanie wielomianowe $\Phi_* : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k}^n$ przez

$$\Phi_* = (\Phi(X_1), \ldots, \Phi(X_n))$$

Jak nietrudno sprawdzić $(F\circ G)^* = G^*\circ F^*$ oraz $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{\mathbf{k}[V]}$. Mamy także $(\Phi\circ\Psi)_* = \Psi_*\circ\Phi_*$ i $(\Phi_*)^* = \Phi$.

Odwzorowanie regularne $F : V \to V$ nazwiemy automorfizmem, jeśli F^* jest $\mathbf{k}$-automorfizmem algebry $\mathbf{k}[V]$ - oznacza to, że istnieje odwzorowanie wielomianowe $G : V \to V$ spełniające warunek $G\circ F = F\circ G = \mathrm{id}_V$. Zbiór wszystkich automorfizmów z działaniem składania tworzy grupę, oznaczaną $\mathrm{Aut}(V)$.

Będziemy używać następujących oznaczeń dla poniższych zbiorów automorfizmów wielomianowych $\mathbf{k}^n$:

- $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ - grupa wszystkich automorfizmów wielomianowych $F = (F_1,\ldots,F_n)$ przestrzeni $\mathbf{k}^n$,
- $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ - grupa automorfizmów liniowych $\mathbf{k}^n$: $F(0) = 0$, $\deg F = 1$
- $\mathrm{Af}_n(\mathbf{k})$ - grupa automorfizmów afinicznych $\mathbf{k}^n$: $\deg F = 1$
- $\mathrm{Diag}_n(\mathbf{k})$ - grupa automorfizmów diagonalnych $\mathbf{k}^n$: $F_i = c_iX_i$, $c_i \in \mathbf{k}^*$ dla $i = 1,\ldots,n$
- $\mathrm{EA}_n(\mathbf{k})$ - zbiór automorfizmów elementarnych $\mathbf{k}^n$: $F_i = X_i + G$, $G \in \mathbf{k}[X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n]$ oraz $F_j = X_j$ dla $j \neq i$
- $\mathrm{Tr}_n(\mathbf{k})$ - grupa automorfizmów trójkątnych $\mathbf{k}^n$: $F_i = c_iX_i + G_i$, $c_i \in \mathbf{k}^*$, $G_i \in \mathbf{k}[X_1,\ldots,X_{i-1}]$ dla $i = 1,\ldots,n$
- $\mathrm{TA}_n(\mathbf{k})$ - grupa automorfizmów rozkładalnych (ang. *tame*) $\mathbf{k}^n$: podgrupa $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ generowana przez $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ i $\mathrm{EA}_n(\mathbf{k})$

Uwaga: stosując powyższe oznaczenia będziemy pomijać ciało $\mathbf{k}$ (jeśli jest ono ustalone) i pisać GA_n, GL_n, etc.

Jeśli $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$, możemy zdefiniować część liniową odwzorowania F (ozn. $\mathrm{Lin}(F)$) wzorem

$$\mathrm{Lin}(F).\underline{X} := \frac{F(tX_1,\ldots,tX_n) - F(0)}{t}|_{t=0}$$

Łatwo sprawdzić, że w tej sytuacji (po naturalnych identyfikacjach): $\mathrm{Lin}(F) = F'(0) = (\frac{\partial F_i(0)}{\partial X_j})_{i,j=1\ldots n}$ oraz jeśli $G(0) = 0$, to $\mathrm{Lin}(F\circ G) = \mathrm{Lin}(F)\circ\mathrm{Lin}(G)$. Dla $F \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ z równości $G\circ F = \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}$ dostajemy $\det G'(F(\underline{X}))\det F'(\underline{X}) = 1$, co pokazuje, że $\mathrm{J}F(\underline{X}) = \det F'(\underline{X}) \in \mathbf{k}^*$ (jedyne elementy odwracalne pierścienia $\mathbf{k}^{[n]}$ to niezerowe stałe) i w szczególności $\mathrm{Lin}(F) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$.

Pytanie, czy zachodzi implikacja odwrotna a mianowicie czy

$$\mathrm{J}F(\underline{X}) \in \mathbf{k}^* \Rightarrow F \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$$

nosi nazwę Hipotezy Jakobianowej. Problem ten był badany już w roku 1939 przez Kellera (zob. [Ke]). Dobrym źródłem informacji na ten temat jest praca

[BCW] - pokazano tam m.in., że Hipotezę wystarczy udowodnić dla wszystkich $n > 1$ i odwzorowań $F = (F_1, \ldots, F_n)$ postaci $F_i = X_i + H_i(\underline{X})$, gdzie H_i są wielomianami jednorodnymi stopnia 3 (rezultat ten uzyskano również w pracy [Y]). Mimo dalszych zachęcających redukcji postaci odwzorowania o stałym jakobianie (zob. np. [Dr]), Hipotezy nie udało się do tej pory udowodnić lub obalić, nawet dla $n = 2$.

Będziemy korzystać z następującego lematu, który jest natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia o odwracaniu szeregów formalnych (zob. np. [E])

Lemat 1.1. *Niech $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$. Jeśli istnieje $G \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$, dla którego $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}$, to F jest automorfizmem oraz $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}$.*

1.2 Ciągi spełniające rekurencję liniową

W tym podrozdziale $\mathbb{V}$ oznacza przestrzeń wektorową (niekoniecznie skończonego wymiaru) nad ciałem $\mathbf{k}$ charakterystyki zero. Na zbiorze $\mathbb{V}^{\mathbb{N}}$ wszystkich ciągów o elementach z $\mathbb{V}$ wprowadzamy standardowo strukturę przestrzeni wektorowej: $(u_0, u_1, \ldots) + (v_0, v_1, \ldots) := (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots)$ oraz $\alpha(u_0, u_1, \ldots) := (\alpha u_0, \alpha u_1, \ldots)$. Określamy też operację liniową $s : \mathbb{V}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{V}^{\mathbb{N}}$ (zwaną „przesunięciem") wzorem $s(u_0, u_1, \ldots) := (u_1, u_2, \ldots)$. Niech teraz $p(T) = \sum_{i=0}^{d} p_i T^i \in \mathbf{k}[T]$ będzie wielomianem jednej zmiennej. Definiujemy odwzorowanie $p : \mathbb{V}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{V}^{\mathbb{N}}$ („podstawienie do wielomianu p") jako

$$p(u) := \sum_{i=0}^{d} p_i \underbrace{s \circ \ldots \circ s}_{i \text{ razy}}(u) = (\sum_{i=0}^{d} p_i u_i, \sum_{i=0}^{d} p_i u_{i+1}, \ldots)$$

Definicja 1.2. Powiemy, że ciąg u spełnia rekurencję liniową rzędu $d > 0$, jeśli $p(u) = 0$ dla pewnego wielomianu $p \in \mathbf{k}[T]$ stopnia d. Oznacza to dokładnie tyle, że przy pewnych $a_i \in \mathbf{k}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$u_{n+d} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_{d-1} u_{n+d-1}$$

(jeśli $p(T) = \sum_{i=0}^{d} p_i T^i$ i $p_d \neq 0$, można wziąć $a_i := -p_i/p_d$).

Przydatność ciągów spełniających rekurencję liniową wynika między innymi z następującego twierdzenia

Twierdzenie 1.3. *Niech $u \in \mathbb{V}^{\mathbb{N}}$ oraz $p(T) \in \mathbf{k}[T]$. Oznaczmy przez $\bar{\mathbf{k}}$ domknięcie algebraiczne $\mathbf{k}$ oraz $\bar{\mathbb{V}} = \mathbb{V} \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$. Jeśli $p(T) = c\prod_{i=1}^{d}(T - r_i)^{w_i}$ jest rozkładem wielomianu p na czynniki liniowe nad $\bar{\mathbf{k}}$ (przy czym $r_i \neq r_j$ dla $i \neq j$), to następujące warunki są równoważne:*

1. *$p(u) = 0$,*
2. *dla $i = 1, \ldots, d$ istnieją $q_i = (q_i^{(0)}, \ldots, q_i^{(w_i-1)}) \in \bar{\mathbb{V}}^{w_i}$, przy których $u_n = \sum_{i=1}^{d} r_i^n (\sum_{j=0}^{w_i-1} q_i^{(j)} n^j)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Można założyć, że ciało $\mathbf{k}$ jest algebraicznie domknięte. Jeśli $\mathbb{V} = \mathbf{k}$, dowód jest standardowy (zob. np. [Je]). W przypadku ogólnym wybieramy bazę przestrzeni $\mathbb{V}$ i stosujemy twierdzenie dla $\mathbf{k}$ do współczynników wektorów w tej bazie. ⊠

Wniosek 1.4. *Dla dowolnego $u \in \mathbb{V}^{\mathbb{N}}$ zbiór $I_u := \{p(T) \in \mathbf{k}[T] : p(u) = 0\}$ jest ideałem w $\mathbf{k}[T]$.*

Dowód. Wprost z definicji I_u jest podprzestrzenią wektorową $\mathbf{k}[T]$. Z poprzedniego twierdzenia wynika zawieranie $\mathbf{k}[T] \cdot I_u \subset I_u$ (można też bezpośrednio sprawdzić, że $T \cdot I_u \subset I_u$). ⊠

Jeśli ciąg u spełnia rekurencję liniową, to $I_u \neq \{0\}$. W tej sytuacji możemy postawić następującą definicję

Definicja 1.5. Dowolny niezerowy wielomian $p(T) \in I_u$ nazywamy wielomianem charakterystycznym ciągu u. Wielomian charakterystyczny najniższego możliwego stopnia o współczynniku przy najwyższej potędze równym 1 (tzn. unitarny generator ideału I_u) nazywamy wielomianem minimalnym ciągu u i oznaczamy μ_u.

Wyróżniamy dwie ważne klasy ciągów spełniających rekurencję liniową:

Definicja 1.6. Niech $u \in \mathbb{V}^{\mathbb{N}}$. Jeśli $\mu_u(T) = (T-1)^d$ dla pewnego $d > 0$, to mówimy, że u jest ciągiem unipotentnym (ang. *unipotent*). Jeśli natomiast $\mu_u(T) = \prod_{i=1,\ldots,d} (T - r_i)$, gdzie $r_i \in \bar{\mathbf{k}}$ oraz $r_i \neq r_j$ dla $i \neq j$, to powiemy, że ciąg u jest półprosty (ang. *semisimple*).

Wprost z twierdzenia 1.3 wynika, że u jest unipotentny $\Leftrightarrow u_n = \sum_{j=0}^{d} q^{(j)} n^j$ dla pewnego $d > 0$ oraz $q^{(j)} \in \mathbb{V}$ dla $j = 0, \ldots, d$. Podobnie u jest półprosty $\Leftrightarrow u_n = \sum_{i=0}^{d} q_i r_i^n$, dla pewnego $d > 0$ oraz $q_i \in \bar{\mathbb{V}}$, $r_i \in \bar{\mathbf{k}}$ dla $i = 0, \ldots, d$.

1.3 Podstawowe własności odwzorowań lokalnie skończonych

Dowody większości faktów tego podrozdziału dla przypadku $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ można znaleźć w pracy [FM]. Dla dowolnego $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$ przyjmujemy $F^{\circ 0} := \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}$ oraz $F^{\circ i} = F \circ F^{\circ i-1}$.

Definicja 1.7. Odwzorowanie $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$ nazwiemy lokalnie skończonym, jeśli istnieją takie $p_0, \ldots, p_d \in \mathbf{k}$ (nie wszystkie równe zeru), że $\sum_{i=0}^{d} p_i F^{\circ i} = 0$ jako element $\mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$. Zbiór wszystkich odwzorowań lokalnie skończonych n zmiennych oznaczamy $\mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$.

Przyjmijmy $\mathbb{V} = \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$ oraz $u(F) = (\mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}, F, F^{\circ 2}, \ldots) \in \mathbb{V}^{\mathbb{N}}$. Łatwo widać, że podstawienie ciągu $u(F)$ do wielomianu $p(T) = \sum_{i=0}^{d} p_i T^i$ ma postać $p(u(F)) = (p(F), p(F) \circ F, p(F) \circ F^{\circ 2}, \ldots)$, gdzie $p(F) = \sum_{i=0}^{n} p_i F^{\circ i}$. Lokalna skończoność F jest zatem równoważna spełnianiu przez ciąg $u(F)$ pewnej rekurencji liniowej. Na mocy poprzednich uwag możemy zdefiniować:

$I_F := I_{u(F)}$ - ideał „wielomianów charakterystycznych" odwzorowania F,

$\mu_F := \mu_{u(F)}$ - wielomian minimalny odwzorowania F.

Podobnie jak dla ciągów, wielomian minimalny $\mu_F(T) = \sum_{i=0}^{k} m_i T^i$ jest unitarnym ($m_k = 1$) wielomianem najniższego stopnia spośród wszystkich wielomianów $p(T) = \sum_{i=0}^{d} p_i T^i$ spełniających równanie charakterystyczne

$$p(F) := \sum_{i=0}^{d} p_i F^{\circ i} = 0$$

Uwaga 1.8. Będziemy często zapisywać wielomian charakterystyczny w postaci iloczynu (np. czynników liniowych). Warto więc zauważyć, że jeśli $p(T) = q(T) \cdot r(T)$, to na ogół $p(F) \neq q(F) \circ r(F)$. Niech na przykład $p(T) = (T+1)(T-1) = T^2-1$. Wówczas dla $F = \left(Y - X^2, X + (Y-X^2)^2\right) \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^2)$ mamy $p(F) = F^{\circ 2} - \mathrm{id}_{\mathbf{k}^2} = 0$ oraz $(F + \mathrm{id}_{\mathbf{k}^2}) \circ (F - \mathrm{id}_{\mathbf{k}^2}) \neq 0$.

Przekładając definicję 1.6 na język odwzorowań otrzymujemy

Definicja 1.9. Niech $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$. Odwzorowanie F nazwiemy unipotentnym, jeśli $\mu_F(T) = (T-1)^d$ dla pewnego $d \in \mathbb{N}$. Odwzorowanie F nazwiemy półprostym, jeśli $\mu_F(T)$ nie ma czynników wielokrotnych w rozkładzie na wielomiany nierozkładalne nad $\mathbf{k}$ ($\Leftrightarrow \mu_F(T)$ nie ma pierwiastków wielokrotnych w $\bar{\mathbf{k}}$).

Uwaga 1.10. Łatwo zauważyć, że powyższe definicje można wyrazić równoważnie jako:

- F jest unipotentne $\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N} : (T-1)^d \in I_F$
- F jest półproste $\Leftrightarrow \exists\, p(T) \in I_F : p(T)$ nie ma w rozkładzie czynników wielokrotnych.

Interesującą własnością odwzorowań unipotentnych i półprostych jest ich rola w następującej wersji twierdzenia Jordana o rozkładzie dla automorfizmów lokalnie skończonych (zob. [Hu])

Twierdzenie 1.11. *Każdy lokalnie skończony automorfizm $F \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ posiada jednoznaczny rozkład postaci $F = F_u \circ F_s$, spełniający warunki:*

1. *$F_u \circ F_s = F_s \circ F_u$,*
2. *F_u jest unipotentne,*
3. *F_s jest półproste.*

Poniższe nietrudne stwierdzenie przedstawia warunki równoważne na to, by odwzorowanie F było lokalnie skończone w zależności od iteracji F. Jest ono szczególnie przydatne do uzasadnienia, że wiele przykładów odwzorowań wielomianowych $\mathbf{k}^n$ jest lokalnie skończonych.

Stwierdzenie 1.12. *Niech $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *odwzorowanie F jest lokalnie skończone,*

2. $\sup_{m\in\mathbb{N}} \deg F^{\circ m} < +\infty$,

3. $\forall g \in \mathbf{k}[\underline{X}] : \dim_{\mathbf{k}} \operatorname{span}\{g, F^*(g), (F^*)^{\circ 2}(g), \ldots\} < +\infty$.

Przykład 1.13. Poniżej prezentujemy kilka przykładów odwzorowań lokalnie skończonych:

- wszystkie odwzorowania liniowe oraz afiniczne, gdyż dla nich $\sup_{m\in\mathbb{N}} \deg F^{\circ m} \leqslant 1$
- $\mathrm{EA}_n(\mathbf{k}) \subset \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$, gdyż wszystkie odwzorowania elementarne spełniają równanie $F^{\circ 2} - 2F + \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n} = 0$
- $\mathrm{Tr}_n(\mathbf{k}) \subset \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$, gdyż jak nietrudno sprawdzić zachodzi warunek $\sup_{m\in\mathbb{N}} \deg F^{\circ m} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \deg F_i$
- automorfizm Nagaty przestrzeni $\mathbf{k}^3$ (zob. [Na]), dany wzorem

$$N = (X - 2Y\sigma - Z\sigma^2, Y + Z\sigma, Z)$$

  gdzie $\sigma = XZ + Y^2$, gdyż spełnia równanie $F^{\circ 3} - 3F^{\circ 2} + 3F - \mathrm{id}_{\mathbf{k}^3} = 0$
- quasi-translacje, badane np. przez de Bondta (zob. [B]), jako spełniające równanie $F^{\circ 2} - 2F + \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n} = 0$
- automorfizmy skończonego rzędu w $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ (zob. np. [PR]), tzn. spełniające zależność $F^{\circ k} = \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}$ dla pewnego $k > 0$.

Odwzorowanie $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k})$ jest lokalnie skończone dokładnie wtedy, gdy $\deg F \leqslant 1$. Łatwo również znaleźć przykład automorfizmu $F \in \mathrm{TA}_2(\mathbf{k})$, który nie jest lokalnie skończony. Niech $F = (Y + X^2, X)$ oraz $F^{\circ m} = (f_m, g_m)$. Mamy $F^{\circ(m+1)} = (g_m + f_m^2, f_m)$ i jak łatwo sprawdzić $\deg f_m = 2^m$, czyli F nie spełnia warunku 2 stwierdzenia 1.12.

Ciekawą cechą odwzorowań lokalnie skończonych jest ich znaczne podobieństwo do endomorfizmów liniowych $\mathbf{k}^n$. Obrazuje to między innymi poniższe

Stwierdzenie 1.14. *Niech $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. $F \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$,

2. *F jest surjekcją,*

3. $\mu_F(0) \neq 0$,

4. $JF(\underline{X}) \in \mathbf{k}^*$,

5. $JF(\underline{X}) \neq 0$ *jako element* $\mathbf{k}^{[n]}$.

Jeśli ciało $\mathbf{k}$ *jest algebraicznie domknięte, to powyższe warunki są dodatkowo równoważne z*

6. F *jest injekcją.*

Dowód. Na początek zauważmy, że jeśli ciało $\mathbf{k}$ jest algebraicznie domknięte, to równoważność warunków (1) i (6) zachodzi nawet bez założenia lokalnej skończoności odwzorowania F (zob. np. [CR]).
(1) $\Rightarrow$ (2): oczywiste.
(2) $\Rightarrow$ (3): Gdyby było $\mu_F(T) = p(T) \cdot T$, to $p(F) \circ F = 0$ i ponieważ F jest surjekcją, także $p(F) = 0$ - sprzeczność z minimalnością μ_F.
(3) $\Rightarrow$ (1): Niech $\mu_F(T) = p(T) \cdot T - a_0$, gdzie $a_0 \in \mathbf{k}^*$. Wówczas $p(F) \circ F = a_0 \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}$, czyli odwzorowanie wielomianowe $G := \frac{1}{a_0} p(F)$ jest lewostronną odwrotnością F. Na mocy lematu 1.1 jest także $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}$ i F jest automorfizmem.
(1) $\Rightarrow$ (4), (4) $\Rightarrow$ (5): oczywiste.
(5) $\Rightarrow$ (3): Przypuśćmy, że $\mu_F(T) = p(T) \cdot T$. Wobec tego $p(F) \circ F = 0$ oraz $p(F) \neq 0$ na mocy minimalności wielomianu μ_F. Jeśli teraz $p(F) = (r_1, \ldots, r_n)$, to istnieje takie i, że $r_i \in \mathbf{k}^{[n]} \setminus \{0\}$ oraz $r_i(F_1, \ldots, F_n) = 0$. Wielomiany $F_1, \ldots, F_n$ są więc algebraicznie zależne nad $\mathbf{k}$. Niech $w \in \mathbf{k}^{[n]}$ będzie niezerowym wielomianem najniższego stopnia, który spełnia warunek $w(F_1, \ldots, F_n) = 0$. Wówczas dla każdego j mamy $0 = \frac{\partial (w \circ F)}{\partial X_j}(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial X_i}(F_1(\underline{X}), \ldots, F_n(\underline{X})) \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\underline{X})$, czyli (po transpozycji)

$$F'(\underline{X}).\Big(\frac{\partial w}{\partial X_1}(F_1, \ldots, F_n), \ldots, \frac{\partial w}{\partial X_n}(F_1, \ldots, F_n)\Big)^T = 0$$

Weźmy j, dla którego $\frac{\partial w}{\partial X_j} \neq 0$. Wtedy także $\frac{\partial w}{\partial X_j}(F_1, \ldots, F_n) \neq 0$ i z powyższej równości dostajemy, że $\mathrm{J}F(\underline{X}) = 0$. $\boxtimes$

Uwaga 1.15. W pracy [P] rozważana jest następująca hipoteza teoriolicz-bowa (uznawana za bardzo prawdopodobną):

Hipoteza (Bombieri, Lang). *Niech* $\mathbf{k}$ *będzie ciałem liczbowym (tzn. skończonym rozszerzeniem* $\mathbb{Q}$*). Jeśli* X *jest rozmaitością ogólnego typu określoną*

nad $\mathbf{k}$*, to zbiór punktów* $\mathbf{k}$*-wymiernych na* X *nie jest gęsty w topologii Zariskiego* X*.*

Przy założeniu prawdziwości powyższej hipotezy pokazano, że istnieje ciało $\mathbf{k}$ będące skończonym rozszerzeniem $\mathbb{Q}$ oraz wielomian $h \in \mathbf{k}[X, Y]$, dla którego odwzorowanie $h : \mathbf{k}^2 \to \mathbf{k}$ jest injektywne.

Wtedy odwzorowanie $F = (h, 0) \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^2)$ jest injekcją, ale $\mathrm{J}F = 0$. Przykład powyższy może uzasadniać konieczność dodatkowego założenia algebraicznej domkniętości ciała $\mathbf{k}$ przy równoważności warunków od 1) do 5) i 6).

Jak wiadomo, dla endomorfizmów liniowych $\mathbf{k}^n$, wielomian charakterystyczny (niekoniecznie minimalny!) można otrzymać z klasycznego twierdzenia

Twierdzenie 1.16 (Cayley, Hamilton)**.** *Niech* $L : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k}^n$ *będzie odwzorowaniem liniowym. Wielomian charakterystyczny*

$$p(T) := \det(L - T \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n})$$

spełnia warunek $p(L) = 0$*.*

Okazuje się, że analogiczny rezultat jest prawdziwy dla endomorfizmów lokalnie skończonych - co więcej, wielomian charakterystyczny zależy w pewnym sensie tylko od części liniowej odwzorowania F. Mówiący o tym wynik z pracy [FM] rozszerzymy na przypadek dowolnego ciała charakterystyki 0 w oparciu o następujący nietrudny fakt

Lemat 1.17. *Niech* $w(T) \in \mathbf{k}[T]$ *oraz* $w(T) = \prod_{i=1}^{n}(T - r_i)$ *będzie rozkładem* w *na czynniki liniowe nad* $\bar{\mathbf{k}}$*. Dla* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *przyjmijmy* $r^\alpha := r_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot r_n^{\alpha_n}$*. Wówczas dla każdego* $m \geqslant 1$ *wielomian* $w^{(m)}(T) = \prod_{|\alpha|=m} (T - r^\alpha)$ *ma współczynniki z* $\mathbf{k}$*.*

Dowód. Niech σ będzie dowolną permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$ oraz $r_\sigma = (r_{\sigma(1)}, \ldots, r_{\sigma(n)})$. Zauważmy, że $\{(r_\sigma)^\alpha : |\alpha| = m\} = \{r^\alpha : |\alpha| = m\}$, skąd $\prod_{|\alpha|=m} \left(T - (r_\sigma)^\alpha\right) = w^{(m)}(T)$. Współczynniki wielomianu $w^{(m)}(T)$ wyrażają się więc przez wielomiany niezmiennicze ze względu na permutacje elementów $r_1, \ldots, r_n$. Wobec tego, można je traktować jako funkcje wielomianowe

zmiennych $s_1(r), \ldots, s_n(r)$, gdzie $s_1, \ldots, s_n$ - podstawowe wielomiany symetryczne n zmiennych. Jednakże $s_i(r) \in \mathbf{k}$ dla $i = 1, \ldots, n$ na mocy wzorów Viete'a dla wielomianu $w(T)$, co kończy dowód. $\boxtimes$

Twierdzenie 1.18. *Niech $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$ spełnia warunek $F(0) = 0$ oraz przyjmijmy $d := \sup_{m \in \mathbb{N}} \deg F^{\circ m}$. Wówczas, jeśli $\det\left(\mathrm{Lin}(F) - T \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}\right) = \prod_{i=1}^{n} (T - r_i)$ jest rozkładem na czynniki liniowe nad $\bar{\mathbf{k}}$, to wielomian*

$$p(T) := \prod_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ 0 < |\alpha| \leqslant d}} (T - r^\alpha)$$

(gdzie $r^\alpha := r_1^{\alpha_1} \ldots r_n^{\alpha_n}$) jest charakterystyczny dla F, tzn. $p(F) = 0$.

Dowód. Jeśli ciało $\mathbf{k}$ jest algebraicznie domknięte, dowód można przeprowadzić zupełnie analogicznie jak w [FM] dla $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. W przypadku ogólnym traktujemy F jako element $\mathrm{LF}(\bar{\mathbf{k}}^n)$ i dostajemy wielomian $p(T) \in \bar{\mathbf{k}}[T]$, dla którego $p(F) = 0$. Wystarczy zatem pokazać, że $p(T) \in \mathbf{k}[T]$. Przyjmijmy $w(T) := \det(\mathrm{Lin}(F) - T \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n})$ - wówczas, przy oznaczeniach lematu 1.17, mamy $p(T) = \prod_{i=1}^{d} w^{(i)}(T) \in \mathbf{k}[T]$. $\boxtimes$

Niestety, by zastosować powyższe twierdzenie należy wyliczyć (lub oszacować) wartość $\sup_{m \in \mathbb{N}} \deg F^{\circ m}$, która jest skończona na mocy stw. 1.12 ale przeważnie trudna do wyznaczenia.

Uwaga 1.19. Jeśli odwzorowanie F jest liniowe, mamy $d = 1$ i powyższe twierdzenie redukuje się do tw. 1.16. Ogólnie, można sprawdzić, że wielomian $p(T)$ zdefiniowany w powyższym twierdzeniu ma stopień $\deg p = \binom{d+n}{n} - 1$.

Przykład 1.20. Założenie $F(0) = 0$ w powyższym twierdzeniu jest istotne, co pokazuje np. odwzorowanie afiniczne $F = (2X + 4, 3Y)$. Mamy bowiem $d = 1$, czyli z twierdzenia 1.18: $p(T) = (T - 2)(T - 3)$, ale $p(F) \neq 0$. Wielomianem minimalnym dla F jest (jak nietrudno sprawdzić) $\mu_F(T) = (T - 1)(T - 2)(T - 3) = T^3 - 6T^2 + 11T - 6$.

Rozdział 2

Wielomian minimalny endomorfizmu lokalnie skończonego

Niech $\mathbf{k}$ oznacza ciało charakterystyki 0. W tym rozdziale zajmiemy się problemem wyznaczenia wielomianu minimalnego endomorfizmu $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$. Naszym celem będzie wzmocnienie twierdzenia 1.18 w taki sposób, aby:

- uzyskać wielomian charakterystyczny możliwie niskiego stopnia,
- nie było konieczne wyznaczanie wartości $d = \sup_{m \in \mathbb{N}} \deg F^{\circ m}$,
- było możliwe opuszczenie warunku $F(0) = 0$.

Na początek zbadamy, jak wielomian minimalny odwzorowania F zależy od liniowej i afinicznej zmiany układu współrzędnych.

Lemat 2.1. *Niech $F \in \mathrm{LF}_n(\mathbf{k})$. Wówczas:*

1. *jeśli $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$, to $\mu_{L \circ F \circ L^{-1}} = \mu_F$,*

2. *jeśli $A \in \mathrm{Af}_n(\mathbf{k})$, to $\mu_{A \circ F \circ A^{-1}} = \mathrm{NWW}(\mu_F(T), T - 1)$.*

Dowód. 1. Ponieważ L jest liniowe, mamy równości

$$\mu_F(L \circ F \circ L^{-1}) = \sum_{i=0}^{d} p_i L \circ F^{\circ i} \circ L^{-1} = L(\sum_{i=0}^{d} p_i F^{\circ i} \circ L^{-1}) = L \circ \mu_F(F) \circ L^{-1} = 0,$$

skąd $L \circ F \circ L^{-1} \in \mathrm{LF}_n(\mathbf{k})$ oraz $\mu_{L \circ F \circ L^{-1}} | \mu_F$. Analogicznie ze związku $F = L^{-1} \circ (L \circ F \circ L^{-1}) \circ L$ uzyskujemy $\mu_F | \mu_{L \circ F \circ L^{-1}}$.

2. Niech $A(\underline{X}) = L.\underline{X} + b$, gdzie $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$, $b \in \mathbf{k}^n$. Zauważmy, że

$$\mu_F(A \circ F \circ A^{-1}(\underline{X})) = \sum_{i=0}^{d} p_i(L \circ F^{\circ i} \circ A^{-1}(\underline{X}) + b) =$$
$$= L \circ \mu_F(F) \circ A^{-1}(\underline{X}) + (\sum_{i=0}^{d} p_i) \cdot b = p(1) \cdot b$$

Zatem jeśli $(T-1)|\mu_F(T)$, to $\mu_F(A \circ F \circ A^{-1}) = 0$. W przeciwnym razie $\mu_F(A \circ F \circ A^{-1}) \neq 0$ ale wielomian $p(T) = (T-1)\mu_F(T)$ spełnia warunki $p(F) = 0$ oraz $p(1) = 0$, skąd $p(A \circ F \circ A^{-1}) = 0$. ⊠

Powyższy lemat pozwala w oparciu o tw. 1.18 znaleźć wielomian charakterystyczny dla odwzorowań posiadających punkt stały (niekoniecznie 0).

Wniosek 2.2. *Niech $F \in \mathrm{LF}_n(\mathbf{k})$ będzie takie, że $F(a) = a$ dla pewnego $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{k}^n$. Wówczas dla $\varphi = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \in \mathrm{Af}_n(\mathbf{k})$ jest $\varphi \circ F \circ \varphi^{-1}(0) = 0$ oraz $\mu_F = \mathrm{NWW}(\mu_{\varphi \circ F \circ \varphi^{-1}}, T-1)$.*

2.1 Formuła na wielomian charakterystyczny

Rozpoczniemy od następującego wzmocnienia twierdzenia 1.18.

Twierdzenie 2.3. *Niech $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$ spełnia warunek $F(0) = 0$ oraz przyjmijmy $d := \sup_{m \in \mathbb{N}} \deg F^{\circ m}$. Jeśli wielomian* **minimalny** *części liniowej F ma postać $\mu_{Lin(F)}(T) = \prod_{i=1}^{s}(T - r_i)$, gdzie $r_i \in \bar{\mathbf{k}}$ oraz $s \leqslant n$, to wielomian*

$$p(T) = \prod_{0<|\alpha|\leqslant d} (T - r^\alpha)$$

(przy czym $r^\alpha = r_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot r_s^{\alpha_s}$ oraz $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$ dla $\alpha \in \mathbb{N}^s$) spełnia warunek $p(F) = 0$.

Dla potrzeb dowodu przypomnimy pojęcie potęgi symetrycznej przestrzeni wektorowej. Niech E będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru nad $\mathbf{k}$ oraz $m > 0$. Przez m-tą potęgę symetryczną E rozumiemy jedyną (z dokładnością do izomorfizmu) przestrzeń wektorową $\mathrm{Sym}^m E$ wraz z odwzorowaniem m-liniowym $s : E^m \to \mathrm{Sym}^m E$ mającą własność faktoryzacji m-liniowych odwzorowań symetrycznych z przestrzeni E. Innymi słowy, jeśli F jest dowolną przestrzenią wektorową skończonego wymiaru nad $\mathbf{k}$ oraz

$\phi : E^m \to F$ odwzorowaniem m-liniowym, to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $L_\phi : \mathrm{Sym}^m E \to F$ dla którego $L_\phi \circ s = \phi$.

Twierdzenie 2.3 dowodzimy analogicznie jak tw. 1.18 w pracy [FM]. Nietrudno zauważyć, że uzyskamy tezę, jeśli pokażemy udowodniony tam lemat 1.1 w następującej wersji:

Lemat 2.4. *Niech E będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru nad $\mathbf{k}$ oraz L endomorfizmem liniowym E. Jeśli wielomian minimalny L ma postać $\mu_L(T) = \prod_{i=1}^{s}(T - r_i)$ gdzie $r_i \in \bar{\mathbf{k}}$, to wielomian $p(T) = \prod_{|\alpha|=m}(T - r^\alpha)$ spełnia warunek $p(\mathrm{Sym}^m L) = 0$.*

Dowód. Rozważamy odwzorowanie L jako endomorfizm liniowy przestrzeni $\bar{E} = E \otimes \bar{\mathbf{k}}$. Jeśli $\mu_L(T) = \prod_{i=1}^{t}(T - r_i)^{w_i}$, gdzie $r_i \neq r_j$ dla $i \neq j$, to w pewnej bazie przestrzeni $\bar{E}$, L ma macierz w postaci Jordana:

$$\begin{bmatrix}
J_{1,1} & 0 & & & & \cdots & & 0 \\
0 & J_{1,2} & 0 & & & \cdots & & 0 \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
\vdots & & 0 & J_{1,l_1} & 0 & & & \vdots \\
 & & & 0 & J_{2,1} & 0 & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & & & \cdots & & 0 & J_{t,l_t-1} & 0 \\
0 & & & \cdots & & & 0 & J_{t,l_t}
\end{bmatrix}$$

gdzie

$$J_{i,j} = \begin{bmatrix}
r_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & r_i & 1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & \ldots & 0 & r_i & 1 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & r_i
\end{bmatrix}, \quad \text{dla } j = 1, \ldots, l_i$$

jest macierzą kwadratową o wymiarach co najwyżej $w_i \times w_i$ dla $i = 1, \ldots, t$. Ponieważ na mocy lematu 2.1 wielomian charakterystyczny nie zależy od liniowej zmiany zmiennych, będziemy rozważać L w powyższej bazie. Oznaczmy podprzestrzeń niezmienniczą L związaną z macierzą $J_{i,j}$ przez $E_{i,j}$, natomiast jej bazę przez $e_1^{(i,j)}, \ldots, e_{w_{i,j}}^{(i,j)}$. Przestrzeń $\mathrm{Sym}^m \bar{E}$ ma rozkład na podprzestrzenie niezmiennicze względem $\mathrm{Sym}^m L$, które są postaci $E_{i_1,j_1} \cdots E_{i_m,j_m}$, gdzie $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_m \leqslant t$ oraz $j_k \leqslant l_{i_k}$ dla $k = 1, \ldots, m$. Bazę każdej z

takich podprzestrzeni stanowią „jednomiany" $e_{k_1}^{(i_1,j_1)} \cdots e_{k_m}^{(i_m,j_m)}$ (przy czym $k_1 \leqslant w_{i_1,j_1}, \ldots, k_m \leqslant w_{i_m,j_m}$), które możemy uporządkować leksykograficznie względem ciągu $(k_1, \ldots, k_m)$. W tak uporządkowanej bazie zacieśnienie odwzorowania $\mathrm{Sym}^m L$ do $E_{i_1,j_1} \cdots E_{i_m,j_m}$ ma macierz trójkątną górną wyłącznie z elementami $\tilde{r} := r_{i_1} \cdot \ldots \cdot r_{i_m}$ na przekątnej - wielomian charakterystyczny tego zacieśnienia jest więc postaci $p_{(i_1,j_1),\ldots,(i_m,j_m)}(T) = (T - \tilde{r})^{\dim E_{i_1,j_1} \cdots E_{i_m,j_m}}$. Dowód lematu będzie zakończony jeśli pokażemy, że dla dowolnych $i_1, j_1, \ldots, i_m, j_m$ wielomian $p(T) = \prod_{|\alpha|=m} (T - r^\alpha)$ jest podzielny przez $p_{(i_1,j_1),\ldots,(i_m,j_m)}(T)$. Zauważmy, że powyższy warunek zależy tylko od tych podprzestrzeni E_{i_k,j_k}, które mają największy wymiar (równy w_k) spośród $E_{i_k,*}$. W dalszym ciągu zakładamy więc, że $j_k = l_k = 1$ dla $k = 1, \ldots, t$ i pomijamy w zapisie indeks j_k. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na stopień potęgi symetrycznej m. Dla $m = 1$ jest $\prod_{i=1}^{t}(T - r_i)^{w_i} = \mu_L(T) = \prod_{|\alpha|=1} (T - r^\alpha)$. Niech zatem $m > 1$ oraz $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_m \leqslant t$. Możemy założyć, że $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{I_1, \ldots, I_s\}$ oraz dokładnie k_u spośród liczb $i_1, \ldots, i_m$ jest równych I_u dla $u = 1, \ldots, s$. Wówczas $\dim E_{i_1} \cdots E_{i_m} = \prod_{u=1}^{s} \binom{\dim E_{I_u} + k_u - 1}{k_u}$, gdyż bazę przestrzeni $E_{i_1} \cdots E_{i_m}$ stanowią „jednomiany" $e_1 \cdots e_m$, w których k_1 „zmiennych" pochodzi z bazy E_{I_1}, k_2 z bazy E_{I_2}, itd. Zauważmy, że analogiczne rozumowanie pokazuje, iż czynnik $(T - r_{i_1} \cdot \ldots \cdot r_{i_m})$ występuje w iloczynie $\prod_{|\alpha|=m} (T - r^\alpha)$ co najmniej $\dim E_{i_1} \cdots E_{i_m}$ razy - zatem $p_{i_1,\ldots,i_m}(T) | p(T)$. Wobec powyższego, $p\big((\mathrm{Sym}^m L)|_{E_{i_1} \cdots E_{i_m}}\big) = 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_m \leqslant t$, skąd $p(\mathrm{Sym}^m L) = 0$. Pozostaje wykazać, że $p(T) \in \mathbf{k}[T]$ - wynika to z lematu 1.17 zastosowanego do wielomianu $\mu_L(T)$. ⊠

Wniosek 2.5. *Niech* $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$ *spełnia warunki* $\mathrm{Lin}(F) = \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}$ *oraz* $F(0) = 0$. *Jeśli* $d := \sup_{m \in \mathbb{N}} \deg F^{\circ m}$, *to dla* $p(T) = (T - 1)^d$ *mamy* $p(F) = 0$.

Uwaga 2.6. Niech $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$. Wówczas

$$F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n) \Leftrightarrow \#\Big(\bigcup_{m=0}^{+\infty} \mathrm{mon}\, F^{\circ m}\Big) < +\infty,$$

przy czym $\mathrm{mon}\, G := \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{mon}\, G_i$ dla $G = (G_1, \ldots, G_n)$.

Dowód. ($\Rightarrow$): Na mocy 1.12 mamy $d := \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \deg F^{\circ m} < +\infty$. Dla każdego m jest zatem $\operatorname{mon} F^{\circ m} \subset \{\underline{X}^\alpha : |\alpha| \leqslant d\}$, skąd $\#(\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \operatorname{mon} F^{\circ m}) \leqslant \#\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leqslant d\} = \binom{d+n}{n} < +\infty$.

($\Leftarrow$): Niech $S := \{\alpha \in \mathbb{N}^n : \underline{X}^\alpha \in \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \operatorname{mon} F^{\circ m}\}$. Z założenia zbiór S jest skończony, istnieje zatem $d := \max\limits_{\alpha\in S} |\alpha|$. Łatwo widać, że wtedy $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \deg F^{\circ m} = d < +\infty$. ⊠

Definicja 2.7. Niech $F, G \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$. Powiemy, że F jest prostszy niż G (ozn. $F \ll G$), jeśli dla każdego $m \geqslant 1$ oraz $i = 1, \ldots, n$ zachodzi warunek $\underline{X}^\alpha \in \operatorname{mon}(F^{\circ m})_i \Rightarrow \operatorname{coef}_{\underline{X}^\alpha}(F^{\circ m})_i = \operatorname{coef}_{\underline{X}^\alpha}(G^{\circ m})_i$.

Lemat 2.8. *Niech $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$ oraz $G \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$. Jeśli $F \ll G$, to $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$ oraz $\mu_F | \mu_G$.*

Dowód. Z warunku $F \ll G$ dostajemy $\operatorname{mon} F^{\circ m} \subset \operatorname{mon} G^{\circ m}$, czyli na mocy poprzedniej uwagi $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$. Pokażemy, że $\mu_G(F) = 0$. Rozpiszmy równość $\mu_G(G) = 0$ jako układ równań liniowych na współczynnikach jednomianów, tzn. jeśli $\mu_G(T) = \sum\limits_{m=0}^{d} p_m T^m$, to $\mu_G(G) = 0$ jest równoważne

$$\sum_{m=0}^{d} p_m \operatorname{coef}_{\underline{X}^\alpha}(G^{\circ m})_i = 0, \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n \text{ oraz } \underline{X}^\alpha \in \bigcup_{m=0}^{+\infty} \operatorname{mon}(G^{\circ m})_i$$

Ponieważ dla $i = 1, \ldots, n$ mamy $\operatorname{coef}_{\underline{X}^\alpha} \mu_G(F)_i = \sum\limits_{m=0}^{d} p_m \operatorname{coef}_{\underline{X}^\alpha}(F^{\circ m})_i = \sum\limits_{m=0}^{d} p_m \operatorname{coef}_{\underline{X}^\alpha}(G^{\circ m})_i = 0$, więc $\mu_G(F) = 0$, a stąd $\mu_F | \mu_G$. ⊠

Wniosek 2.9. *Jeśli $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$ oraz $F(0) = 0$, to $\mu_{\mathrm{Lin}(F)} | \mu_F$.*

Dowód. Mamy $\mathrm{Lin}(F^{\circ m}) = (\mathrm{Lin}\, F)^{\circ m}$, zatem $\mathrm{Lin}(F) \ll F$. ⊠

Stwierdzenie 2.10. *Niech $A \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz $\tilde{A}(\underline{X}) := A.\underline{X} + b$, gdzie $b \in \mathbf{k}^n$. Wówczas*

$$\mu_{\tilde{A}}(T) \in \{\mu_A(T), (T-1)\mu_A(T)\}$$

Dowód. Zauważmy, że $\tilde{A}^{\circ m}.\underline{X} = A^{\circ m}.\underline{X} + A^{\circ(m-1)}.b + \ldots + A.b + b$. Stąd $A \ll \tilde{A}$ i ponieważ $\tilde{A} \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$, na mocy lematu 2.8 dostajemy $\mu_A|\mu_{\tilde{A}}$. Pozostaje pokazać, że $p(T) = (T-1)\mu_A(T) = (T-1)\sum_{i=0}^{d} p_i T^i$ spełnia warunek $p(\tilde{A}) = 0$ (przy czym $p_d = 1$). Jednakże

$$\begin{aligned}
p(\tilde{A})(\underline{X}) &= p_d\tilde{A}^{\circ(d+1)}(\underline{X}) + \sum_{i=1}^{d}(p_{i-1}-p_i)\tilde{A}^{\circ i}(\underline{X}) - p_0\underline{X} = \\
&= p_d(A^{\circ(d+1)}.\underline{X} + A^{\circ d}.b + \ldots + A.b + b) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d}(p_{i-1}-p_i)(A^{\circ i}.\underline{X} + A^{\circ(i-1)}.b + \ldots + A.b + b) - p_0\underline{X} = \\
&= p_d(A^{\circ(d+1)}.\underline{X} + A^{\circ d}.b) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d}\Big((p_{i-1}-p_i)A^{\circ i}.\underline{X} + p_{i-1}A^{\circ(i-1)}.b\Big) - p_0\underline{X} = \\
&= \sum_{i=1}^{d+1} p_{i-1}A^{\circ i}.\underline{X} + \sum_{i=0}^{d} p_i A^{\circ i}.b - \sum_{i=0}^{d} p_i A^{\circ i}.\underline{X} = \\
&= \Big(\mu_A(A)\circ A\Big).\underline{X} + \mu_A(A).b - \mu_A(A).\underline{X} = 0,
\end{aligned}$$

gdyż $\mu_A(A) = 0$. ⊠

Przykład 2.11. Powyższe stwierdzenie nie jest prawdziwe dla odwzorowań nieliniowych, obrazują to m.in. następujące przykłady:
1) Niech $F = (2X, Y + X^3) \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^2)$ oraz $\tilde{F} = (2X + 1, Y + X^3)$. Jak łatwo sprawdzić (np. przy pomocy lematu 2.12): $\mu_F(T) = (T-1)(T-2)(T-8)$ oraz $\mu_{\tilde{F}}(T) = (T-1)(T-4)\mu_F(T)$.
2) Niech $F = (X, Y + X^3) \circ (Y, X) \circ (X, Y - X^3) = (Y - X^3, X + (Y - X^3)^3)$. Ponieważ $F^{\circ 2} = \mathrm{id}_{\mathbf{k}^2}$, mamy $\mu_F(T) = T^2 - 1$. Jednocześnie odwzorowanie

$$\tilde{F} = (X + 1, Y) \circ F = (Y - X^3 + 1, X + (Y - X^3)^3)$$

nie jest nawet lokalnie skończone, gdyż jak nietrudno sprawdzić indukcyjnie $\deg \tilde{F}^{\circ m} \geqslant 9 \cdot 2^{m-1}$ dla $m \geqslant 1$.

Twierdzenie 2.12. *Niech $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$ oraz $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Załóżmy, że część liniowa F jest izomorfizmem diagonalnym, tzn.* $\mathrm{Lin}(F) = (r_1X_1, \ldots, r_nX_n) \in \mathrm{Diag}_n(\mathbf{k})$ *oraz* $\prod_{i=1}^{n} r_i \neq 0$. *Jeśli dla nieskończenie wielu $m \geqslant 1$ jest $\underline{X}^\alpha \in \mathrm{mon}\, F^{\circ m}$, to $(T - r^\alpha)|\mu_F(T)$.*

Dowód. Niech $\underline{X}^\alpha \in \mathrm{mon}(F^{\circ m})_i$ dla nieskończenie wielu m. Zdefiniujmy dwa ciągi $u_k := \mathrm{coef}_{\underline{X}^\alpha}(F^{\circ(m+k)})_i$ oraz $v_k := \mathrm{coef}_{\underline{X}^\alpha}(\sum_\beta F_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot F_n^{\beta_n} : \underline{X}^\beta \in \mathrm{mon}(F^{\circ(m+k)})_i \setminus \{\underline{X}^\alpha\})$. Ponieważ F jest lokalnie skończone, nietrudno pokazać, że powyższe ciągi spełniają pewne rekurencje liniowe. Ponadto na mocy twierdzenia 1.3 mamy $F^{\circ m} = \sum_{j=1}^{d} s_j^m q_j(m)$, gdzie $s_j \in \bar{\mathbf{k}}$ oraz $q_j(t) \in \bar{\mathbf{k}}^{[n]}[t]$ dla $j = 1, \ldots, d$ - zatem również $v_k = \sum_{j=1}^{d} s_j^k \tilde{q}_j(k)$ przy pewnych $\tilde{q}_j(t) \in \bar{\mathbf{k}}^{[n]}[t]$. Współczynnik przy $\underline{X}^\alpha$ w $F^{\circ(m+1)}$ wyraża się wzorem $u_1 = r^\alpha u_0 + v_0$ oraz ogólnie dla $k \geqslant 1$:

$$u_k = r^\alpha u_{k-1} + v_{k-1} = (r^\alpha)^k u_0 + \sum_{j=0}^{k-1} (r^\alpha)^{k-1-j} v_j$$

Dzięki formule na v_k oraz $r^\alpha \neq 0$ dostajemy równość $u_k = (r^\alpha)^k q(k) + \sum_{j=1}^{d} s_j^k \bar{q}_j(k)$ dla pewnych $q(t), \bar{q}_j(t) \in \bar{\mathbf{k}}^{[n]}[t]$. Jeśli $s_j \neq r^\alpha$, to rozważając powyższą równość w rozszerzeniu $\mathbb{Q}$ o współczynniki $q, \bar{q}_j$ (traktowanym jako podciało $\mathbb{C}$) widać, że nie można wyrazić składnika $(r^\alpha)^k q(k)$ przez sumę $\sum_{j=1}^{d} s_j^k \bar{q}_j(k)$ dla nieskończenie wielu k. Wobec tego z twierdzenia 1.3 musi być $(T - r^\alpha) | \mu_u$, ale jak łatwo sprawdzić $\mu_u | \mu_F$, co kończy dowód. ⊠

Przypuśćmy, że $F \in \mathrm{LF}_n(\mathbf{k})$ oraz odwzorowanie $\mathrm{Lin}(F)$ jest diagonalizowalne, tzn. istnieje takie $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$, że $Q \circ \mathrm{Lin}(F) \circ Q^{-1} \in \mathrm{Diag}_n(\mathbf{k})$. Z lematu 2.1 dostajemy równość $\mu_F = \mu_{Q \circ F \circ Q^{-1}}$ i powyższe twierdzenie możemy zastosować do odwzorowania $Q \circ F \circ Q^{-1}$, otrzymując czynniki wielomianu minimalnego μ_F.

Jeśli dodatkowo $F(0) = 0$, to twierdzenie 2.18 pozwala uzyskać wielomian charakterystyczny $p(T)$ dla F - mamy więc

$$\prod_{\alpha \in M} (T - \underline{X}^\alpha) \mid \mu_F(T) \mid p(T)$$

gdzie $M = \{\alpha \in \mathbb{N}^n | \#\{m : \underline{X}^\alpha \in \mathrm{mon}\, F^{\circ m}\} = \infty\}$.

Warto również zauważyć, że jeśli ciało $\mathbf{k}$ jest algebraicznie domknięte, to odwzorowanie $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ jest diagonalizowalne $\Leftrightarrow$ L jest półproste (tzn. wielomian minimalny L nie ma czynników wielokrotnych). W tym przypadku powyższe postępowanie można stosować o ile tylko część liniowa F jest półprosta.

2.2 Wielomian minimalny automorfizmu trójkątnego

W tym podrozdziale wyznaczamy *explicite* wielomian minimalny dla pewnej klasy automorfizmów trójkątnych $\mathbf{k}^n$, tzn. odwzorowań postaci:

$$F = \Big(X_1 + G_1, X_2 + G_2(X_1), \ldots, X_n + G_n(X_1, \ldots, X_{n-1})\Big)$$

gdzie $G_i \in \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_{i-1}]$. Nietrudno sprawdzić, że każdy automorfizm trójkątny jest odwzorowaniem lokalnie skończonym. Na mocy poprzednich uwag mamy również, że $\mu_F(T) = (T-1)^k$, dla pewnego $k \geqslant 1$. Istotnie, jeśli $F(0) = 0$, to $\mu_F(T) = (T-1)^k$ na mocy tw. 1.18. W przeciwnym wypadku wystarczy rozważyć odwzorowanie trójkątne $\tilde{F} : \mathbf{k}^{n+1} \to \mathbf{k}^{n+1}$ dane wzorem

$$\tilde{F}(Z, X_1, \ldots, X_n) = \Big(Z, F_1(\underline{X}) + (Z-1)F_1(0), \ldots, F_n(\underline{X}) + (Z-1)F_n(0)\Big)$$

i zauważyć, że $\tilde{F}(1, \underline{X}) = (1, F(\underline{X}))$. Stąd, na mocy lematu 2.8, otrzymujemy $\mu_F | \mu_{\tilde{F}} = (T-1)^{\tilde{k}}$. W poniższym twierdzeniu podajemy bezpośrednią formułę na wykładnik k, omijając kłopotliwe wyznaczanie liczby $d = \sup_{m \in \mathbb{N}} \deg F^{\circ m}$ oraz założenie $F(0) = 0$.

Twierdzenie 2.13. *Niech $F = (F_1, \ldots, F_n)$ będzie automorfizmem trójkątnym przestrzeni $\mathbf{k}^n$ takim, że $F_i = X_i + G_i(X_1, \ldots, X_{i-1})$. Dla $i \geqslant 1$ zdefiniujmy*

$$w_i := \begin{cases} 1, & G_i = 0, \\ 2, & G_i \in \mathbf{k}^*, \\ 2 + \max\limits_{\underline{X}^\alpha \in \operatorname{mon} G_i} \sum\limits_{j=1}^{i-1} \alpha_j (w_j - 1), & G_i \notin \mathbf{k}. \end{cases}$$

Wówczas wielomian

$$p(T) = (T-1)^{\max\{w_1, \ldots, w_n\}}$$

spełnia warunek $p(F) = 0$. Jeśli ponadto dla każdego $i \geqslant 1$ zachodzi jeden z warunków: $G_i \in \mathbf{k}$ lub zbiór $\{\underline{X}^\alpha \in \operatorname{mon} G_i : \sum\limits_{j=1}^{i-1} \alpha_j (w_j - 1) = w_i\}$ jest jednoelementowy, to $p(T) = \mu_F(T)$.

Dowód (por. [Z1] dla $n = 3$). Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę zmiennych n. Dla $n = 1$ jest $F = X_1 + G_1$ oraz

$$\mu_F(T) = \begin{cases} T-1, & G_1 = 0 \\ (T-1)^2, & G_1 \neq 0 \end{cases} = (T-1)^{w_1}$$

Załóżmy teraz, że $n > 1$. Jak łatwo sprawdzić, mamy

$$(F^{\circ m})_n = X_n + \sum_{s=0}^{m-1} G_n\Big((F^{\circ s})_1, \ldots, (F^{\circ s})_{n-1}\Big)$$

Jeśli $G_n \in \mathbf{k}$, postępujemy analogicznie jak dla $n = 1$. Weźmy zatem niestały jednomian $\underline{X}^\alpha \in \operatorname{mon} G_n$ i rozważmy ciąg $u_s = (F^{\circ s})^\alpha := (F^{\circ s})_1^{\alpha_1} \ldots (F^{\circ s})_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Ponieważ każde z odwzorowań $(F_1, \ldots, F_j)$ dla $j < n$ jest trójkątne o mniejszej liczbie zmiennych, z założenia indukcyjnego łatwo dostajemy, że $\mu_{F_j}(T) = (T-1)^{w_j}$, dla $j = 1, \ldots, n-1$. Ciągi $(F^{\circ m})_j$ są zatem unipotentne i zgodnie z tw. 1.3 mamy $(F^{\circ m})_j = \sum_{i=0}^{w_j - 1} q_i^{(j)} m^i$, przy czym $q_i^{(j)} \in \mathbf{k}^{[n]}$ oraz $q_{w_j-1}^{(j)} \neq 0$ dla $j = 1, \ldots, n-1$. Wobec tego

$$u_s = \prod_{j=1}^{n-1} \Big(\sum_{i=0}^{w_j - 1} q_i^{(j)} s^i \Big) = \sum_{i=0}^{w} \tilde{q}_i s^i,$$

gdzie $w = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (w_j - 1)$. Ponieważ $\tilde{q}_w = q_{w_1-1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot q_{w_{n-1}-1}^{(n-1)} \neq 0$, oznacza to, że $(T-1)^{1+w}$ jest wielomianem minimalnym ciągu u_s. Ciąg $v_s := G_n(u_s) = G_n\Big((F^{\circ s})_1, \ldots, (F^{\circ s})_{n-1}\Big)$ ma więc wielomian charakterystyczny $(T-1)^{1+\tilde{w}}$, gdzie $\tilde{w} = \max_{\underline{X}^\alpha \in \operatorname{mon} G_n} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (w_j - 1)$. Ostatecznie dostajemy

$$(F^{\circ m})_n = X_n + \sum_{s=0}^{m-1} G_n(u_s) = X_n + \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{\tilde{w}} q_i s^i = X_n + \sum_{i=0}^{\tilde{w}} q_i \sum_{s=0}^{m-1} s^i = \sum_{i=0}^{1+\tilde{w}} \tilde{q}_i s^i$$

przy pewnych $\tilde{q}_i \in \bar{\mathbf{k}}^{[n]}$. Wobec tego $(T-1)^{2+\tilde{w}}$ jest wielomianem charakterystycznym dla $(F^{\circ m})_n$. Jeśli wartość $\tilde{w}$ jest osiągana tylko dla jednego jednomianu $\underline{X}^\alpha \in \operatorname{mon} G_n$, to $\mu_v = (T-1)^{1+\tilde{w}}$ oraz $q_{\tilde{w}} \neq 0$, skąd $\mu_{(F^{\circ m})_n} = (T-1)^{2+\tilde{w}} = (T-1)^{w_n}$. ⊠

2.3 Przypadek dwuwymiarowy

W tym podrozdziale podamy oszacowanie stopnia wielomianu minimalnego dla endomorfizmu $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^2)$. Rozpoczniemy od przypadku, gdy F jest automorfizmem. Poniższe klasyczne twierdzenie (zob. [Ku]) jest kluczowym faktem dotyczącym struktury grupy $\mathrm{GA}_2(\mathbf{k})$.

Twierdzenie 2.14 (Jung, van der Kulk)**.** *Niech* $\mathbf{k}$ *będzie ciałem. Wówczas grupa* $\mathrm{GA}_2(\mathbf{k})$ *jest produktem wolnym swoich podgrup* $\mathrm{Tr}_2(\mathbf{k})$ *i* $\mathrm{Af}_2(\mathbf{k})$ *amalgamowanym nad ich przecięciem, tzn. każdy element* $F \in \mathrm{GA}_2(\mathbf{k})$ *można przedstawić w postaci*

$$F = A_1 \circ T_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ T_{n-1} \circ A_n$$

przy czym $A_1, A_n \in \mathrm{Af}_2(\mathbf{k})$*,* $A_2, \ldots, A_{n-1} \in \mathrm{Af}_2(\mathbf{k}) \backslash \mathrm{Tr}_2(\mathbf{k})$ *oraz* $T_1, \ldots, T_{n-1} \in \mathrm{Tr}_2(\mathbf{k}) \setminus \mathrm{Af}_2(\mathbf{k})$*. Co więcej, jeśli* $F = A'_1 \circ T'_1 \circ \ldots \circ T'_{m-1} \circ A'_m$ *jest innym przedstawieniem spełniającym powyższe warunki, to* $m = n$ *oraz* $A'_1 = A_1 \circ \phi_1$*,* $T'_i = \phi_i^{-1} \circ T \circ \phi_{i+1}$ *i* $A'_n = \phi_n^{-1} \circ A_n$ *dla pewnych* $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathrm{Tr}_2(\mathbf{k}) \cap \mathrm{Af}_2(\mathbf{k})$*.*

Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast równość $\mathrm{GA}_2(\mathbf{k}) = \mathrm{TA}_2(\mathbf{k})$ oraz wiele faktów dotyczących grupy automorfizmów algebry $\mathbf{k}[X, Y]$ (nawet zupełnie „niealgebraicznych", zob. np. [FMi]). W szczególności, jeśli $F = (F_1, F_2) \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$, to $\deg F_1 | \deg F_2$ lub $\deg F_2 | \deg F_1$. Warto tutaj zauważyć, że struktura grupy $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ (a nawet $\mathrm{TA}_n(\mathbf{k})$) dla $n \geqslant 3$ jest w dalszym ciągu nieznana - o jej skomplikowaniu może świadczyć następujący wynik z [Ka2]:

Twierdzenie. *Nie istnieje automorfizm rozkładalny* $F = (F_1, F_2, F_3)$ *przestrzeni* $\mathbb{C}^3$*, dla którego* $(\deg F_1, \deg F_2, \deg F_3) = (3, 4, 5)$*.*

Z drugiej strony, można także pokazać

Twierdzenie ([Z3])*. Niech* $0 < a < b$ *będą liczbami naturalnymi. Wówczas istnieje takie* $c_0 = c_0(a, b)$*, że dla dowolnej liczby* $c \geqslant c_0$ *znajdziemy automorfizm* $F = (F_1, F_2, F_3) \in \mathrm{TA}_3(\mathbf{k})$ *spełniający warunek* $(\deg F_1, \deg F_2, \deg F_3) = (a, b, c)$*.*

Jako wniosek z twierdzenia Junga-van der Kulka w pracy [F1] przedstawiono następującą prostą charakteryzację automorfizmów lokalnie skończonych płaszczyzny:

Twierdzenie 2.15. *Niech* $F \in \mathrm{GA}_2(\mathbf{k})$*. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^2)$*,*
2. $\deg(F \circ F) \leqslant \deg F$*,*

3. $\deg F^{\circ m} \leqslant \deg F$, *dla każdego* $m \geqslant 2$,

4. *istnieje automorfizm trójkątny* G, *tzn.* $G = (aX + c, bY + p(X))$, *gdzie* $a, b \in \mathbf{k}^*$, $c \in \mathbf{k}$, $p(X) \in \mathbf{k}[X]$ *oraz* $\varphi \in \mathrm{GA}_2(\mathbf{k})$ *takie, że* $F = \varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$.

Przykład 2.16. Warto zauważyć, że w przypadku $n \geqslant 3$ nie ma tak prostej charakteryzacji automorfizmów lokalnie skończonych. Rozważmy następujący przykład:

$$F(X, Y, Z) = (X, Y, Z + Y) \circ (X + ((Z - Y)^2 - Y)^3, Y + Z^2, Z)$$

$$G(X, Y, Z) = (X + Y^2(Y - Z^2)^2, Y + Z^2, Z)$$

Wówczas $\deg F = \deg G = 6$, $\deg F^{\circ 2} = \deg G^{\circ 2} = 6$, $\deg F^{\circ 3} = \deg G^{\circ 3} = 8$ a mimo to F nie jest lokalnie skończone, podczas gdy G - jest (jako trójkątne).

Wykorzystując twierdzenie 2.15, w pracy [FM] uzyskano następujące

Twierdzenie 2.17. *Niech* $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^2)$ *oraz* $F(0) = 0$. *Wówczas* $\deg \mu_F \leqslant 1 + \deg F$.

Łatwo się przekonać, że założenie $F(0) = 0$ w powyższym twierdzeniu jest istotne - w tym celu rozważmy przykład $F = (2X + 1, 3Y + X^d) \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^2)$. Oczywiście $F^{\circ 2} = (4X + 3, 9Y + (3 + 2^d)X^d + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} 2^j X^j)$ i nietrudno sprawdzić, że jednomiany X^j występują we wszystkich kolejnych iteracjach F. Na mocy twierdzenia 2.12 mamy $(T - 2^j) | \mu_F(T)$ dla $j = 0, \ldots, d$ oraz $(T - 3) | \mu_F(T)$, skąd $\deg \mu_F(T) \geqslant 2 + \deg F$ (w istocie $\mu_F(T) = (T - 3)(T - 1)(T - 2) \cdot \ldots \cdot (T - 2^d)$).

Jak się okazuje, w przypadku ogólnym prawdziwe jest następujące oszacowanie.

Twierdzenie 2.18. *Niech* $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^2)$. *Wówczas* $\deg \mu_F \leqslant 2 + \deg F$.

Powyższy wynik uzyskamy naśladując dowód twierdzenia 2.17 w [FM]. Najpierw pokażemy

Lemat 2.19. *Niech* $F = (aX + c, bY + r(X))$ *będzie automorfizmem trójkątnym* $\mathbf{k}^2$. *Jeśli* $\deg r = d$, *to wielomian*

$$p(T) = (T - 1)(T - b)(T - a)(T - a^2) \cdot \ldots \cdot (T - a^d)$$

jest podzielny przez $\mu_F(T)$, *tzn.* $p(F) = 0$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że elementy $1, b, a, a^2, \ldots, a^d$ są parami różne. Pokażemy, że ciąg $u_m := F^{\circ m}$ jest półprosty (jego wielomian minimalny nie ma czynników wielokrotnych) oraz $u_m = q_0 + q_b b^m + \sum_{i=1}^{d} q_i a^{im}$. Na mocy twierdzenia 1.3 wielomian $p(T) = (T-1)(T-b)\prod_{i=1}^{d}(T-a^i)$ będzie wtedy spełniał warunek $p(u) = 0$, skąd $p(F) = 0$.

Zauważmy, że jeśli $a \neq 1$, to dla dowolnego $m \geqslant 1$ mamy

$$F^{\circ m} = \Big(a^m(X + \frac{c}{a-1}) - \frac{c}{a-1}, b^m Y + \sum_{s=0}^{m-1} b^{m-1-s} r(a^s(X + \frac{c}{a-1}) - \frac{c}{a-1})\Big)$$

Jeśli $r(X) = \sum_{i=0}^{d} r_i X^i$, to $r((F^{\circ s})_1) = \sum_{i=0}^{d} r_i\Big(a^s(X + \frac{c}{a-1}) - \frac{c}{a-1}\Big)^i = \sum_{i=0}^{d} r_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a^{js}(X + \frac{c}{a-1})^j \cdot (\frac{c}{a-1})^{i-j} = \sum_{i=0}^{d} \tilde{r}_i a^{is}$, dla pewnych $\tilde{r}_i \in \mathbf{k}[X]$. Wobec tego $(F^{\circ m})_2 = b^m Y + \sum_{s=0}^{m-1} b^{m-1-s} \sum_{i=0}^{d} \tilde{r}_i a^{is} = b^m Y + \sum_{i=0}^{d} \tilde{r}_i \frac{b^m - a^{im}}{b - a^i}$, jeśli tylko $b \neq a^i$, $i = 0, 1, \ldots, d$. Ostatecznie otrzymujemy

$$u_m = (\frac{-c}{a-1}, \frac{-\tilde{r}_0}{b-1}) + (0, Y + \sum_{i=0}^{d} \frac{\tilde{r}_i}{b-a^i}) b^m + (X, \frac{-\tilde{r}_1}{b-a}) a^m + (0, \sum_{i=2}^{d} \frac{-\tilde{r}_i}{b-a^i}) a^{im},$$

co kończy dowód przy założeniu, że $1, b, a, \ldots, a^d$ są parami różne.

Aby dowieść przypadku ogólnego, utożsamiamy odwzorowanie $F = (aX + c, bY + \sum_{i=0}^{d} r_i X_i)$ z punktem $(a, b, c, r_0, \ldots, r_d) \in \mathbf{k}^{d+4}$. Wówczas automorfizmy trójkątne odpowiadają zbiorowi otwartemu $U = \{(a, b, c, r_i) \in \mathbf{k}^{d+4} : ab \neq 0\}$. Powyżej pokazaliśmy, że dla każdego d odwzorowanie wielomianowe

$$p : U \ni F = (a, b, c, r_0, \ldots, r_d) \mapsto p(F) \in \mathbf{k}^{d+4}$$

jest zerowe na zbiorze $\{(a, b, c, r_i) \in U : (1-b)\prod_{i=1}^{d}(1-a^i)(b-a^i) \neq 0\}$. Zbiór ten jest gęsty w topologii Zariskiego U, zatem odwzorowanie p jest tożsamościowo równe zeru - wielomian $p(T)$ z tezy twierdzenia jest więc charakterystyczny dla dowolnego automorfizmu trójkątnego. ⊠

Dowód twierdzenia 2.18. Przypadek 1: F jest automorfizmem. Korzystając z lematu 4.1 w [FM], odwzorowanie F możemy zapisać jako $F = \varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$,

gdzie $G = (aX + c, bY + p(X)) \in \mathrm{Tr}_2(\mathbf{k})$, $\varphi \in \mathrm{GA}_2(\mathbf{k})$ oraz $\deg F = \deg G \cdot (\deg \varphi)^2$. Przyjmijmy $\deg G = d$, $\deg \varphi = e$ oraz (bez straty ogólności) $\varphi(0) = 0$. Na mocy lematu, $p(T) = (T-1)(T-b)\prod_{i=1}^{d}(T-a^i)$ jest wielomianem charakterystycznym ciągu $G^{\circ m}$, czyli również ciągu $u_m = G^{\circ m} \circ \varphi^{-1}$. Wobec tego $u_m = q_0 + q_b b^m + \sum_{i=1}^{d} q_i a^{im}$, dla pewnych $q_0, q_b, q_1, \ldots, q_d \in \bar{\mathbf{k}}[X, Y]$ Podobnie jak w dowodzie lematu możemy założyć, że $1, b, a, \ldots, a^d$ są różne między sobą. Wtedy ciąg u_m jest półprosty i ponieważ $F^{\circ m} = \varphi(u_m)$, wielomian charakterystyczny dla F jest postaci

$$q(T) = (T-1) \cdot \prod_{j_0+\ldots+j_d \leqslant e} (T - b^{j_0} a^{j_1+2j_2+\ldots+dj_d})$$

Analogicznie jak w [FM] pokazujemy, że $\#\{b^{j_0} a^{j_1+2j_2+\ldots+dj_d} : j_0+j_1+\ldots+j_d \leqslant e\} \leqslant \#\{b^k a^l : k + dl \leqslant e\}$ skąd $\deg q(T) \leqslant 1 + (1+d) = 2 + d$. Tym bardziej więc $\deg \mu_F \leqslant 2 + d$.

Przypadek 2: F nie jest automorfizmem. Na mocy stwierdzenia 1.14 mamy $\mathrm{J}F = 0$ i twierdzenie 1.4 z pracy [No2] mówi, że istnieją wtedy $h \in \mathbf{k}[X, Y]$ oraz $u, v \in \mathbf{k}[T]$, dla których $F_1 = u(h)$ i $F_2 = v(h)$. Jeśli $\deg F = d$, to $\deg u \leqslant d$, $\deg v \leqslant d$; możemy także założyć, że $h(0,0) = 0$ oraz $u \cdot v \notin \mathbf{k}$. Rozważmy odwzorowanie $L(T) = h(u(T), v(T)) \in \mathbf{k}[T]$ i zauważmy, że $F^{\circ m}(u, v) = (u, v) \circ L^{\circ m}$. Wobec tego $\deg F^{\circ m}(u, v) = \max\{\deg u, \deg v\} \cdot (\deg L)^m$ ale jednocześnie $\sup_{m \in \mathbb{N}} \deg F^{\circ m} < +\infty$, czyli musi być $\deg L \leqslant 1$, tzn. $L(T) = aT + b$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{k}$. Ponieważ $F^{\circ(m+1)} = (u, v) \circ L^{\circ m}(h) = (u, v) \circ \left(a^m(h + \frac{b}{a-1}) - \frac{b}{a-1}\right)$, dostajemy równość $F^{\circ(m+1)} = \sum_{i=0}^{d} q_i a^{im}$ dla pewnych $q_i \in \bar{\mathbf{k}}[X, Y]$. Zatem $\prod_{i=0}^{d}(T - a^i)$ jest wielomianem charakterystycznym ciągu $F^{\circ(m+1)}$. Ale wtedy $p(T) = T\prod_{i=0}^{d}(T - a^i)$ spełnia warunek $p(F) = 0$, skąd $\deg \mu_F \leqslant \deg p = 2 + d$. ⊠

Uwaga 2.20. Postępując analogicznie jak w dowodzie Przypadku 2, możemy dla odwzorowania $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^2)$ o zerowym jakobianie uzyskać równoważność następujących warunków:

1. $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^2)$,

2. $\deg(F \circ F) \leqslant \deg F$,

3. $\deg F^{\circ m} \leqslant \deg F$ dla każdego $m \geqslant 2$.

Na koniec udowodnimy, że w przypadku $n = 2$ warunki od 1) do 6) stwierdzenia 1.14 są równoważne (bez założenia algebraicznej domkniętości ciała $\mathbf{k}$). Dokładniej, pokażemy

Stwierdzenie 2.21. *Jeśli $F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^2)$, to*

$$JF \neq 0 \Leftrightarrow F \textit{ jest injekcją.}$$

Dowód. Jeśli $\mathrm{J}F \neq 0$, to na mocy stw. 1.14 otrzymujemy, że $F \in \mathrm{GA}_2(\mathbf{k})$ - czyli w szczególności F jest injekcją.

Niech zatem $\mathrm{J}F = 0$. Wówczas $F = (u(h), v(h))$ dla pewnych $u, v \in \mathbf{k}[T]$, $h \in \mathbf{k}[X, Y]$ (zob. [No2]). Ponieważ F jest lokalnie skończone, dostajemy również, że $L(T) := h(u(T), v(T)) = aT + b$, gdzie $a, b \in \mathbf{k}$.

Przypuśćmy, że F jest injektywne, czyli h również jest injekcją. Gdyby było $a = 0$, to $F \circ F = (u, v) \circ L(h) = (u(b), v(b)) = const$, czyli F nie jest injekcją - sprzeczność. Wobec tego $a \neq 0$ i L jest izomorfizmem, czyli h jest surjekcją, a więc także bijekcją. Mamy zatem równość $(u(T), v(T)) = h^{-1}(aT + b)$, czyli odwzorowanie $(u, v) : \mathbf{k} \to \mathbf{k}^2$ jest bijektywne. Jednakże wtedy $\#\mathbf{k} = \#(u, v)^{-1}(\{x\} \times \mathbf{k}) \leqslant \#u^{-1}(x) < +\infty$ - co daje sprzeczność z tym, że $\mathbf{k}$ jest ciałem charakterystyki 0 (a więc nieskończonym). $\boxtimes$

Rozdział 3

Grupa generowana przez automorfizmy lokalnie skończone

W niniejszym rozdziale rozważamy podgrupę $(\mathrm{GA}_n(\mathbf{k}), \circ)$ generowaną przez automorfizmy lokalnie skończone $\mathbf{k}^n$. Rozpoczniemy od następującej nietrudnej obserwacji.

Uwaga 3.1. Niech $F \in \mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$. Wówczas

$$F \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n) \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k}) : \sup_{m \in \mathbb{N}} \deg(\varphi \circ F \circ \varphi^{-1})^{\circ m} < +\infty$$

Dowód. ($\Rightarrow$): Na mocy stwierdzenia 1.12 mamy $d := \sup_{m \in \mathbb{N}} \deg F^{\circ m} < +\infty$. Ponieważ dla dowolnego $\varphi \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ jest $(\varphi \circ F \circ \varphi^{-1})^{\circ m} = \varphi \circ F^{\circ m} \circ \varphi^{-1}$, łatwo dostajemy wspólne ograniczenie $\deg(\varphi \circ F \circ \varphi^{-1})^{\circ m} \leqslant d \cdot \deg \varphi \cdot \deg(\varphi^{-1})$. ($\Leftarrow$): Wystarczy wziąć $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}$ aby otrzymać warunek 2 stwierdzenia 1.12. ⊠

Definicja 3.2. Niech $\mathbf{k}$ będzie ciałem charakterystyki 0 oraz $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$ jako zbiór zawierający złożenia skończonej liczby automorfizmów lokalnie skończonych, tzn.:

$$\mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) := \{F_{(1)} \circ \ldots \circ F_{(s)} : F_{(i)} \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n), \mathrm{J}F_{(i)}(\underline{X}) \in \mathbf{k}^* \text{ dla } i = 1, \ldots, s\}$$

Ciekawą własność tego zbioru prezentuje

Stwierdzenie 3.3. *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zbiór $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$ jest podgrupą normalną w $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$.*

Dowód (por. [Z2]). Oczywiście $\mathrm{id}_{\mathbf{k}^n} \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n) \cap \mathrm{GA}_n(\mathbf{k}) \subset \mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$ oraz jeśli $F, G \in \mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$, to także $F \circ G \in \mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$. Pokażemy, że jeśli $F = F_1 \circ \ldots \circ F_s \in \mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$, to $F^{-1} \in \mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$. Na mocy stwierdzenia 1.14 mamy $F_i \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ i ponieważ $F^{-1} = F_s^{-1} \circ \ldots \circ F_1^{-1}$, wystarczy dowieść, że $F_i^{-1} \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$. Ale jeśli $p(T)$ jest wielomianem charakterystycznym dla F_i, to $q(T) = T^{\deg p} p(1/T)$ ma własność $q(F_i^{-1}) = 0$. Stąd wniosek, że $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$ jest grupą.
Niech $\varphi \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$. Ponieważ $\varphi \circ F \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ F_1 \circ \varphi^{-1} \circ \ldots \circ \varphi \circ F_s \circ \varphi^{-1}$, wystarczy pokazać, że $\varphi \circ F_i \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$. Wynika to natychmiast z uwagi 3.1 i stwierdzenia 1.12. ⊠

Uwaga 3.4. Dla dowolnego ciała $\mathbf{k}$ zachodzą równości:
1) $\mathrm{GF}_1(\mathbf{k}) = \mathrm{GA}_1(\mathbf{k})$,
2) $\mathrm{GF}_2(\mathbf{k}) = \mathrm{GA}_2(\mathbf{k})$.

Dowód. 1) Wiadomo, że $\mathrm{GA}_1 = \{aX + b : a \in \mathbf{k}^*, b \in \mathbf{k}\} = \mathrm{Af}_1$, więc $\mathrm{Af}_1 \subset \mathrm{LF}_1 \subset \mathrm{GF}_1 \subset \mathrm{GA}_1 = \mathrm{Af}_1$.
2) Na mocy twierdzenia Junga-van der Kulka (tw. 2.14) mamy $\mathrm{GA}_2 = \mathrm{TA}_2 = \langle \mathrm{GL}_2, \mathrm{EA}_2 \rangle$. Ponieważ $\mathrm{GL}_2(\mathbf{k}), \mathrm{EA}_2(\mathbf{k}) \subset \mathrm{LF}(\mathbf{k}^2) \cap \mathrm{GA}_2(\mathbf{k})$ otrzymujemy, że $\mathrm{GF}_2 \subset \mathrm{GA}_2 \subset \langle \mathrm{LF}(\mathbf{k}^2) \cap \mathrm{GA}_2 \rangle \subset \mathrm{GF}_2$. ⊠

W przypadku $n \geqslant 3$ sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana. Dopiero w 2003 roku (po ponad 30 latach) Shestakov i Umirbaev (zob. [SU1],[SU2]) udowodnili hipotezę Nagaty, według której automorfizm

$$N(X, Y, Z) = (X - 2Y(XZ + Y^2) - Z(XZ + Y^2)^2, Y + Z(XZ + Y^2), Z)$$

nie jest rozkładalny, tzn. nie da się przedstawić jako złożenie automorfizmów elementarnych i afinicznych $\mathbf{k}^3$ (tutaj $\mathbf{k}$ oznacza ciało algebraicznie domknięte charakterystyki 0). Jak łatwo sprawdzić, odwzorowanie N jest jednak lokalnie skończone (np. na mocy tego, że spełnia warunek $\sup_{m \in \mathbb{N}} \deg N^{\circ m} = 5$ albo z twierdzenia 4.5 w następnym rozdziale). Przykład ten, wraz ze stwierdzeniem 3.3 oraz ostatnią uwagą pokazuje, że automorfizmy lokalnie skończone mogą tworzyć zbiór generatorów grupy GA_n. Postawmy zatem hipotezę

Hipoteza 3.5. *Niech* $\mathbf{k}$ *będzie ciałem charakterystyki 0. Dla dowolnego* $n \geqslant 3$ *zachodzi równość* $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) = \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$.

W pracy [MP] rozważano (dla $\mathbf{k} = \mathbb{C}$) klasę odwzorowań będącą rozszerzeniem $\mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)$: odwzorowania, dla których istnieje taki szereg $p(T) \in \mathbb{C}[[T]]$,

że $p(F) = 0$ i pokazano, że hipoteza analogiczna do 3.5 jest prawdziwa dla tej klasy. Kolejne uogólnienie klasy odwzorowań lokalnie skończonych zaprezentowano w [F2].

3.1 Własności podgrup normalnych $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$

W dalszej części tego rozdziału zakładamy, że $n \geqslant 3$. Jeśli hipoteza 3.5 nie jest prawdziwa, to $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$ jest właściwą podgrupą normalną $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$. Zajmiemy się teraz badaniem takich podgrup, podamy również kilka przykładów. Ponieważ odwzorowanie $\mathrm{Jac} : \mathrm{GA}_n(\mathbf{k}) \ni F \mapsto \mathrm{J}F(\underline{X}) \in \mathbf{k}^*$ jest epimorfizmem grup, natychmiastowym przykładem właściwej podgrupy normalnej w $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ jest

$$\mathrm{SA}_n(\mathbf{k}) := \ker \mathrm{Jac} = \{F \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k}) : \mathrm{J}F(\underline{X}) = 1\}$$

nazywana specjalną grupą automorfizmów $\mathbf{k}^n$.

Ogólnie, jeśli G jest podgrupą $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ zaś $\mathcal{H}$ podgrupą $\mathbf{k}^*$ (z konieczności normalną, gdyż mnożenie w $\mathbf{k}$ jest przemienne), możemy zdefiniować podgrupę

$$G^{\mathcal{H}} := G \cap \mathrm{Jac}^{-1}(\mathcal{H}) = \{F \in G : \mathrm{J}F(\underline{X}) \in \mathcal{H}\}$$

(w ten sposób np. $\mathrm{SA}_n(\mathbf{k}) = \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})^{\{1\}}$). Własności podgrup tej postaci przedstawia

Stwierdzenie 3.6. *Niech G będzie podgrupą $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ oraz $\mathcal{H}$ podgrupą $\mathbf{k}^*$. Wtedy*

1. *$G^{\mathcal{H}}$ jest podgrupą normalną w G,*
2. *jeśli G jest normalna w $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$, to $G^{\mathcal{H}}$ również,*
3. *jeśli $G \supset \mathrm{SA}_n(\mathbf{k})$, to $G = \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})^{\mathcal{G}}$ dla $\mathcal{G} = Jac(G)$ - w szczególności G jest normalna w $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$.*

Dowód. 1. Wprost z definicji $G^{\mathcal{H}}$ jest podgrupą G. Jeśli $F \in G^{\mathcal{H}}$ oraz $\varphi \in G$, to $\varphi \circ F \circ \varphi^{-1} \in G$ oraz $\mathrm{J}(\varphi \circ F \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{J}\varphi \cdot \mathrm{J}F \cdot (\mathrm{J}\varphi)^{-1} = \mathrm{J}F \in \mathcal{H}$.
2. Dowód analogiczny jak w punkcie 1), przy czym ze względu na normalność G można wziąć $\varphi \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$.
3. Zauważmy, że $\mathcal{G} = \mathrm{Jac}(G)$ jest podgrupą (normalną) w $\mathbf{k}^*$. Pokażemy, że $G = \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})^{\mathcal{G}}$. Zawieranie "$\subset$" jest natychmiastowe, niech zatem $F \in$

$\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})^{\mathcal{G}}$. Z definicji $\mathcal{G}$, istnieje taki $\tilde{F} \in G$, że $\mathrm{J}\tilde{F} = \mathrm{J}F$. Ale wtedy $\mathrm{J}(\tilde{F}^{-1} \circ F) = 1$, skąd $\tilde{F}^{-1} \circ F \in \mathrm{SA}_n(\mathbf{k}) \subset G$ i $F = \tilde{F} \circ (\tilde{F}^{-1} \circ F) \in G$. ⊠

Wniosek 3.7. *Jeśli hipoteza 3.5 nie jest prawdziwa, tzn.* $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) \neq \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$, *to* $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) \cap \mathrm{SA}_n(\mathbf{k}) \neq \mathrm{SA}_n(\mathbf{k})$.

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) \supset \mathrm{SA}_n(\mathbf{k})$. Na mocy punktu 3. mielibyśmy $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) = \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})^{\mathcal{G}}$, gdzie $\mathcal{G} = \mathrm{Jac}(\mathrm{GF}_n(\mathbf{k})) \supset \mathrm{Jac}(\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})) = \mathbf{k}^*$ - a zatem $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) = \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$, czyli sprzeczność. ⊠

Jeśli zatem automorfizmy lokalnie skończone nie tworzą (dla $n \geqslant 3$) zestawu generatorów grupy $\mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$, to grupa $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k})^{\{1\}} = \mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) \cap \mathrm{SA}_n(\mathbf{k})$ jest nietrywialną podgrupą normalną w $\mathrm{SA}_n(\mathbf{k})$. Warto wspomnieć, że w przypadku $n = 2$ przykład taki podał Danilov w pracy [Da] - jest on jednak niezmiernie skomplikowany; w dowodzie wykorzystywane są metody kombinatorycznej teorii grup.

W dalszej części wykorzystamy następujący znany fakt

Lemat 3.8. *Każdy automorfizm rozkładalny* $F \in \mathrm{TA}_n(\mathbf{k})$ *można przedstawić w postaci*

$$F = E_1 \circ \ldots E_s \circ D,$$

gdzie $E_i \in \mathrm{EA}_n(\mathbf{k})$ *oraz* $D \in \mathrm{Diag}_n(\mathbf{k})$.

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\mathrm{TA}_n = \langle \mathrm{EA}_n, \mathrm{Diag}_n \rangle$. Ponieważ z definicji mamy $\mathrm{TA}_n = \langle \mathrm{GL}_n, \mathrm{EA}_n \rangle$, wystarczy dowieść, że $\mathrm{GL}_n \subset \langle \mathrm{EA}_n, \mathrm{Diag}_n \rangle$. Niech zatem $L \in \mathrm{GL}_n$, ustalmy też bazę przestrzeni wektorowej $\mathbf{k}^n$. Do macierzy odwzorowania L w tej bazie stosujemy metodę eliminacji Gaussa otrzymując $\tilde{L} = G_1 \circ \ldots \circ G_m \circ L$, gdzie $\tilde{L}$ ma macierz trójkątną dolną i wobec tego $\tilde{L} \in \langle EA_n \rangle$. Pozostaje pokazać, że G_i - automorfizmy pochodzące od operacji w metodzie eliminacji Gaussa - da się uzyskać jako złożenia odwzorowań elementarnych i diagonalnych. Operacje na macierzy L w metodzie eliminacji mogą być dwóch typów:

- $A_{i,j,c} = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i + cX_j, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ - dodanie wielokrotności pewnego wiersza macierzy do innego wiersza

- $T_{i,j} = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_j, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \ldots, X_n)$ - transpozycja wierszy.

Jednak, jak łatwo widać, $A_{i,j,c} \in \mathrm{EA}_n$ oraz $T_{i,j} = A_{i,j,1} \circ A_{j,i,-1} \circ A_{i,j,1} \circ \tilde{D}$, gdzie $\tilde{D} = (X_1, \ldots, X_{i-1}, -X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n)$. Wobec tego $L \in \langle \mathrm{EA}_n, \mathrm{Diag}_n \rangle$ i ostatecznie $\mathrm{TA}_n = \langle \mathrm{EA}_n, \mathrm{Diag}_n \rangle$.

Niech teraz $E \in \mathrm{EA}_n$, przy czym $E_i = X_i + G(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)$, $E_j = X_j$ dla $j \neq i$ oraz $D = (d_1 X_1, \ldots, d_n X_n) \in \mathrm{Diag}_n$. Zauważmy, że wtedy $D \circ E = \tilde{E} \circ D$, gdzie $\tilde{E}_i = X_i + d_i G(d_1^{-1} X_1, \ldots, d_n^{-1} X_n)$. Wnioskujemy stąd, że $\langle \mathrm{EA}_n, \mathrm{Diag}_n \rangle = \langle \mathrm{EA}_n \rangle \circ \mathrm{Diag}_n$, co kończy dowód. ⊠

Wniosek 3.9. *Każdy automorfizm rozkładalny $F \in \mathrm{TA}_n(\mathbf{k})$ o jakobianie równym 1 jest złożeniem automorfizmów elementarnych.*

Dowód. Zapiszmy $F = E_1 \circ \ldots \circ E_s \circ D$ jak w lemacie. Ponieważ $\det E_i'(\underline{X}) = 1$, mamy $\det D(\underline{X}) = \det F'(\underline{X}) = 1$. Wystarczy zatem pokazać, że każdy automorfizm diagonalny o wyznaczniku 1 jest złożeniem odwzorowań elementarnych. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę zmiennych n. W przypadku $n = 1$ mamy $D = \mathrm{id}_{\mathbf{k}} \in \mathrm{EA}_1$. Dla $n \geqslant 2$, oznaczmy $A_{i,j,c} = (X_1, \ldots, X_i + cX_j, \ldots, X_n) \in \mathrm{EA}_n$ i zauważmy, że automorfizm $P = (-X_2, X_1, \ldots, X_n) = A_{1,2,-1} \circ A_{2,1,1} \circ A_{1,2,-1} \in \langle EA_n \rangle$. Niech $D = (d_1 X_1, \ldots, d_n X_n) \in \mathrm{Diag}_n$ spełnia warunek $\mathrm{J}D(\underline{X}) = \prod_{i=1}^{n} d_i = 1$. Ponieważ $P \circ A_{2,1,1-d_1^{-1}} \circ A_{1,2,d_1} \circ A_{2,1,1-d_1^{-1}} = (X_1, d_1 d_1 X_2, \ldots, d_n X_n)$ i z założenia indukcyjnego $(d_1 d_2 X_2, \ldots, d_n X_n) \in \langle EA_{n-1} \rangle$, mamy także $D \in \langle \mathrm{EA}_n \rangle$. ⊠

Stwierdzenie 3.10. *Niech G będzie podgrupą normalną GA_n oraz $\mathrm{Diag}_n \subset G$. Wtedy*

1. $\mathrm{TA}_n \subset G$,
2. *jeśli $n = 3$, to automorfizm Nagaty*

$$N = (X - 2Y\sigma - Z\sigma^2, Y + Z\sigma, Z)$$

(gdzie $\sigma = XZ + Y^2$) jest elementem G.

Dowód.
1. Na podstawie lematu 3.8 wystarczy pokazać, że każdy automorfizm elementarny jest w G. Niech zatem $F \in \mathrm{EA}_n$, tzn. $F = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i + g, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ dla pewnego $g \in \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$. Weźmy $D = (X_1, \ldots, X_{i-1}, 2X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n) \in G$ i zauważmy, że

$$F^{-1} \circ D \circ F = (X_1, \ldots, X_{i-1}, 2X_i + g, X_{i+1}, \ldots, X_n) \in G$$

gdyż G jest normalna. Wówczas $F = (F^{-1} \circ D \circ F) \circ D^{-1} \in G$.
2. Na początek zauważmy, że $N^{-1} = (X + 2Y\sigma - Z\sigma^2, Y - Z\sigma, Z)$. Niech $D = (\frac{1}{4}X, \frac{1}{2}Y, Z) \in G$. Widać, że $\sigma \circ L = \frac{1}{4}\sigma$ oraz

$$N^{-1} \circ L \circ N = \Big(\frac{1}{4}X - \frac{1}{4}Y\sigma - \frac{1}{16}Z\sigma^2, \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}Z\sigma, Z\Big) \in G$$

ze względu na normalność G. Jednocześnie $N = (N^{-1} \circ L \circ N) \circ L^{-1} \in G$. $\boxtimes$

Dla podgrupy $G \subset \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ określamy

$$\mathrm{N}(G) := \bigcap \{N \lhd \mathrm{GA}_n(\mathbf{k}) : N \supset G\}$$

jest to najmniejsza podgrupa normalna zawierająca G. Powyższe obserwacje można zatem zapisać skrótowo jako $\mathrm{TA}_n \subset \mathrm{N}(\mathrm{Diag}_n)$ oraz $N \in \mathrm{N}(\mathrm{Diag}_3)$. Pokazuje to, że grupa $\mathrm{N}(\mathrm{Diag}_n)$ jest „duża", równocześnie jednak $\mathrm{N}(\mathrm{Diag}_n) \subset \mathrm{N}(\mathrm{LF}(\mathbf{k}^n)) = \mathrm{GF}_n$.

Obserwacja 3.11. *Niech G będzie taką podgrupą normalną SA_n, że $\mathrm{Diag}_n \cap \mathrm{SA}_n \subset G$. Wtedy*

1. *dla $n \geqslant 2$ jest $\mathrm{TA}_n \cap \mathrm{SA}_n \subset G$,*
2. *jeśli $n = 3$, to automorfizm Nagaty jest elementem G.*

Dowód.
1. Na podstawie wniosku 3.9 wystarczy pokazać, że $\mathrm{EA}_n \subset G$. Niech zatem $F \in \mathrm{EA}_n$, tzn. $F = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i + g, X_{i+1}, \ldots, X_n) \in \mathrm{EA}_n$ dla pewnego $g \in \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n]$. Ustalmy $j \neq i$ oraz zapiszmy $g = \sum_{m=0}^{d} g_m(X_*)X_j^m$, gdzie X_* oznacza zestaw zmiennych $X_1, \ldots, X_n$ z wyłączeniem X_i oraz X_j. Wybierzmy dowolny element $a \in \mathbf{k}^*$ nie będący pierwiastkiem z 1 (np. $a = 2$) i zdefiniujmy odwzorowania $D = (D_1, \ldots, D_n) \in \mathrm{Diag}_n \cap \mathrm{SA}_n$ oraz $E = (E_1, \ldots, E_n) \in \mathrm{EA}_n$ wzorami

$$D_k = \begin{cases} aX_i, & k = i \\ a^{-1}X_j, & k = j \\ X_k, & k \neq i, j \end{cases} \qquad E_k = \begin{cases} X_i + h, & k = i \\ X_k, & k \neq i \end{cases}$$

gdzie $h = \sum_{m=0}^{d} (a^{1+m} - 1)^{-1} g_m(X_*)X_j^m$. Wówczas na mocy normalności G mamy $E^{-1} \circ D \circ E \in G$ oraz

$$(E^{-1} \circ D \circ E)_k = \begin{cases} aX_i + ah - h \circ D, & k = i \\ a^{-1}X_j, & k = j \\ X_k, & k \neq i, j \end{cases}$$

Wobec tego $(E^{-1} \circ D \circ E \circ D^{-1})_k = X_k$, dla $k \neq i$ oraz $(E^{-1} \circ D \circ E \circ D^{-1})_i = X_i + a \cdot h \circ D^{-1} - h = X_i + \sum_{m=0}^{d} (a \cdot \frac{a^m}{a^{1+m}-1} - (a^{1+m}-1)^{-1}) g_m(X_*) X_j^m = g$, czyli $F = (E^{-1} \circ D \circ E) \circ D^{-1} \in G$.
2. Zob. dowód stwierdzenia 3.10. ⊠

W dalszej części zajmiemy się podgrupami normalnymi w $\mathrm{GA}_n^0(\mathbf{k}) = \{F \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k}) : F(0) = 0\}$. Zaczniemy od następującej natychmiastowej uwagi.

Uwaga 3.12. Odwzorowanie

$$\mathrm{Lin} : \mathrm{GA}_n^0(\mathbf{k}) \ni F \mapsto \mathrm{Lin}(F) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$$

jest epimorfizmem grup.

Zatem analogicznie jak w przypadku odwzorowania Jac, dla dowolnej podgrupy G w $\mathrm{GA}_n^0(\mathbf{k})$ oraz podgrupy normalnej $\mathcal{H} \subset \mathrm{GL}_n$ możemy zdefiniować

$$G^{\mathcal{H}} := G \cap \mathrm{Lin}^{-1}(\mathcal{H}) = \{F \in G : \mathrm{Lin}(F) \in \mathcal{H}\}$$

Łatwo widać, że jeśli G jest podgrupą $\mathrm{GA}_n^0(\mathbf{k})$, to $G^{\{\mathrm{id}_{\mathbf{k}^n}\}} \subset G^{\{1\}}$. Podobnie jak poprzednio możemy pokazać

Wniosek 3.13. *Jeśli hipoteza 3.5 nie jest prawdziwa, tzn.* $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) \neq \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$, *to* $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) \cap \mathrm{GA}_n^0(\mathbf{k}) \neq \mathrm{GA}_n^0(\mathbf{k})$.

Dowód. Dowolny automorfizm $\varphi \in \mathrm{GA}_n(\mathbf{k})$ można przedstawić w postaci $\varphi = T \circ \psi$, gdzie T jest translacją o wektor $\varphi(0)$ oraz $\psi \in \mathrm{GA}_n^0(\mathbf{k})$. Gdyby było $\mathrm{GF}_n(\mathbf{k}) \supset \mathrm{GA}_n^0(\mathbf{k})$, to $\psi \in \mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$ i ponieważ $T \in \mathrm{LF}_n(\mathbf{k})$, również $\varphi = T \circ \psi \in \mathrm{GF}_n(\mathbf{k})$. ⊠

Rozdział 4

Automorfizmy lokalnie skończone a różniczkowania

W niniejszym rozdziale $\mathbf{k}$ oznacza dowolne ciało charakterystyki zero (chyba, że wyraźnie zaznaczono, iż $\mathbf{k} = \mathbb{C}$). Zaprezentujemy związki między odwzorowaniami lokalnie skończonymi a różniczkowaniami pierścienia wielomianów $\mathbf{k}^{[n]}$. Na początek przypomnijmy definicje i podstawowe własności różniczkowań (zob. [No1], [E]).

Definicja 4.1. Różniczkowaniem $\mathbf{k}$-algebry A nazywamy odwzorowanie $\mathbf{k}$-liniowe $D : A \to A$ spełniające warunek $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ dla dowolnych $a, b \in A$.

Uwaga 4.2. Czasami odwzorowania spełniające powyższy warunek nazywane są $\mathbf{k}$-różniczkowaniami na A jako, że $D|_{\mathbf{k}} = 0$. W dalszej części zajmujemy się tylko takimi różniczkowaniami.

Definicja 4.3. Różniczkowanie D określone na $\mathbf{k}$-algebrze A nazwiemy lokalnie nilpotentnym, jeśli dla każdego $a \in A$ istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że $D^{\circ n}(a) = 0$. Różniczkowanie D nazwiemy lokalnie skończonym, jeśli dla każdego $a \in A$ spełniony jest warunek $\dim_{\mathbf{k}} \operatorname{span}\{a, D(a), D^{\circ 2}(a), \ldots\} < +\infty$.

Oczywiście każde różniczkowanie lokalnie nilpotentne jest lokalnie skończone ale nie na odwrót (np. różniczkowanie $D = X_2 \frac{\partial}{\partial X_1} + X_1 \frac{\partial}{\partial X_2}$ na $\mathbf{k}^{[2]}$); jak okaże się w dalszej części tego rozdziału, różnica między tymi dwoma klasami odwzorowań jest dosyć znacząca.

Niech D będzie różniczkowaniem lokalnie nilpotentnym $\mathbf{k}$-algebry A. Mo-

żemy określić odwzorowanie $\exp(D) : A \to A$ wzorem

$$(*) \qquad \exp(D)(a) := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} D^{\circ i}(a)$$

Dla każdego $a \in A$ powyższa suma jest w istocie skończona, definicja jest zatem poprawna (dla dowolnego ciała $\mathbf{k}$ charakterystyki 0).

Niech teraz D będzie różniczkowaniem lokalnie skończonym. Aby określić odwzorowanie $\exp(D)$ założymy, że $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Ponieważ z definicji przestrzeń $W_a := \operatorname{span}\{a, D(a), D^{\circ 2}(a), \ldots\}$ jest skończenie wymiarowa oraz $D(W_a) \subset W_a$, odwzorowanie $\exp(D|_{W_a})$ określone wzorem $(*)$ jest poprawnie zdefiniowanym endomorfizmem liniowym przestrzeni W_a. Przyjmujemy $\exp(D)(a) := \exp(D|_{W_a})(a)$.

Można sprawdzić, że w obu przypadkach odwzorowanie $\exp(D)$ jest automorfizmem algebry A oraz $\exp(D)^{-1} = \exp(-D)$. Ponadto, jeśli D i D' są różniczkowaniami lokalnie nilpotentnymi (lub lokalnie skończonymi dla $\mathbf{k} = \mathbb{C}$) algebry A oraz $D' \circ D = D \circ D'$, to różniczkowanie $D + D'$ jest lokalnie nilpotentne (odp. lokalnie skończone) oraz $\exp(D+D') = \exp(D) \circ \exp(D') = \exp(D') \circ \exp(D)$.

Dla różniczkowań lokalnie skończonych można dowieść następującej wersji twierdzenia Jordana (zob. [No1]; por. tw. 1.11)

Twierdzenie 4.4. *Każde lokalnie skończone różniczkowanie D pierścienia $\mathbf{k}^{[n]}$ posiada jednoznaczny rozkład $D = D_n + D_s$ spełniający warunki:*

1. *$D_n \circ D_s = D_s \circ D_n$,*
2. *D_n jest różniczkowaniem lokalnie nilpotentnym,*
3. *D_s jest różniczkowaniem półprostym (tzn. wielomian minimalny D_s jako endomorfizmu liniowego $\mathbf{k}^{[n]}$ nie ma czynników wielokrotnych).*

Jak nietrudno sprawdzić, jeśli różniczkowanie D jest lokalnie nilpotentne (lokalnie skończone, o ile $\mathbf{k} = \mathbb{C}$), to automorfizm $F = \exp(D)_*$ jest unipotetny (półprosty). Powyższe twierdzenie pozwala zatem przedstawić automorfizm postaci $\exp(D)_*$ jako złożenie $\exp(D)_* = \exp(D_n)_* \circ \exp(D_s)_*$, przy czym pierwsze odwzorowanie po prawej stronie równości jest unipotentne a drugie półproste.

Nie jest jednak jasne, czy każdy lokalnie skończony automorfizm $\mathbf{k}^n$ jest postaci $\exp(D)$ dla pewnego D. Wiadomo jedynie (zob. [FM]), że każdy automorfizm unipotentny F_u pochodzi od (jedynego) lokalnie nilpotentnego różniczkowania D_n, tzn. $F_u = \exp(D_n)_*$.

4.1 Wielomian minimalny automorfizmu postaci $\exp(D)$

Celem tego podrozdziału jest dowód następującego twierdzenia, którego dowód dla przypadku $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ został zaprezentowany w [Z1].

Twierdzenie 4.5. *Niech D będzie różniczkowaniem lokalnie nilpotentnym pierścienia $\mathbf{k}^{[n]}$ oraz $F = \exp(D)_*$. Wówczas wielomian minimalny odwzorowania F jest postaci*

$$\mu_F(T) = (T-1)^d$$

gdzie $d = \min\{i \in \mathbb{N} : D^{\circ i}(X_1) = \ldots = D^{\circ i}(X_n) = 0\}$.

W dowodzie wykorzystamy poniższe lematy.

Lemat 4.6. *Niech A będzie $\mathbf{k}$-algebrą, $a \in A$ oraz niech D będzie różniczkowaniem lokalnie nilpotentnym na A. Załóżmy, że $m \geqslant 1$ oraz przy pewnych $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathbf{k}$ zachodzi równość*

$$D^{\circ m}(a) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i D^{\circ i}(a).$$

Wówczas $D^{\circ m}(a) = 0$.

Dowód. Indukcja ze względu na liczbę m. Jeśli $m = 1$, to $D(a) = \alpha_0 a$ skąd $D^{\circ n}(a) = \alpha_0^n a$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ D jest lokalnie nilpotentne, musi być $D^{\circ n}(a) = 0$ dla pewnego n, skąd $\alpha_0 = 0$ lub $a = 0$ i dalej $D(a) = 0$. Niech zatem $m > 1$. Przypuśćmy, że $D^{\circ m}(a) \neq 0$. Z lokalnej nilpotentności D istnieje $M > m$ takie, że $D^{\circ M}(a) = 0$ oraz $D^{\circ (M-1)}(a) \neq 0$. Niech $I := \{i < m : \alpha_i \neq 0\}$. Jeśli $I = \emptyset$, to $D^{\circ m}(a) = 0$ i dostajemy sprzeczność. Wobec tego niech $i_0 := \max I$. Mamy

$$0 = D^{\circ (M-m)}(D^{\circ m}(a)) = D^{\circ (M-m)}\Big(\sum_{i=0}^{i_0} \alpha_i D^{\circ i}(a)\Big) = \sum_{i=0}^{i_0} \alpha_i D^{\circ i}(a')$$

gdzie $a' := D^{\circ (M-m)}$. Jako, że $\alpha_{i_0} \neq 0$, przekształcając powyższą równość otrzymujemy $D^{\circ i_0}(a') = -\sum_{i=0}^{i_0-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} D^{\circ i}(a')$. Ponieważ $i_0 < m$, na mocy założenia indukcyjnego $D^{\circ i_0}(a') = 0$; jednocześnie $D^{\circ i_0}(a') = D^{\circ (M-m+i_0)}(a) \neq 0$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu. ⊠

Lemat 4.7. *Niech d oraz i będą liczbami naturalnymi, przy czym $d > 0$. Zdefiniujmy*

$$\beta_{d,i} := \sum_{m=0}^{d} (-1)^m \binom{d}{m} m^i$$

Równość $\beta_{d,i} = 0$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $d > i$.

Dowód. Na mocy równości $0 = (1-1)^d = \sum_{m=0}^{d} (-1)^m \binom{d}{m}$ dostajemy $\beta_{d,0} = 0$. Z kolei $\beta_{1,i} = -1$ dla $i > 0$. Niech zatem $d > 1$, $i > 0$ - przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na d. Mamy

$$\begin{aligned}\beta_{d,i} &= \sum_{m=1}^{d} (-1)^m \frac{d}{m} \binom{d-1}{m-1} m^i = -d \sum_{m=0}^{d-1} (-1)^m \binom{d-1}{m} (m+1)^{i-1} = \\ &= -d \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \Big(\sum_{m=0}^{d-1} (-1)^m \binom{d-1}{m} m^j \Big) = -d \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \beta_{d-1,j}\end{aligned}$$

Jeśli $d > i$, to $d-1 > j$ i w powyższej sumie wszystkie $\beta_{d-1,j} = 0$ z założenia indukcyjnego - wobec tego $\beta_{d,i} = 0$. Jeśli natomiast $d \leqslant i$, to $(-1)^d \beta_{d,i} > 0$. Istotnie $\beta_{1,i} = -1$ oraz $(-1)^d \beta_{d,i} = d \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-1)^{d-1} \beta_{d-1,j} > 0$ ⊠

Dowód twierdzenia 4.5. Zauważmy, że $F^{\circ m} = (\exp(D)^{\circ m})_* = \exp(mD)_*$, zatem j-ta współrzędna odwzorowania $F^{\circ m}$ jest postaci

$$(F^{\circ m})_j = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{i!} (mD)^{\circ i}(X_j) = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{i!} m^i D^{\circ i}(X_j), \text{ dla } j = 1, \ldots, n$$

Niech $p(T) = (1-T)^d$. Dla $j = 1, \ldots, n$ mamy

$$\sum_{m=0}^{d} (-1)^m \binom{d}{m} (F^{\circ m})_j = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{i!} \sum_{m=0}^{d} (-1)^m \binom{d}{m} m^i D^{\circ i}(X_j) = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{i!} \beta_{d,i} D^{\circ i}(X_j)$$

czyli $p(F) = 0$. Wobec tego $(1-T)^d \in I_F$ i wielomian minimalny musi być postaci $\mu_F(T) = (T-1)^e$ dla pewnego e. Przypuśćmy, że $e < d$. Możemy dla ustalenia uwagi założyć, że $d = \min\{m \in \mathbb{N} : D^{\circ m}(X_1) = 0\}$. Mamy wtedy

$$0 = (-1)^e \big(\mu_F(F)\big)_1 = \sum_{m=0}^{e} (-1)^m \binom{e}{m} (F^{\circ m})_1 = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{i!} \beta_{e,i} D^{\circ i}(X_1)$$

Ponieważ $e < d$, na mocy lematu 4.7 jest $\beta_{e,d-1} \neq 0$, zatem $D^{\circ(d-1)}(X_1) = -\sum_{i=1}^{d-2} \frac{1}{i!} \frac{\beta_{e,i}}{\beta_{e,d-1}} D^{\circ i}(X_1)$. Z lematu 4.6 wnioskujemy więc, że $D^{\circ(d-1)}(X_1) = 0$, wbrew definicji d. ⊠

Wniosek 4.8. *Przy oznaczeniach twierdzenia 4.5, automorfizm odwrotny do F wyraża się wzorem*

$$F^{-1} = \sum_{m=0}^{d-1} (-1)^m \binom{d}{m+1} F^{\circ m}$$

Dowód. Wielomian minimalny dla F jest postaci $\mu_F(T) = (T-1)^d$, zatem

$$(-1)^d \operatorname{id}_{\mathbf{k}^n} = -\sum_{m=1}^{d} (-1)^{d-m} \binom{d}{m} F^{\circ m} = \Big(\sum_{m=0}^{d-1} (-1)^{d-m} \binom{d}{m+1} F^{\circ m} \Big) \circ F$$

Dzieląc obie strony przez $(-1)^d$ otrzymujemy wzór na lewostronną odwrotność odwzorowania F, która na mocy lematu 1.1 musi być równa F^{-1}. ⊠

4.2 Różniczkowanie dla automorfizmu trójkątnego

Będziemy rozważać automorfizmy trójkątne $\mathbb{C}^n$, tzn. odwzorowania postaci $F = (F_1, \ldots, F_n)$, dla których $F_i = c_i X_i + G_i(X_1, \ldots, X_{i-1})$, gdzie $c_i \in \mathbb{C}^*$ oraz $G_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{i-1}]$. Na początek odnotujmy nietrudne

Stwierdzenie 4.9. *Różniczkowanie D pierścienia wielomianów $\mathbb{C}^{[n]}$ określone na generatorach przez*

$$D(X_i) = \tilde{c}_i X_i + \tilde{g}_i(X_1, \ldots, X_{i-1})$$

gdzie $\tilde{c}_i \in \mathbb{C}$, $\tilde{g}_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{i-1}]$ jest lokalnie skończone oraz $\exp(D)_*$ jest automorfizmem trójkątnym.

Dowód. Różniczkowanie D jest „trójkątne", zatem łatwo sprawdzić, że odwzorowanie $\exp(D)_*$ będzie automorfizmem trójkątnym - o ile tylko D jest lokalnie skończone. Naturalnie (rozumowanie indukcyjne ze względu na liczbę zmiennych n) wystarczy pokazać, że przestrzeń

$$V := \operatorname{span}\{X_n, D(X_n), D^{\circ 2}(X_n), \ldots\}$$

jest skończenie wymiarowa. Dla $n = 1$ jest $\dim V = \dim \operatorname{span}\{X_1, \tilde{g}_1\} \leqslant 2$. Załóżmy więc, że $n > 1$. Ponieważ $D^{\circ i}(X_n) \in \operatorname{span}\{X_n, \tilde{g}_n, D(\tilde{g}_n), \ldots\}$, mamy $\dim V \leqslant 1 + \dim \operatorname{span}\{\tilde{g}_n, D^{\circ 2}(\tilde{g}_n), \ldots\} < +\infty$, gdyż $\tilde{g}_n \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ a na mocy założenia indukcyjnego różniczkowanie $D|_{\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n-1}]}$ jest lokalnie skończone. ⊠

Celem tego podrozdziału jest odwrócenie stwierdzenia 4.9, a dokładniej odpowiedź na następujące pytanie: czy jeśli F jest automorfizmem trójkątnym $\mathbb{C}^n$, to istnieje różniczkowanie lokalnie skończone D pierścienia $\mathbb{C}^{[n]}$, dla którego $\exp(D)_* = F$? Odpowiedź jest pozytywna, co pokazuje poniższe

Twierdzenie 4.10. *Niech $F = (F_1, \ldots, F_n)$ będzie automorfizmem trójkątnym $\mathbb{C}^n$, tzn. $F_i = c_i X_i + G_i(X_1, \ldots, X_{i-1})$ dla pewnych $c_i \in \mathbb{C}^*$ oraz $G_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{i-1}]$. Wówczas:*

1. *istnieje różniczkowanie lokalnie skończone D pierścienia $\mathbb{C}^{[n]}$, dla którego $\exp(D)_* = F$,*
2. *jeśli $c_i = 1$ dla $i = 1, \ldots, n$, to różniczkowanie D z punktu 1) jest lokalnie nilpotentne.*

Zanim przystąpimy do dowodu, poczynimy pewne spostrzeżenia. Wprowadzamy następujący porządek $\prec$ na $\mathbb{N}^n$:

$$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \exists i \geqslant 1 : \alpha_n = \beta_n \wedge \ldots \wedge \alpha_{i+1} = \beta_{i+1} \wedge \alpha_i < \beta_i$$

dla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. Porządek ten przenosimy w standardowy sposób na jednomiany w $\mathbf{k}^{[n]}$, tzn. przyjmujemy $X^\alpha \prec X^\beta \Leftrightarrow \alpha \prec \beta$. Wykorzystamy także poniższą uwagę.

Uwaga 4.11. Jeśli D jest różniczkowaniem lokalnie skończonym $\mathbf{k}^{[n]}$, to dla dowolnej podprzestrzeni wektorowej $W \subset \mathbf{k}^{[n]}$ skończonego wymiaru mamy

$$\dim_{\mathbf{k}} \operatorname{span}\{D^{\circ i}(w) : w \in W, i \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

Dowód uwagi 4.11. Oznaczmy $m := \dim W$. Wybierzmy bazę $w_1, \ldots, w_m$ przestrzeni W i przyjmijmy $W_j := \operatorname{span}\{w_j, D(w_j), D^{\circ 2}(w_j), \ldots\}$ dla $j = 1, \ldots, m$. Dla dowolnego $w = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j \in W$ mamy $D^{\circ i}(w) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j D^{\circ i}(w_j)$, zatem $\operatorname{span}\{w, D(w), D^{\circ 2}(w), \ldots\} \subset \operatorname{span} \bigcup_{j=1}^{n} W_j$ skąd $\dim_{\mathbf{k}} \operatorname{span}\{D^{\circ i}(w) : w \in V, i \in \mathbb{N}\} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \dim W_j < +\infty$. ⊠

Dowód twierdzenia 4.10. Indukcja ze względu na liczbę zmiennych n. Przypadek $n = 1$ jest prosty: jeśli $F_1 = c_1 X_1 + G_1$, gdzie $G_1 \in \mathbb{C}$ - wystarczy

przyjąć $D(X_1) = \ln(c_1)X_1 + G_1/c_1$. Określając $\ln(c_1) := 0$ dla $c_1 = 1$ dostajemy także punkt 2. tezy. Załóżmy zatem, że $n > 1$ oraz twierdzenie zachodzi dla odwzorowań $n-1$ zmiennych. Skonstruujemy taki ciąg różniczkowań lokalnie skończonych $D_0, D_1, \ldots, D_K$ pierścienia $\mathbb{C}^{[n]}$, że $\exp(D_K)_* = F$. Na mocy założenia indukcyjnego istnieje lokalnie skończone różniczkowanie $\bar{D} = D|_{\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n-1}]}$, dla którego $\exp(\bar{D})_* = (F_1, \ldots, F_{n-1})$. Dla wszystkich $k \geqslant 0$ oraz $i < n$ przyjmujemy $D_k(X_i) := \bar{D}(X_i)$, w ten sposób pozostaje zdefiniować $D_k(X_n)$ dla $k \geqslant 0$. Na początek oznaczmy

$$V := \operatorname{span}\{\bar{D}^{\circ i}(\underline{X}^\alpha) : \underline{X}^\alpha \in \operatorname{mon} G_n, i \in \mathbb{N}\}$$

i zauważmy, że na mocy uwagi 4.11 jest $\dim V < +\infty$ czyli także $\#\operatorname{mon} V := \#\{\operatorname{mon} v : v \in V\} < +\infty$. Jeśli teraz

$$W := \operatorname{span}\{\bar{D}^{\circ i}(\underline{X}^\alpha) : \underline{X}^\alpha \in \operatorname{mon} V, i \in \mathbb{N}\},$$

to znowu z 4.11 dostajemy $\dim W < +\infty$.

Konstrukcję rozpoczynamy od $D_0(X_n) := \ln(c_n)X_n$ (przy czym $\ln(c_n) := 0$ jeśli $c_n = 1$). Jeśli $F_n = \exp(D_0)(X_n)$, wystarczy oczywiście wziąć $D := D_0$. W przeciwnym razie przyjmujemy $b_1\underline{X}^{\alpha^1} := \operatorname{Lt}(F_n - \exp(D_0)(X_n)) = \operatorname{Lt} G_n(X_1, \ldots, X_{n-1})$, $w_1 := \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^1 \ln(c_i)$ oraz definiujemy

$$D_1(X_n) := D_0(X_n) + \frac{w_1}{\exp(w_1) - 1} b_1 \underline{X}^{\alpha^1}$$

przy czym jeśli $w_1 = 0$, to z definicji $\frac{w_1}{\exp(w_1)-1} := 1$. Ponieważ $\alpha_n^1 = 0$, mamy $\operatorname{Lt} D_1^{\circ i}(\underline{X}^{\alpha^1}) = \operatorname{Lt} \bar{D}^{\circ i}(\underline{X}^{\alpha^1}) = w_1^i \underline{X}^{\alpha^1}$. Ponadto, wobec $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i!} w_1^{i-1} = \left(\frac{w_1}{\exp(w_1) - 1}\right)^{-1}$, jest

$$\exp(D_1)(X_n) = c_n X_n + b_1 \underline{X}^{\alpha^1} + H_1(X_1, \ldots, X_{n-1})$$

Zauważmy, że wielomian H_1 w powyższej sumie jest kombinacją liniową $\bar{D}^{\circ i}(\underline{X}^{\alpha^1})$, zatem występujące w nim jednomiany pochodzą z $\operatorname{mon} V \subset \operatorname{mon} W$ i są stopnia niższego od $\underline{X}^{\alpha^1}$ względem porządku $\prec$. Niech teraz $k > 0$. Postępowanie kontynuujemy następująco: jeśli $F_n = \exp(D_{k-1})(X_n)$, to bierzemy $D := D_{k-1}$ i dowód jest zakończony. W przeciwnym razie, niech

$b_k \underline{X}^{\alpha^k} := \mathrm{Lt}\left(F_n - \exp(D_{k-1})(X_n)\right)$, $w_k := \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^k \ln(c_i)$ oraz

$$D_k(X_n) := D_{k-1}(X_n) + \frac{w_k}{\exp(w_k) - 1} b_k \underline{X}^{\alpha^k}$$

Rozumowanie analogiczne jak dla $k = 1$ pokazuje, że

$$\exp(D_k)(X_n) = \exp(D_{k-1})(X_n) + b_k \underline{X}^{\alpha^k} + H_k(X_1, \ldots, X_{n-1})$$

przy czym każdy jednomian z H_k jest elementem $\operatorname{mon} W$ i ma stopień niższy od $\underline{X}^{\alpha^k}$ względem $\prec$. W kolejnym kroku otrzymamy zatem $F_n = \exp(D_{k+1})(X_n)$ lub $\underline{X}^{\alpha^{k+1}} \prec \underline{X}^{\alpha^k}$. Ponieważ $\underline{X}^{\alpha^{k+1}} \in \operatorname{mon} W$ i przestrzeń W jest skończenie wymiarowa, po co najwyżej $K \leqslant \#\operatorname{mon} W$ krokach musi być $F_n = \exp(D_K)(X_n)$.

Punkt 2) tezy jest natychmiastowy: dla $c_n = 1$ wzięliśmy $\ln(c_n) = 0$, wobec czego $D(X_n) = g(X_1, \ldots, X_{n-1}) \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Stąd $D^{\circ m}(X_n) = \bar{D}^{\circ(m-1)}(g) = 0$ dla pewnego m, gdyż z założenia indukcyjnego różniczkowanie $\bar{D} = D|_{\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n-1}]}$ jest lokalnie nilpotentne. ⊠

Uwaga 4.12. Punkt 2) tezy powyższego twierdzenia jest prawdziwy dla dowolnego ciała $\mathbf{k}$ charakterystyki 0 (mogącym budzić wątpliwość punktem dowodu jest określenie wartości $\ln(c_i)$ - jednakże dla $c_i = 1$ przyjmujemy $\ln(c_i) := 0 \in \mathbf{k}$). Inne dowody tego faktu można znaleźć np. w [Fr], [Ka1].

Bibliografia

[BCW] H. Bass, E. H. Connell, D. Wright, *The Jacobian Conjecture: reduction of the degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc. **7**(2) (1982), 287-330.

[B] M. de Bondt, *Quasi-translations and counterexamples to the homogeneous dependence problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **134**(10) (2006), 2849-2856.

[CR] S. Cynk, K. Rusek, *Injective endomorphisms of algebraic and analytic sets*, Ann. Polon. Math. **56** (1991), 29-35.

[Da] V. I. Danilov, *Nonsimplicity of the group of unimodular automorphisms of the affine plane*, Matematicheskie Zametki **15** (1974), 289-293.

[Dr] L. M. Drużkowski, *The Jacobian Conjecture: symmetric reduction and solution in the symmetric cubic linear case*, Ann. Polon. Math. **87** (2005), 83-92.

[E] A. van den Essen, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Math., vol. 190, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 2000.

[Fr] G. Freudenburg, *Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations*, Encyc. Math. Sci., vol. 136, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.

[FMi] S. Friedland, J. Milnor, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, Ergod. Th. Dynam. Systems **9**(1) (1989), 67-99.

[F1] J.-P. Furter, *On the degree of iterates of automorphisms of the affine plane*, Manuscripta Math. **98** (1999), 183-193.

[F2] J.-P. Furter, *Quasi-locally finite polynomial endomorphisms*, Math. Z., DOI:10.1007/s00209-008-0440-4.

[FM] J.-P. Furter, S. Maubach, *Locally Finite Polynomial Endomorphisms*, J. Pure and Applied Algebra **211**(2) (2007), 445-458.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1997.

[Hu] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Math., vol. 21, Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1995.

[Je] A. J. Jerri, *Linear Difference Equations with Discrete Transforms Method*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[Ka1] M. Karaś, *A note on triangular automorphisms*, Univ. Iag. Acta Math., **46** (2008), 69-72.

[Ka2] M. Karaś, *There is no tame automorphism of $\mathbb{C}^3$ with muldidegree $(3, 4, 5)$*, arXiv:0904.1265v1 [math.AG], 8 Apr 2009.

[Ke] O. Keller, *Ganze Cremona-Transformationen*, Monatsh. Math. Phys. **47** (1939), 299–306.

[Ku] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables*, Nieuw Arch. Wisk. **3**(1) (1953), 34-41.

[M] S. Maubach, *Polynomial Endomorphisms and Kernels of Derivations*, Ph.-D. Thesis, University of Nijmegen, 2003.

[MP] S. Maubach, H. Peters, *Polynomial maps which are roots of power series*, Math. Z. **259**(4), 2008.

[Na] M. Nagata, *On the automorphism group of $k[X, Y]$*, w: Kyoto Univ. Lectures in Math. vol. 5, Kyoto University, Kinokuniya, Tokio, 1972.

[No1] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, Rozprawy, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń 1994.

[No2] A. Nowicki, *On the jacobian equation $J(f, g) = 0$ for polynomials in $k[x, y]$*, Nagoya Math. J. **109** (1988), 151-157.

[PR] T. Petrie, J. D. Randall, *Finite order algebraic automorphisms of affine varieties*, Comment. Math. Helvetici **61** (1986), 203-221.

[P] B. Poonen, *Multivariable polynomial injections on rational numbers*, arXiv:0902.3961v1 [math.NT], 23 Feb 2009.

[SU1] I. Shestakov, U. Umirbaev, *The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables*, J. Amer. Math. Soc. **17**(1) (2004), 197-227.

[SU2] I. Shestakov, U. Umirbaev, *Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 181-196.

[Y] A.V. Yagzhev, *On Keller's problem*, Siberian Math. J. **21** (1980), 747–757.

[Z1] J. Zygadło, *Minimal polynomial of an exponential automorphism of* $\mathbb{C}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. **137**(6) (2009), 1849-1853.

[Z2] J. Zygadło, *Remarks on a normal subgroup of* GA_n, arXiv:0804.1491v1 [math.AG], 9 Apr 2008.

[Z3] J. Zygadło, *On multidegrees of polynomial automorphisms of* $\mathbb{C}^3$, arXiv:0903.5512v2 [math.AC], 2 Apr 2009.