Dlaczego łatwiej obliczyć pole prostokąta niż wprowadzić podatek liniowy?

Jacek Chmieliński

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

11 grudnia 2008

O równaniu funkcyjnym Cauchy'ego i jego zastosowaniach

Jacek Chmieliński

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

11 grudnia 2008

Równania funkcyjne

Rozważmy równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Równania funkcyjne

Rozważmy równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Co tu jest niewiadomą?

Równania funkcyjne

Rozważmy równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Co tu jest niewiadomą? Niewiadomą jest funkcja f.

Równania funkcyjne

Rozważmy równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Co tu jest niewiadomą? Niewiadomą jest funkcja f.
Szukamy takich funkcji f, że

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y.$$

Równania funkcyjne

Rozważmy równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Co tu jest niewiadomą? Niewiadomą jest funkcja f.
Szukamy takich funkcji f, że

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y.$$

Taką funkcją nie jest funkcja $f(t) = t^2$, ani funkcja $f(t) = 3t + 2$.

Równania funkcyjne

Rozważmy równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Co tu jest niewiadomą? Niewiadomą jest funkcja f.
Szukamy takich funkcji f, że

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y.$$

Taką funkcją nie jest funkcja $f(t) = t^2$, ani funkcja $f(t) = 3t + 2$.
Funkcja liniowa $f(t) = 2t$ jest (przykładowym) rozwiązaniem naszego równania.

Równania funkcyjne

Rozważmy równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Co tu jest niewiadomą? Niewiadomą jest funkcja f.
Szukamy takich funkcji f, że

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y.$$

Taką funkcją nie jest funkcja $f(t) = t^2$, ani funkcja $f(t) = 3t + 2$.
Funkcja liniowa $f(t) = 2t$ jest (przykładowym) rozwiązaniem naszego równania. Czy są inne?

Augustin Louis Cauchy

Augustin Louis Cauchy

Augustin Louis Cauchy (21 VIII 1789 Paryż – 23 V 1857 Sceaux koło Paryża); wielki matematyk francuski, twórca nowoczesnej analizy matematycznej opartej na pojęciach granicy i ciągłości. Zajmował się także m.in. równaniami różniczkowymi, wyznacznikami, probabilistyką i fizyką matematyczną. Cauchy był autorem 789 prac matematycznych; jego dzieła zebrane opublikowano w 27 tomach.

Augustin Louis Cauchy

Augustin Louis Cauchy (21 VIII 1789 Paryż – 23 V 1857 Sceaux koło Paryża); wielki matematyk francuski, twórca nowoczesnej analizy matematycznej opartej na pojęciach granicy i ciągłości. Zajmował się także m.in. równaniami różniczkowymi, wyznacznikami, probabilistyką i fizyką matematyczną. Cauchy był autorem 789 prac matematycznych; jego dzieła zebrane opublikowano w 27 tomach.

Nazwisko Cauchy'ego pojawia się w nazwach wielu terminów matematycznych: ciąg Cauchy'ego, kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregu, twierdzenie całkowe Cauchy'ego, równania Cauchy'ego–Riemanna, twierdzenie Cauchy'ego–Kowalewskiej, równanie funkcyjne Cauchy'ego.

Augustin Louis Cauchy

Równanie Cauchy'ego

Szukamy funkcji f takiej, że

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y. \tag{C}$$

Równanie Cauchy'ego

Szukamy funkcji f takiej, że

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y. \tag{C}$$

Każdą funkcję spełniającą równanie (C) nazywamy *addytywną*.

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Niech $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Nasze równanie przyjmuje wówczas postać

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{C}$$

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Niech $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Nasze równanie przyjmuje wówczas postać

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{C}$$

i. $f(0) = 0$;

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Niech $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Nasze równanie przyjmuje wówczas postać

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{C}$$

i. $f(0) = 0$;

ii. $f(nx) = nf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Niech $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Nasze równanie przyjmuje wówczas postać

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{C}$$

i. $f(0) = 0$;
ii. $f(nx) = nf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;
iii. $f(qx) = qf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$, $q \geqslant 0$.

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Niech $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Nasze równanie przyjmuje wówczas postać

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{C}$$

i. $f(0) = 0$;
ii. $f(nx) = nf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;
iii. $f(qx) = qf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$, $q \geqslant 0$.

Jeśli przyjmiemy $c := f(1)$, to z ostatniej własności wynika, że

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = cx \quad \text{dla } x \in \mathbb{Q}_+.$$

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Dla dowolnych $x \in \mathbb{R}_+$ i $y > 0$ mamy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \geqslant f(x)$$

czyli f jest funkcją rosnącą.

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Dla dowolnych $x \in \mathbb{R}_+$ i $y > 0$ mamy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \geqslant f(x)$$

czyli f jest funkcją rosnącą. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}_+$ możemy znaleźć dwa ciągi liczb wymiernych: (r_n) i (R_n) takie, że $r_n \leqslant x \leqslant R_n$ oraz $r_n \to x$ i $R_n \to x$.

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Dla dowolnych $x \in \mathbb{R}_+$ i $y > 0$ mamy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \geqslant f(x)$$

czyli f jest funkcją rosnącą. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}_+$ możemy znaleźć dwa ciągi liczb wymiernych: (r_n) i (R_n) takie, że $r_n \leqslant x \leqslant R_n$ oraz $r_n \to x$ i $R_n \to x$. Mamy więc

$$f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f(R_n)$$

oraz, przyjmując $c := f(1)$,

$$cr_n \leqslant f(x) \leqslant cR_n.$$

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Dla dowolnych $x \in \mathbb{R}_+$ i $y > 0$ mamy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \geqslant f(x)$$

czyli f jest funkcją rosnącą. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}_+$ możemy znaleźć dwa ciągi liczb wymiernych: (r_n) i (R_n) takie, że $r_n \leqslant x \leqslant R_n$ oraz $r_n \to x$ i $R_n \to x$. Mamy więc

$$f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f(R_n)$$

oraz, przyjmując $c := f(1)$,

$$cr_n \leqslant f(x) \leqslant cR_n.$$

Przechodząc z n do nieskończoności $cx \leqslant f(x) \leqslant cx$ czyli $f(x) = cx$.

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Dla dowolnych $x \in \mathbb{R}_+$ i $y > 0$ mamy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \geqslant f(x)$$

czyli f jest funkcją rosnącą. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}_+$ możemy znaleźć dwa ciągi liczb wymiernych: (r_n) i (R_n) takie, że $r_n \leqslant x \leqslant R_n$ oraz $r_n \to x$ i $R_n \to x$. Mamy więc

$$f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f(R_n)$$

oraz, przyjmując $c := f(1)$,

$$cr_n \leqslant f(x) \leqslant cR_n.$$

Przechodząc z n do nieskończoności $cx \leqslant f(x) \leqslant cx$ czyli $f(x) = cx$. Pokazaliśmy zatem, że każda funkcja $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniająca równanie (C) musi być postaci $f(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}_+$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}_+$.

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Przyjmijmy następujące założenia:

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Przyjmijmy następujące założenia:

a. Pole prostokąta zależy jedynie od długości jego boków a i b (jest takie samo dla prostokątów przystających).

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Przyjmijmy następujące założenia:

a. Pole prostokąta zależy jedynie od długości jego boków a i b (jest takie samo dla prostokątów przystających).
b. Pole jest liczbą nieujemną.

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Przyjmijmy następujące założenia:

a. Pole prostokąta zależy jedynie od długości jego boków a i b (jest takie samo dla prostokątów przystających).
b. Pole jest liczbą nieujemną.
c. jeśli prostokąt P podzielimy na dwa prostokąty, to suma ich pól daje pole wyjściowego prostokąta.

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Oznaczając przez $P(a, b)$ pole prostokąta o bokach długości a i b i dzieląc bok b na dwie części b_1 i b_2 dostajemy:

$$P(a, b) = P(a, b_1) + P(a, b_2).$$

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Oznaczając przez $P(a,b)$ pole prostokąta o bokach długości a i b i dzieląc bok b na dwie części b_1 i b_2 dostajemy:

$$P(a,b) = P(a,b_1) + P(a,b_2).$$

Zatem, przy ustalonym a funkcja $f(b) := P(a,b)$ spełnia równanie Cauchy'ego

$$f(b_1 + b_2) = f(b) = f(b_1) + f(b_2).$$

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Oznaczając przez $P(a, b)$ pole prostokąta o bokach długości a i b i dzieląc bok b na dwie części b_1 i b_2 dostajemy:

$$P(a, b) = P(a, b_1) + P(a, b_2).$$

Zatem, przy ustalonym a funkcja $f(b) := P(a, b)$ spełnia równanie Cauchy'ego

$$f(b_1 + b_2) = f(b) = f(b_1) + f(b_2).$$

Ponadto funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów dodatnich.

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Oznaczając przez $P(a,b)$ pole prostokąta o bokach długości a i b i dzieląc bok b na dwie części b_1 i b_2 dostajemy:

$$P(a,b) = P(a,b_1) + P(a,b_2).$$

Zatem, przy ustalonym a funkcja $f(b) := P(a,b)$ spełnia równanie Cauchy'ego

$$f(b_1 + b_2) = f(b) = f(b_1) + f(b_2).$$

Ponadto funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów dodatnich. Zatem, istnieje pewna stała $c = c(a)$ (zależna od ustalonego parametru a) taka, że $f(b) = c(a)b$.

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Oznaczając przez $P(a, b)$ pole prostokąta o bokach długości a i b i dzieląc bok b na dwie części b_1 i b_2 dostajemy:

$$P(a, b) = P(a, b_1) + P(a, b_2).$$

Zatem, przy ustalonym a funkcja $f(b) := P(a, b)$ spełnia równanie Cauchy'ego

$$f(b_1 + b_2) = f(b) = f(b_1) + f(b_2).$$

Ponadto funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów dodatnich. Zatem, istnieje pewna stała $c = c(a)$ (zależna od ustalonego parametru a) taka, że $f(b) = c(a)b$. Mamy więc:

$$P(a, b) = c(a)b.$$

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Ustalając teraz b i dzieląc bok a na dwie części a_1 i a_2 dostajemy

$$P(a,b) = P(a_1,b) + P(a_2,b)$$

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Ustalając teraz b i dzieląc bok a na dwie części a_1 i a_2 dostajemy

$$P(a, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b)$$

czyli $c(a)b = c(a_1)b + c(a_2)b$,

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Ustalając teraz b i dzieląc bok a na dwie części a_1 i a_2 dostajemy

$$P(a, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b)$$

czyli $c(a)b = c(a_1)b + c(a_2)b$, a zatem funkcja c spełnia równanie Cauchy'ego

$$c(a_1 + a_2) = c(a) = c(a_1) + c(a_2)$$

i przyjmuje wartości nieujemne dla nieujemnych argumentów.

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Ustalając teraz b i dzieląc bok a na dwie części a_1 i a_2 dostajemy

$$P(a,b) = P(a_1,b) + P(a_2,b)$$

czyli $c(a)b = c(a_1)b + c(a_2)b$, a zatem funkcja c spełnia równanie Cauchy'ego

$$c(a_1 + a_2) = c(a) = c(a_1) + c(a_2)$$

i przyjmuje wartości nieujemne dla nieujemnych argumentów. Zatem istnieje stała c taka, że $c(a) = ca$.

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Ustalając teraz b i dzieląc bok a na dwie części a_1 i a_2 dostajemy

$$P(a, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b)$$

czyli $c(a)b = c(a_1)b + c(a_2)b$, a zatem funkcja c spełnia równanie Cauchy'ego

$$c(a_1 + a_2) = c(a) = c(a_1) + c(a_2)$$

i przyjmuje wartości nieujemne dla nieujemnych argumentów. Zatem istnieje stała c taka, że $c(a) = ca$. Ostatecznie mamy $P(a, b) = cab$.

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Ustalając teraz b i dzieląc bok a na dwie części a_1 i a_2 dostajemy

$$P(a, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b)$$

czyli $c(a)b = c(a_1)b + c(a_2)b$, a zatem funkcja c spełnia równanie Cauchy'ego

$$c(a_1 + a_2) = c(a) = c(a_1) + c(a_2)$$

i przyjmuje wartości nieujemne dla nieujemnych argumentów. Zatem istnieje stała c taka, że $c(a) = ca$. Ostatecznie mamy $P(a, b) = cab$. Przyjmując $P(1, 1) = 1$ (pole kwadratu o boku jednostkowym jest jednostkowe) dostajemy $c = 1$

Zastosowanie pierwsze — pole prostokąta

Ustalając teraz b i dzieląc bok a na dwie części a_1 i a_2 dostajemy

$$P(a, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b)$$

czyli $c(a)b = c(a_1)b + c(a_2)b$, a zatem funkcja c spełnia równanie Cauchy'ego

$$c(a_1 + a_2) = c(a) = c(a_1) + c(a_2)$$

i przyjmuje wartości nieujemne dla nieujemnych argumentów. Zatem istnieje stała c taka, że $c(a) = ca$. Ostatecznie mamy $P(a, b) = cab$. Przyjmując $P(1, 1) = 1$ (pole kwadratu o boku jednostkowym jest jednostkowe) dostajemy $c = 1$ i w rezultacie $P(a, b) = ab$.

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Wykażemy, że jedynym sprawiedliwym podatkiem jest podatek liniowy.

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Wykażemy, że jedynym sprawiedliwym podatkiem jest podatek liniowy.

W 2008 roku podatek dochodowy obliczamy według następujących reguł.

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Wykażemy, że jedynym sprawiedliwym podatkiem jest podatek liniowy.

W 2008 roku podatek dochodowy obliczamy według następujących reguł.

do 3091zł	3091zł - 44490zł	44490zł - 85528zł	ponad 85528zł
0	19%	30%	40%

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Wykażemy, że jedynym sprawiedliwym podatkiem jest podatek liniowy.

W 2008 roku podatek dochodowy obliczamy według następujących reguł.

do 3091zł	3091zł - 44490zł	44490zł - 85528zł	ponad 85528zł
0	19%	30%	40%

Zależność odprowadzanego podatku $f(x)$ od kwoty dochodu x jest więc taka

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 3091, \\ 0,19x - 586,85 & \text{dla} \quad x \in (3091, 44490], \\ 0,30(x - 44490) + 7866,25 & \text{dla} \quad x \in (44490, 85528], \\ 0,40(x - 85528) + 20177,65 & \text{dla} \quad x > 85528. \end{cases}$$

Wykresem powyższej funkcji jest więc łamana składająca się z czterech kawałków.

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Oczywiście, możemy zaproponować wiele innych rozwiązań. Dla przykładu rozważmy trzy funkcje:

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Oczywiście, możemy zaproponować wiele innych rozwiązań. Dla przykładu rozważmy trzy funkcje:

$$f(x) = \frac{1}{5}x, \qquad g(x) = 10\sqrt{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{12500}x^2.$$

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Oczywiście, możemy zaproponować wiele innych rozwiązań. Dla przykładu rozważmy trzy funkcje:

$$f(x) = \frac{1}{5}x, \qquad g(x) = 10\sqrt{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{12500}x^2.$$

Wszystkie te funkcje są rosnące, więc we wszystkich przypadkach obowiązuje zasada "im większy dochód, tym większy podatek".

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Oczywiście, możemy zaproponować wiele innych rozwiązań. Dla przykładu rozważmy trzy funkcje:

$$f(x) = \frac{1}{5}x, \qquad g(x) = 10\sqrt{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{12500}x^2.$$

Wszystkie te funkcje są rosnące, więc we wszystkich przypadkach obowiązuje zasada "im większy dochód, tym większy podatek".

dochód	$f(x) = \frac{1}{5}x$	$g(x) = 10\sqrt{x}$	$h(x) = \frac{1}{12500}x^2$
1000 zł	200zł	316zł	80zł

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Oczywiście, możemy zaproponować wiele innych rozwiązań. Dla przykładu rozważmy trzy funkcje:

$$f(x) = \frac{1}{5}x, \qquad g(x) = 10\sqrt{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{12500}x^2.$$

Wszystkie te funkcje są rosnące, więc we wszystkich przypadkach obowiązuje zasada "im większy dochód, tym większy podatek".

dochód	$f(x) = \frac{1}{5}x$	$g(x) = 10\sqrt{x}$	$h(x) = \frac{1}{12500}x^2$
1000 zł	200zł	316zł	80zł
2500 zł	500zł	500zł	500zł

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Oczywiście, możemy zaproponować wiele innych rozwiązań. Dla przykładu rozważmy trzy funkcje:

$$f(x) = \frac{1}{5}x, \qquad g(x) = 10\sqrt{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{12500}x^2.$$

Wszystkie te funkcje są rosnące, więc we wszystkich przypadkach obowiązuje zasada "im większy dochód, tym większy podatek".

dochód	$f(x) = \frac{1}{5}x$	$g(x) = 10\sqrt{x}$	$h(x) = \frac{1}{12500}x^2$
1000 zł	200zł	316zł	80zł
2500 zł	500zł	500zł	500zł
5000 zł	1000zł	707zł	2000zł

Zastosowanie drugie — podatek liniowy

Oczywiście, możemy zaproponować wiele innych rozwiązań. Dla przykładu rozważmy trzy funkcje:

$$f(x) = \frac{1}{5}x, \qquad g(x) = 10\sqrt{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{12500}x^2.$$

Wszystkie te funkcje są rosnące, więc we wszystkich przypadkach obowiązuje zasada "im większy dochód, tym większy podatek".

dochód	$f(x) = \frac{1}{5}x$	$g(x) = 10\sqrt{x}$	$h(x) = \frac{1}{12500}x^2$
1000 zł	200zł	316zł	80zł
2500 zł	500zł	500zł	500zł
5000 zł	1000zł	707zł	2000zł
10000 zł	2000zł	1000zł	8000zł

Tworzymy idealny podatek

Tworzymy idealny podatek

Przyjmujemy następujące założenia:

Tworzymy idealny podatek

Przyjmujemy następujące założenia:

a. podatek jest pewną funkcją f zależną wyłącznie od osiągniętego dochodu x.

Tworzymy idealny podatek

Przyjmujemy następujące założenia:

a. podatek jest pewną funkcją f zależną wyłącznie od osiągniętego dochodu x.
b. Dochód x oraz wysokość należnego podatku $f(x)$ są liczbami nieujemnymi.

Tworzymy idealny podatek

Przyjmujemy następujące założenia:

a. podatek jest pewną funkcją f zależną wyłącznie od osiągniętego dochodu x.
b. Dochód x oraz wysokość należnego podatku $f(x)$ są liczbami nieujemnymi. Mamy więc:

$$f\colon [0,\infty) \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}_+.$$

Tworzymy idealny podatek

Przyjmujemy następujące założenia:

a. podatek jest pewną funkcją f zależną wyłącznie od osiągniętego dochodu x.

b. Dochód x oraz wysokość należnego podatku $f(x)$ są liczbami nieujemnymi. Mamy więc:

$$f\colon [0,\infty) \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}_+.$$

c. jeśli ktoś osiągnął dochody z dwóch źródeł, i za każdy zapłacił oddzielnie podatek, to suma tych podatków winna być taka sama, jak gdyby zapłacił jeden podatek od całego dochodu.

Tworzymy idealny podatek

Przyjmujemy następujące założenia:

a. podatek jest pewną funkcją f zależną wyłącznie od osiągniętego dochodu x.

b. Dochód x oraz wysokość należnego podatku $f(x)$ są liczbami nieujemnymi. Mamy więc:

$$f\colon [0,\infty) \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}_+.$$

c. jeśli ktoś osiągnął dochody z dwóch źródeł, i za każdy zapłacił oddzielnie podatek, to suma tych podatków winna być taka sama, jak gdyby zapłacił jeden podatek od całego dochodu. To oznacza, że nasza funkcja f ma własność *addytywności*.

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Tworzymy idealny podatek

I to już wszystkie założenia.

Tworzymy idealny podatek

I to już wszystkie założenia. Jakie są ich konsekwencje?

Tworzymy idealny podatek

I to już wszystkie założenia. Jakie są ich konsekwencje? Funkcja ta musi być postaci $f(x) = cx$.

Tworzymy idealny podatek

I to już wszystkie założenia. Jakie są ich konsekwencje? Funkcja ta musi być postaci $f(x) = cx$.
A więc przyjęte założenia (bardzo oszczędne i naturalne) powodują, że funkcja f **musi** być funkcją liniową.

Tworzymy idealny podatek

I to już wszystkie założenia. Jakie są ich konsekwencje? Funkcja ta musi być postaci $f(x) = cx$.
A więc przyjęte założenia (bardzo oszczędne i naturalne) powodują, że funkcja f **musi** być funkcją liniową.
Oczywiście wielkość stałej c, czyli wysokość stawki podatkowej może być dowolna (byle taka sama dla wszystkich).

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Równanie przyjmuje wówczas postać

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}. \tag{C}$$

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Równanie przyjmuje wówczas postać

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}. \tag{C}$$

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Równanie przyjmuje wówczas postać

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}. \tag{C}$$

i. $f(0) = 0$;
ii. $f(nx) = nf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;
iii. $f(qx) = qf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$, $q \geqslant 0$;

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Równanie przyjmuje wówczas postać

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}. \tag{C}$$

i. $f(0) = 0$;
ii. $f(nx) = nf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;
iii. $f(qx) = qf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$, $q \geqslant 0$;
iv. $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$;

Rozwiązania równania Cauchy'ego $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Równanie przyjmuje wówczas postać

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}. \tag{C}$$

i. $f(0) = 0$;
ii. $f(nx) = nf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;
iii. $f(qx) = qf(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$, $q \geqslant 0$;
iv. $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$;
v. $f(qx) = qf(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $q \in \mathbb{Q}$.

Ciągłe rozwiązania

Ciągłe rozwiązania

Dla $t \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg liczb wymiernych (q_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} = t$.

Ciągłe rozwiązania

Dla $t \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg liczb wymiernych (q_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} = t$. Dla funkcji ciągłej f mamy (dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$):

$$f(tx) = f(\lim_{n\to\infty} q_n x)$$

Ciągłe rozwiązania

Dla $t \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg liczb wymiernych (q_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} = t$. Dla funkcji ciągłej f mamy (dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$):

$$f(tx) = f(\lim_{n\to\infty} q_n x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n x)$$

Ciągłe rozwiązania

Dla $t \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg liczb wymiernych (q_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} = t$. Dla funkcji ciągłej f mamy (dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$):

$$f(tx) = f(\lim_{n\to\infty} q_n x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n x) = \lim_{n\to\infty} q_n f(x) = tf(x)$$

Ciągłe rozwiązania

Dla $t \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg liczb wymiernych (q_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} = t$. Dla funkcji ciągłej f mamy (dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$):

$$f(tx) = f(\lim_{n\to\infty} q_n x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n x) = \lim_{n\to\infty} q_n f(x) = tf(x)$$

czyli

$$f(tx) = tf(x) \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R} \text{ oraz dla dowolnego } t \in \mathbb{R}.$$

Ciągłe rozwiązania

Dla $t \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg liczb wymiernych (q_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} = t$. Dla funkcji ciągłej f mamy (dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$):

$$f(tx) = f(\lim_{n\to\infty} q_n x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n x) = \lim_{n\to\infty} q_n f(x) = tf(x)$$

czyli

$$f(tx) = tf(x) \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R} \text{ oraz dla dowolnego } t \in \mathbb{R}.$$

A zatem dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = f(t \cdot 1) = tf(1) = ct \quad \text{dla } c := f(1).$$

Ciągłe rozwiązania

Dla $t \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg liczb wymiernych (q_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} = t$. Dla funkcji ciągłej f mamy (dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$):

$$f(tx) = f(\lim_{n\to\infty} q_n x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n x) = \lim_{n\to\infty} q_n f(x) = tf(x)$$

czyli

$$f(tx) = tf(x) \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R} \text{ oraz dla dowolnego } t \in \mathbb{R}.$$

A zatem dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = f(t\cdot 1) = tf(1) = ct \quad \text{dla } c := f(1).$$

Zatem **ciągłymi** rozwiązaniami równania Cauchy'ego są wszystkie funkcje liniowe postaci $f(x) = cx$ (dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$) i tylko takie.

- **1821 A.L. Cauchy** – ciągłe rozwiązania równania (C).

- **1821 A.L. Cauchy** – ciągłe rozwiązania równania (C).
- **1880**

Gaston Darboux (1842-1917) – jeśli f przyjmuje wartości nieujemne (lub niedodatnie) na pewnym małym przedziale lub jeśli f ograniczona (na dowolnie małym przedziale), to f ciągła i w konsekwencji jest postaci $f(x) = ax$.

- **1821 A.L. Cauchy** – ciągłe rozwiązania równania (C).
- **1880**

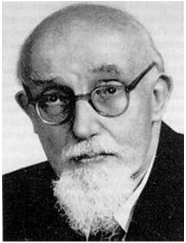
Gaston Darboux (1842-1917) – jeśli f przyjmuje wartości nieujemne (lub niedodatnie) na pewnym małym przedziale lub jeśli f ograniczona (na dowolnie małym przedziale), to f ciągła i w konsekwencji jest postaci $f(x) = ax$.

- ...

- **1821 A.L. Cauchy** – ciągłe rozwiązania równania (C).
- **1880**

Gaston Darboux (1842-1917) – jeśli f przyjmuje wartości nieujemne (lub niedodatnie) na pewnym małym przedziale lub jeśli f ograniczona (na dowolnie małym przedziale), to f ciągła i w konsekwencji jest postaci $f(x) = ax$.

- ...
- **1905**



Georg Hamel (1877-1954) – istnieją nieciągłe funkcje addytywne (choć nie da się ich opisać „wzorem") i jest ich bardzo dużo. Takie funkcje muszą być „nieporządne": nieciągłe w żadnym punkcie, nieograniczone na każdym przedziale, o wykresie, który w sposób *gęsty* wypełnia płaszczyznę.

Funkcje Hamela

Funkcje Hamela

Aby wykazać istnienie nieciągłych funkcji addytywnych (funkcji Hamela) potrzebne jest następujące twierdzenie:

Funkcje Hamela

Aby wykazać istnienie nieciągłych funkcji addytywnych (funkcji Hamela) potrzebne jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie (G. Hamel, 1905)

Istnieje podzbiór H zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ o tej własności, że **każdą** *liczbę rzeczywistą $x \in \mathbb{R}$ można* **w dokładnie jeden sposób** *przedstawić w postaci skończonej sumy:*

$$x = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_n h_n$$

gdzie n jest pewną liczbą naturalną, $h_1, \ldots, h_n$ pewnymi elementami z H oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pewnymi liczbami **wymiernymi**.

Funkcje Hamela

Aby wykazać istnienie nieciągłych funkcji addytywnych (funkcji Hamela) potrzebne jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie (G. Hamel, 1905)

Istnieje podzbiór H zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ o tej własności, że **każdą** *liczbę rzeczywistą $x \in \mathbb{R}$ można* **w dokładnie jeden sposób** *przedstawić w postaci skończonej sumy:*

$$x = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_n h_n$$

gdzie n jest pewną liczbą naturalną, $h_1, \ldots, h_n$ pewnymi elementami z H oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pewnymi liczbami **wymiernymi**.

Zbiór H o podanej własności nazywamy bazą przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ nad ciałem liczby wymiernych $\mathbb{Q}$ (bazą Hamela).

Funkcje Hamela

Twierdzenie

Jeśli $H \subset \mathbb{R}$ *jest bazą Hamela, to dla dowolnej funkcji* $f_0 : H \to \mathbb{R}$ *istnieje dokładnie jedna funkcja addytywna* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *taka, że* $f|_H = f_0$.

Funkcje Hamela

Twierdzenie

Jeśli $H \subset \mathbb{R}$ jest bazą Hamela, to dla dowolnej funkcji $f_0 : H \to \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna funkcja addytywna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f|_H = f_0$.

Niech teraz H będzie dowolną bazą Hamela i niech $g : H \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jej jedynym addytywnym rozszerzeniem.

Funkcje Hamela

Twierdzenie

Jeśli $H \subset \mathbb{R}$ jest bazą Hamela, to dla dowolnej funkcji $f_0 : H \to \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna funkcja addytywna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f|_H = f_0$.

Niech teraz H będzie dowolną bazą Hamela i niech $g : H \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jej jedynym addytywnym rozszerzeniem. Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{g(x)}{x} = const$ dla $x \in H$.

Funkcje Hamela

Twierdzenie

Jeśli $H \subset \mathbb{R}$ jest bazą Hamela, to dla dowolnej funkcji $f_0 : H \to \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna funkcja addytywna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f|_H = f_0$.

Niech teraz H będzie dowolną bazą Hamela i niech $g : H \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jej jedynym addytywnym rozszerzeniem. Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{g(x)}{x} = const$ dla $x \in H$. Wystarczy zatem określić dowolnie funkcję $g : B \to \mathbb{R}$ tak, aby $\frac{g(x)}{x} \neq const$, i wówczas jej addytywne rozszerzenie **nie będzie funkcją ciągłą**.

Funkcje Hamela

Twierdzenie

Jeśli $H \subset \mathbb{R}$ jest bazą Hamela, to dla dowolnej funkcji $f_0 : H \to \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna funkcja addytywna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f|_H = f_0$.

Niech teraz H będzie dowolną bazą Hamela i niech $g : H \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jej jedynym addytywnym rozszerzeniem. Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{g(x)}{x} = const$ dla $x \in H$. Wystarczy zatem określić dowolnie funkcję $g : B \to \mathbb{R}$ tak, aby $\frac{g(x)}{x} \neq const$, i wówczas jej addytywne rozszerzenie **nie będzie funkcją ciągłą**. Zatem istnieją nieciągłe funkcje addytywne.

Funkcje Hamela

Twierdzenie

Jeśli $H \subset \mathbb{R}$ jest bazą Hamela, to dla dowolnej funkcji $f_0 : H \to \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna funkcja addytywna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f|_H = f_0$.

Niech teraz H będzie dowolną bazą Hamela i niech $g : H \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jej jedynym addytywnym rozszerzeniem. Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{g(x)}{x} = const$ dla $x \in H$. Wystarczy zatem określić dowolnie funkcję $g : B \to \mathbb{R}$ tak, aby $\frac{g(x)}{x} \neq const$, i wówczas jej addytywne rozszerzenie **nie będzie funkcją ciągłą**. Zatem istnieją nieciągłe funkcje addytywne.
Zwróćmy uwagę, że mimo, że dowiedliśmy istnienia takich funkcji, to nie jesteśmy w stanie skonstruować takiej funkcji.